Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11 , Roma (1991), 273-281

Ortogonalità non Hermitiana sul Cerchio Unitario e Polinomi Simmetrici

B. GERMANO

RIASSUNTO – *Vengono considerati sistemi di polinomi, dotati di simmetrie complesse, ortonormali sul cerchio unitario, rispetto ad un prodotto scalare non hermitiano, determinato da un peso appartenente a opportune classi di simmetria.*

ABSTRACT – *Symmetric systems orthonormal on the unit circle with respect to a not hermitian scalar product are introduced.*

KEY WORDS – *Orthogonal polynomials - Nontrigonometric Fourier Analysis.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 33A65 - 42C05 - 65F40

– Introduzione

Recentemente diversi lavori sono stati dedicati allo studio dei polinomi sul semicerchio o su un arco di cerchio, ortogonali rispetto ad un prodotto scalare non hermitiano. Si vedano ad esempio: W. GAUTSCHI - G.V. MILOVANOVIC [4], F. CALIÒ - E. MARCHETTI [3], M.G. DE BRUIN [2].

In [1] D. BESSIS ha anche considerato il caso dei polinomi ortogonali sul cerchio unitario, sempre rispetto a tale tipo di prodotto scalare.

Il presente lavoro si propone di esaminare come si debbano trasformare i risultati conseguiti in [8], nel caso in cui venga considerato un prodotto scalare non hermitiano.

Vengono infatti introdotti sistemi di polinomi dotati di simmetrie complesse, ortonormali sul cerchio unitario rispetto ad un prodotto scalare non hermitiano determinato da pesi appartenenti ad opportune classi di simmetria.

1 – Simmetrie delle funzioni complesse

Fissato un intero $m \in \mathbb{N}$, siano

$$\varepsilon_k = e^{i2k\pi/m} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

le radici m-sime complesse dell'unità.

$\Omega(I)$ (o anche Ω) denoterà lo spazio delle funzioni complesse della variabile complessa z sviluppabili in serie di Laurent in una corona circolare I di centro l'origine (in particolare olomorfe in un intorno circolare I dell'origine).

Con $\Omega^{[k]}(I)$ (o anche $\Omega^{[k]}$) sarà indicato il sottospazio vettoriale di Ω costituito dalle funzioni che verificano la seguente proprietà di simmetria:

$$\phi \in \Omega^{[k]} \iff \phi(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_k \phi(z). \tag{1.1}$$

Sussiste la seguente decomposizione in somma diretta (cfr. ad es. P.E. Ricci [7]):

Teorema I.
$$\Omega = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \Omega^{[k]}.$$

Inoltre:

Teorema II. *Se* $\phi \in \Omega^{[k]} - \{0\}$, *allora:*

$$D\phi \in \Omega^{[k-1]} \quad , \quad D^{(2)}\phi \in \Omega^{[k-2]} \quad , \ldots, \quad D^{(r)}\phi \in \Omega^{[k-r]} \quad , \ldots (\mathrm{mod}\, m).$$

Evidentemente, se $\phi \in \Omega^{[h]}$ e $\psi \in \Omega^{[k]}$, allora $\phi\psi \in \Omega^{[h+k]}$ (mod m).

Si scrive subito la tavola di composizione delle funzioni che soddisfano le proprietà di simmetria (1.1):

$\bullet$	$\Omega^{[0]}$	$\Omega^{[1]}$	$\Omega^{[2]}$	....	$\Omega^{[m-1]}$
$\Omega^{[0]}$	$\Omega^{[0]}$	$\Omega^{[1]}$	$\Omega^{[2]}$	....	$\Omega^{[m-1]}$
$\Omega^{[1]}$	$\Omega^{[1]}$	$\Omega^{[2]}$	$\Omega^{[3]}$	....	$\Omega^{[0]}$
$\Omega^{[2]}$	$\Omega^{[2]}$	$\Omega^{[3]}$	$\Omega^{[4]}$	....	$\Omega^{[1]}$
....	....	....	....	....	....
$\Omega^{[m-1]}$	$\Omega^{[m-1]}$	$\Omega^{[0]}$	$\Omega^{[1]}$	....	$\Omega^{[m-2]}$

Sia Γ: $|z| = \rho$ un cerchio di centro l'origine e contenuto nel campo di olomorfia I della funzione $f(z)$.

Posto:

$$\Gamma_1 : \{x = \rho\cos\theta\,,\ y = \rho\sin\theta\,;\quad 0 \le \theta \le 2\pi/m\}$$

si verifica facilmente che risulta:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} (f(z) + \varepsilon_1 f(\varepsilon_1 z) + \ldots + \varepsilon_{m-1} f(\varepsilon_{m-1} z))dz\,. \tag{1.2}$$

Ne consegue (cfr. [8]) il seguente

TEOREMA III. *Se $k = 0, 1, \ldots, m-2$, allora:*

$$f \in \Omega^{[k]} \implies \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0\,. \tag{1.3}$$

$$f \in \Omega^{[m-1]} \implies \int_{\Gamma} f(z)\,dz = m\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz\,. \tag{1.4}$$

Nel seguito vengono anche considerate funzioni complesse della variabile complessa z appartenenti a classi più generali. Infatti, *I risultati precedenti, che dipendono esclusivamente da proprietà algebriche e dal teorema di Cauchy, continuano a valere se le funzioni che si considerano appartengono alla classe H_2 (cfr.* G. SZEGŐ [9], p. 274, Fatou's Theorem 10.1.2), *sono cioè tali che:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \quad \textit{è convergente,}$$

e, conseguentemente:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \textit{è olomorfa nel cerchio } |z| < 1 .$$

2 – Sistemi ortonormali rispetto ad un prodotto scalare non hermitiano

Sia $\phi(z) \in \Omega$ una funzione complessa della variabile complessa z che soddisfi una delle seguenti condizioni:

A) $\phi(z)$ ammette il seguente sviluppo in serie di Taylor:

$$\phi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h \tag{2.1}$$

in un intorno circolare I, con centro nell'origine, contenente il cerchio unitario: $\gamma : |z| = 1$, oppure:

B) $\phi(z) \in H_2$.

Consideriamo *funzioni peso* del tipo:

$$w(z) = \frac{\phi(z)}{z} = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{h-1} , \tag{2.2}$$

e, conseguentemente, il seguente *prodotto scalare non hermitiano* (si noti l'assenza del segno di conuiugio su $Q(z)$) in Ω:

$$\langle P(z), Q(z) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma P(z) Q(z) w(z)\, dz . \tag{2.3}$$

Sia:

$$c_h = \langle 1, z^h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^h w(z)\, dz\,. \tag{2.4}$$

La successione $\{c_h\}_{h \in \mathbb{N}_0}$ è nota come la successione dei *momenti* relativa all'assegnata funzione peso.

Sarà utile considerare la seguente decomposizione della funzione peso, data dal teorema I:

$$w(z) = w^{[m-1]}(z) + w^{[m-2]}(z) + \ldots + w^{[0]}(z)\,. \tag{2.5}$$

Posto

$$\begin{cases} \Delta_{-1} = 1 \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}, \end{cases} \tag{2.6}$$

supponiamo che risulti $\Delta_n \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_0$.

Procedendo come di consueto, si trova che il sistema ortonormale generato dalle potenze: $1, z, z^2, \ldots$, è fornito dalle formule seguenti:

$$P_n(z) = (\Delta_{n-1}\Delta_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & \cdots & c_{2n+1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

$$(n = 0, 2, \ldots);$$

$$P_0(z) = \Delta_0^{-1/2}\,. \tag{2.7$_0$}$$

Se poniamo:

$$P_n(z) = \sum_{h=0}^{n} \alpha_{h,n} z^h\,, \tag{2.8}$$

i coefficienti $\alpha_{h,n}$ sono legati ai momenti c_h mediante il sistema:

$$
(2.9)\qquad \begin{cases} \alpha_{0,n}c_0 + \alpha_{1,n}c_1 + \ldots + \alpha_{n,n}c_n = 0 \\ \alpha_{0,n}c_1 + \alpha_{1,n}c_2 + \ldots + \alpha_{n,n}c_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{0,n}c_n + \alpha_{1,n}c_{n+1} + \ldots + \alpha_{n,n}c_{2n} = 0 \end{cases}
$$

Dalle (2.9) si ottiene subito:

$$
(2.10)\qquad \alpha_{n,n} := \kappa_n = \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)^{1/2} .
$$

Si ha allora la seguente formula di ricorrenza:

$$
(2.11)\qquad A_n p_n(z) = (z - B_n)p_{n-1}(z) - A_{n-1}p_{n-2}(z) ,
$$

$$
(2.12)\qquad \begin{aligned} A_n &= \frac{(\Delta_{n-2}\Delta_n)^{1/2}}{\Delta_{n-1}} , \\ B_n &= \int_\gamma z p_{n-1}^2(z)\, dw(z) , \qquad (n \in \mathbb{N}) . \end{aligned}
$$

3 – Polinomi ortogonali di assegnata simmetria

Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Per ogni

$$
k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq m-1 ,
$$

consideriamo il sistema di polinomi ortogonali $P_s^{[k]}(z)$ rispetto al prodotto scalare (2.3).

Si osservi che, per il teorema III, per ogni k si avrà:

$$
\langle P_s^{[k]}(z), P_t^{[k]}(z)\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P_s^{[k]}(z)P_t^{[k]}(z)w^{[m-2k-1]}(z)\, dz ,
$$

cioè, per ogni k, nel calcolo del prodotto scalare sopra scritto interviene solo la componente del peso $w(z)$ che appartiene alla classe di simmetria $\Omega^{[m-2k-1]}$:

$$
w^{[m-2k-1]}(z) = \frac{1}{m}\left(w(z) + \varepsilon_{2k+1}w(\varepsilon_1 z) + \ldots + \varepsilon_{2k+1}^{m-1}w(\varepsilon_{m-1}z)\right) .
$$

Si osservi anche che il sitema dei polinomi $P_s^{[k]}(z)$ si ottiene ortonormalizzando rispetto al peso $w^{[m-2k-1]}(z)$ il sistema dei monomi

$$z^k\ ,\ z^{k+m}, \ldots,\ z^{k+rm} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

4 – Sviluppi in serie di polinomi simmetrici

Consideriamo una funzione $f(z)$ verificante una delle ipotesi indicate alla fine del paragrafo 1, e sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{[k]}(z)$$

la decomposizione di tale funzione secondo il Teorema I.

Per ogni fissato k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ consideriamo il sistema $\{P_s^{[k]}(z)\}$ ortonormale rispetto alla componente $w^{[m-2k-1]}(z)$ del peso $w(z)$ e poniamo:

$$a_{k,s} = \int_\gamma f(z) P_s^{[k]}(z) w^{[m-2k-1]}(z)\, dz\,.$$

È allora possibile dimostrare il seguente teorema di convergenza:

TEOREMA IV. *Nelle ipotesi sopra ammesse se, inoltre, risulta* $\forall\, k$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$*:*

$$\sum_{s=0}^{\infty} |a_{k,s}| < +\infty \tag{4.1}$$

allora le serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_{k,s} P_s^{[k]}(z) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{4.2}$$

convergono in $L^p_{w(z)}$*, qualunque sia* p $(0 \le p \le +\infty)$*, ciascuna verso la corrispondente componente* $f^{[k]}(z)$*, e risulta:*

$$\lim_{N\to\infty} \int_\gamma \left[f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{N} a_{k,s} P_s^{[k]}(z) \right] w^{[m-2k-1]}(z)\, dz = 0\,. \tag{4.3}$$

DIM. È evidentemente sufficiente dimostrare la relazione di limitè relativa alle singole componenti:

$$\lim_{N\to\infty}\int_\gamma \left[f^{[k]}(z)-\sum_{s=0}^{N} a_{k,s}P_s^{[k]}(z)\right] w^{[m-2k-1]}(z)\,dz=0\,, \tag{4.4}$$

in quanto, in virtù della diseguaglianza triangolare, dalla (4.4) si deduce subito la (4.3).

Per dimostrare la (4.4) si procede come in [5]. Posto:

$$f_{MN}^{[k]}(z)=\sum_{s=M}^{N} a_{k,s}P_s^{[k]}(z)\,,$$

si ha:

$$\|f_{MN}^{[k]}\|_p\le\sum_{s=M}^{N}|a_{k,s}|$$

e quindi, in virtù dell'ipotesi (4.1), anche la serie (4.2) verifica in $L^p_{w(z)}$ il criterio di convergenza di Cauchy. Poiché lo spazio $L^p_{w(z)}$ è completo, la serie (4.2) converge, nella norma dello spazio, a una funzione $f^{[k]}(z)\in L^p_{w(z)}$, per la quale risulta:

$$\lim_{N\to\infty}\|f^{[k]}-f_{0N}^{[k]}\|_p=0\,. \tag{4.5}$$

Ma, per $N\ge m$, si ha:

$$\int_\gamma f_{0N}^{[k]}P_m^{[k]}(z)w^{[m-2k-1]}(z)\,dz=$$

$$=\int_\gamma\left[\sum_{s=0}^{N}a_{k,s}P_s^{[k]}(z)\right]P_m^{[k]}(z)w^{[m-2k-1]}(z)\,dz=a_{k,m}\,.$$

Quindi la (4.4) sarà dimostrata se si riesce a provare che:

$$\lim_{N\to\infty}\int_\gamma\left[f^{[k]}(z)-f_{0N}^{[k]}\right]P_m^{[k]}(z)w^{[m-2k-1]}(z)\,dz=0\,. \tag{4.6}$$

Peraltro, la (4.6) deriva subito dalla (4.5), dalla diseguaglianza di Hölder (cfr. ad es. [6], p. 175):

$$\left| \int_\gamma \left[f^{[k]}(z) - f_{0N}^{[k]} \right] P_m^{[k]}(z) w^{[m-2k-1]}(z)\, dz \right| \leq$$

$$\leq \| f^{[k]} - f_{0N}^{[k]} \|_p \, \| P_m^{[k]} \|_{p/(p-1)} ,$$

e dal fatto che l'ultima norma è certo finita.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Bessis: *Orthogonal Polynomials, Padé Approximations and Julia sets*, on Orthogonal Polynomials: Theory and Practice, Ed. by Paul Nevai, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, (1990).

[2] M.G. De Bruin: *Polynomials orthogonal on a circular arc*, in corso di stampa.

[3] F. Caliò - E. Marchetti: *Generazione ed applicazione di quasi gaussiane sul semicerchio*, Conv. Naz. di Analisi Numerica Roma, 26-28 settembre 1988.

[4] W. Gautschi - G.V. Milovanović: *Orthogonal polynomials on the semicircle*, J. Approx. Theory 46, (1986).

[5] A. Ghizzetti: *Sistemi biortonormali collegati alle formule di quadratura gaussiane*, Pubbl. I.M.A. Univ. Roma, n. 8, Roma, (1976).

[6] P.R. Halmos: *Measure Theory*, Van Nostrand, New Jersey, (1950).

[7] P.E. Ricci: *Le funzioni pseudo-iperboliche e pseudo-trigonometriche*, Pubbl. I.M.A. Univ. Roma, n. 14, Roma, (1978).

[8] P.E. Ricci: *Symmetric orthonormal systems on the unit circle*, (in corso di stampa).

[9] G. Szegö: *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Pubbl. Vol. XXIII - Providence R.I., (1939).

Lavoro pervenuto alla redazione il 25 giugno 1990
ed accettato per la pubblicazione il 26 settembre 1990
su parere favorevole di P.E. Ricci e di A. Avantaggiati

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Bruna Germano - Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate - Università "La Sapienza" - Via A. Scarpa, 10 - 00161 Roma - Italia