Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11 , Roma (1991), 341-349

Sul Problema di Derivata Obliqua non Regolare Relativo alle Equazioni Differenziali Lineari a Derivate Parziali di Tipo Ellittico

M. PETTINEO(*)

RIASSUNTO – *Utilizzando un'Osservazione fatta in un precedente lavoro [14], si perviene al teorema di esistenza, in termini di ortogonalità negli spazi di Hilbert, per il problema di derivata obliqua non regolare relativo alle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico.*

ABSTRACT – *Existence theorems in terms of orthogonality in Hilbert spaces for non regular oblique derivative elliptic problems, by use of an elementary remark [14], are obtained.*

KEY WORDS – *Partial differential equations - Integral equations.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 35J25

1 – Introduzione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^m (m \geq 3)$ un aperto e connesso limitato, con la frontiera $\partial\Omega$ convenientemente regolare. Si consideri lo spazio reale di Hilbert $S = L^2(\overline{\Omega}) \times L^2(\partial\Omega)$, si assegni un vettore $q = (q_1, q_2) \in S$ e si consideri l'equazione

$$(1) \qquad Eu = q \qquad (q \in S);$$

(*)Lavoro eseguito con parziale sostegno finanziario da parte del M.U.R.S.T.

nel nostro caso il problema al contorno

$$Eu = \begin{cases} E^{(1)}u = q_1 & \text{in} \quad \Omega\,, \\ E^{(2)}u = q_2 & \text{su} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2}$$

dove $E^{(1)}$ è un operatore differenziale lineare del secondo ordine uniformemente ellittico in un'aperto limitato Ω_0 contenente la chiusura $\overline{\Omega}$ di Ω, mentre la condizione al contorno è

$$E^{(2)}u = \frac{\partial u}{\partial \ell} + bu = q_2 \qquad \text{su} \quad \partial\Omega\,, \tag{3}$$

dove $\ell = \ell_x$ è un asse definito $\forall\ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \partial\Omega$ orientato e variabile con opportuna regolarità. (Per i richiami e la terminologia cfr. [13]).

Coi procedimenti classici, quando si affronta un problema al contorno, si cerca la soluzione u in un sottospazio lineare Y di $L^2(\overline{\Omega})$, utilizzando di solito un opportuno operatore lineare $T\colon S \longrightarrow Y$ tale che, se si pone la soluzione sotto la forma

$$u = Tz\,, \tag{4}$$

si pervenga ad un'equazione

$$ETz = q \tag{5}$$

alla quale si possa applicare la teoria di Fredholm; il teorema dell'alternativa, valido per la (5) e nel quale hanno un ruolo fondamentale le soluzioni dell'aggiunta omogenea

$$(ET)^*z = 0\,, \tag{6}$$

dovrebbe assicurare automaticamente la validità dell'alternativa fredholmiana per il dato problema, vale a dire la chiusura del codominio $E(Y)$ dell'operatore lineare $E\colon Y \longrightarrow S$. Va notato che, a questo punto, nei procedimenti classici viene avvertita l'esigenza di assicurare la legittimità, a priori, della posizione (4); in tal guisa, potendosi effettivamente dare ad ogni soluzione la forma (4), l'equazione (5) *tradurrà* senz'altro il problema in esame.

Ora è noto a tutti in che modo la menzionata esigenza abbia enormemente appesantito le trattazioni; basti pensare alle ricerche sulla *quasi funzione di Green* o sulla *parametrix* ([11], [10], [12], [2]) e all'ingegnosa costruzione della *soluzione fondamentale principale* che consente a Giraud di trattare i problemi al contorno regolari (con indice nullo) ([3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]). Cfr. pure [13, p. 49-96].

In [14] abbiamo osservato che l'esigenza di giustificare a priori la posizione (4) può essere del tutto ignorata: *il codominio $E(Y)$ è senz'altro chiuso se all'equazione (5) può essere applicata la teoria di Fredholm.*

Ad una siffatta equazione ci proponiamo di pervenire in questa Nota, affrontando il problema di derivata obliqua non regolare. Dopo di che rimarrà senz'altro acquisita la circostanza fondamentale: la chiusura del codominio $E(Y)$, assieme al fatto che le (eventuali) condizioni di compatibilità sono sempre in numero finito; l'ulteriore circostanza della teoria fredholmiana: che l'indice sia nullo, ovviamente vera per la (5), non avrà invece riscontro nei confronti del problema.

Si vedrà poi chiaramente in che modo l'assoluta libertà di scelta dell'operatore T (fatta salva la sola esigenza che la (5) sia fredholmiana) abbia un ruolo essenziale nell'effettiva possibilità di determinare tale operatore.

2 – Richiami preliminari

Richiamiamo quanto abbiamo osservato in [14]. Siano S uno spazio di Hilbert reale e separabile, Y un sottospazio lineare di uno spazio di Hilbert reale e separabile, $E\colon Y \longrightarrow S$ un operatore lineare. Utilizzando un assegnato operatore lineare e limitato $T\colon S \longrightarrow Y$, in certe condizioni che tosto preciseremo, abbiamo osservato che il codominio $E(Y)$ dell'operatore E risulta un sottospazio lineare *chiuso*, vale a dire che esiste una soluzione $u \in Y$ della (1) quando e solo quando si ha

$$(7) \qquad \langle q, w\rangle = 0 \qquad \forall\, w \in W,$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ designa il prodotto interno in S e

$$(8) \qquad W = \{w \in S\colon \langle Ev, w\rangle = 0 \qquad \forall\, v \in Y\}\,.$$

In maniera precisa:

L'operatore ET sia limitato ed inoltre:

A) *il codominio $ET(S)$ dell'operatore ET sia chiuso;*

B) *il nucleo W' dell'operatore aggiunto $(ET)^*$:*

$$W' = \{w' \in S : (ET)^* w' = 0\} \tag{9}$$

sia di dimensione finita r.

Esiste allora un sottospazio lineare Y' di Y tale che si abbia

$$E(Y) = ET(S) \oplus E(Y'), \qquad \dim E(Y') \leq r, \qquad W \subset W'. \tag{10}$$

Pertanto $E(Y)$ è chiuso. Inoltre, le (eventuali) condizioni di compatibilità (7) (linearmente indipendenti) sono in numero finito.

Per la dimostrazione (brevissima) ed altri particolari rinviamo a [14]. Vogliamo solo far notare che le condizioni A e B sono automaticamente verificate se la (5) è un'equazione per la quale è valida la teoria di Fredholm, equazione alla quale ci proponiamo di pervenire ritornando al problema (2) con la condizione (3). Dopo di che il codominio $E(Y)$ sarà senz'altro chiuso; aggiungasi che le (eventuali) condizioni di compatibilità (7) saranno in numero finito, e pertanto l'indice del problema sarà sempre ben determinato: positivo, negativo, nullo, ovvero $+\infty$ (quando non è finito). Per esempio, l'indice è nullo nel caso regolare, mentre è $+\infty$ quando sono costanti i coefficienti dell'operatore $E^{(1)}$ e la condizione al contorno è $\partial u/\partial x_1 = q_2$ su $\partial\Omega$ (in questo caso, infatti, sono soluzioni del problema omogeneo associato le infinite soluzioni u dell'equazione $E^{(1)}u = 0$ nelle sole variabili $x_2, \ldots, x_m$).

3 – L'equazione fredholmiana (5)

Facciamo vedere come si possa pervenire ad un'equazione (5) (nel nostro caso ad un sistema di due equazioni integrali che sia fredholmiano).

Cominciamo a supporre uguale ad 1 il determinante dei coefficienti a_{ih} dei termini del secondo ordine di $E^{(1)}$ in Ω_0, denotiamo con A_{ih} gli elementi della matrice inversa degli a_{ih} e poniamo

$$H(x,y) = \tau_m r^{2-m}, \quad r = \left[\sum_{i,h=1}^{m} A_{ih}(y)(x_i - y_i)(x_h - y_h)\right]^{1/2}, \tag{11}$$

con τ_m costante opportuna. Richiamiamo quindi le formule fondamentali sui potenziali di dominio e di doppio strato

$$(12) \quad E^{(1)}\int_{\Omega} H(x,y)z_1(y)dy = -z_1(x) + \int_{\Omega} E_x^{(1)} H(x,y)z_1(y)dy \quad (x \in \Omega),$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \lim_{x_0 \to x} \int_{\partial\Omega} a(y)\frac{\partial H(x_0,y)}{\partial \nu_y} z_2(y)d_y\sigma &= -\frac{1}{2}z_2(x) + \\ &+ \int_{\partial\Omega} a(y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial \nu_y} z_2(y)d_y\sigma \quad (x_0 \in \Omega, x \in \partial\Omega), \end{aligned}$$

dove $\nu = \nu_x$ è la conormale esterna (nel punto $x \in \partial\Omega$) rispetto all'operatore $E^{(1)}$ ed a è una nota funzione, sempre positiva, che interviene nelle relazioni tra i coseni direttori della conormale e quelli della normale. Le condizioni di regolarità (sulle quali qui, anche per brevità, non ci soffermiamo) devono consentire di poter disporre localmente, nelle vicinanze di $\partial\Omega$, di opportuni cambiamenti di variabili che rendano il nuovo asse obliquo parallelo ad un determinato asse del nuovo riferimento (locale); si potranno allora ravvisare certe ipersfere aperte m-dimensionali $I_j (j = 1, \dots, s)$, tutte contenute in Ω_0, coi centri su $\partial\Omega$, tali che per ogni j si possa considerare un cambiamento di variabili Φ_j in maniera che, mantenendo (per semplicità) le notazioni di prima per le variabili e per gli assi ℓ e ν, risulti (nel nuovo sistema di riferimento)

$$(14) \qquad \partial/\partial\ell = \partial/\partial x_1 \quad \text{in } I'_j$$

dove I'_j è il trasformato di I_j; inoltre

$$(15) \qquad \partial\Omega \subset \bigcup_j I_j .$$

Non si manchi di notare che Φ_j muta la conormale ν nella conormale rispetto all'operatore E'_j trasformato (localmente) di $E^{(1)}$. Inoltre il rapporto $\overline{xy}/\overline{x'y'}$ tra la distanza di due punti e quella dei trasformati, nonché il rapporto inverso $\overline{x'y'}/\overline{xy}$, si mantengono limitati (a causa della regolarità di Φ_j); le singolarità non vengono pertanto alterate dalla trasformazione Φ_j, né dalla trasformazione inversa Φ_j^{-1}.

Sempre nel nuovo riferimento, supponiamo di poter disporre in I_j' di una funzione $K_j(x,y)$ tale che si abbia

$$\partial K_j(x,y)/\partial x_1 = H_j(x,y) \qquad (x \in I_j', y \in I_j') \tag{16}$$

e quindi

$$\partial^2 K_j(x,y)/\partial x_1 \partial \nu_y = \partial H_j(x,y)/\partial \nu_y \quad (x \in I_j', y \in I_j'), \tag{17}$$

dove H_j è la funzione H definita in (11), ma relativa all'operatore trasformato E_j' (e pure relativa a E_j' è la conormale ν). La trasformazione Φ_j^{-1} (inversa di Φ_j), mentre riporta E_j' in $E^{(1)}$, muta K_j in una funzione che denotiamo con K_j'; riporta pure x_1 nell'asse ℓ (inizialmente assegnato) e, soprattutto, riproduce in $\partial^2 K_j'/\partial \ell_x \partial \nu_y$ le stesse singolarità di $\partial H_j/\partial \nu_y$. Ne segue, in forza della (13) e ponendo $K_j' = 0$ per x o per y fuori di I_j,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K_j'(x,y)}{\partial \nu_y} z_2(y) d_y\sigma &= c_j(x) z_2(x) + \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 K_j'(x,y)}{\partial \ell_x \partial \nu_y} z_2(y) d_y \sigma \quad &\text{su} \quad \partial\Omega \cap I_j , \end{aligned} \tag{18}$$

con c_j funzione mai nulla, anzi tale che si abbia

$$|c_j(x)| \geq c_0 = \text{cost} > 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega \cap I_j . \tag{19}$$

Inoltre, ricordando il comportamento sulla frontiera di $\partial H/\partial \nu$,

$$\partial^2 K_j'(x,y)/\partial \ell_x \partial \nu_y = O\left(\overline{xy}^{\,2-m}\right) \quad (x \in \partial\Omega, y \in \partial\Omega), \tag{20}$$

dove O è il simbolo di Landau.

Prolunghiamo opportunamente in Ω_0 la funzione c_j in maniera da risultare

$$|c_j(x)| \geq c = \text{cost} > 0 \quad \text{in} \quad \Omega_0 , \tag{21}$$

consideriamo una funzione α_j positiva in I_j e nulla, assieme alle sue derivate dei primi tre ordini, fuori di I_j ed osserviamo che la (15) fornisce

$$\sum_j \alpha_j^2(x) \geq \alpha_0 = \text{cost} > 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega; \tag{22}$$

poniamo quindi

$$\gamma(x) = \sum_j c_j^2(x)\alpha_j^2(x), \tag{23}$$

sicché, a causa delle (21) e (22),

$$\gamma(x) \geq c^2\alpha_0 = \text{cost} > 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega. \tag{24}$$

Posto infine

$$K'(x,y) = \frac{1}{\gamma(x)}\sum_j c_j(x)\alpha_j(x)\frac{\partial K_j'(x,y)}{\partial \nu_y}\alpha_j(y), \tag{25}$$

la (18) fornisce

$$\begin{aligned} E^{(2)}\int_{\partial\Omega} K'(x,y)z_2(y)d_y\sigma &= z_2(x)+ \\ &+\int_{\partial\Omega} E_x^{(2)}K'(x,y)z_2(y)d_y\sigma \quad (x \in \partial\Omega). \end{aligned} \tag{26}$$

In questa formula gli iterati sulla frontiera di $E_x^{(2)}K'(x,y)$ sono funzioni continue da un certo posto in poi, in virtù della (20); questa circostanza, e la circostanza analoga relativa agli iterati in Ω_0 di $E_x^{(1)}H(x,y)$, legata all'altra formula fondamentale (12), in casi consimili (e la letteratura classica ne è ricca) hanno costituito il punto di partenza per potere pervenire ad un sistema di equazioni integrali di Fredholm. Un procedimento che si aggancia ad una tecnica riportata in [13, p.54-58] potrebbe essere questo: da un certo posto μ in poi, gli iterati

$$\begin{cases} K^{(0)}(x,y) = E_x^{(1)}H(x,y) \\ K^{(n)}(x,y) = \displaystyle\int_{\Omega_0} K^{(0)}(x,t)K^{(n-1)}(t,y)dt \quad (n > 1) \end{cases} \tag{27}$$

sono funzioni continue. Poniamo allora

$$L(x,y) = H(x,y) + \sum_{n=0}^{\mu-1} \int_{\Omega_0} H(x,t) K^{(n)}(t,y)dt\,, \tag{28}$$

sicchè

$$E_x^{(1)} L(x,y) = K^{(\mu)}(x,y) \quad (x \in \Omega_0, y \in \Omega_0)\,. \tag{29}$$

Ed il naturale suggerimento è di porre la soluzione u del problema sotto la forma

$$\begin{aligned} u = Tz = &- \int_{\Omega} L(x,y) \left[z_1(y) - \int_{\partial\Omega} E_y^{(1)} K'(y,t) z_2(t) d_t\sigma \right] dy + \\ &+ \int_{\partial\Omega} K'(x,y) z_2(y) d_y\sigma\,. \end{aligned} \tag{30}$$

4 – La funzione K_j

Resta da trovare una funzione K_j che verifichi la (16).

Supponiamo senz'altro, per non introdurre nuove notazioni, che H_j sia la funzione (11) (dove, ricordiamolo, $A_{hh} > 0$, $A_{ih} = A_{hi}$).

Trascuriamo la costante moltiplicativa τ_m e consideriamo il primo caso: $m = 3$. Una particolare funzione K che verifichi la condizione

$$\partial K / \partial x_1 = r^{-1} \tag{31}$$

è questa

$$\frac{1}{\sqrt{A_{11}(y)}} \log \left[r\sqrt{A_{11}(y)} + \sum_{h=1}^{3} A_{1h}(y)(x_h - y_h) \right] \tag{32}$$

(mentre ogni altra si ottiene aggiungendo un'arbitraria funzione di x_2, x_3, y_1, y_2, y_3). Analogamente, sempre in maniera elementare, per $m = 4$, $m = 5, \ldots$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FICHERA: *La soluzione fondamentale principale per un'equazione differenziale ellittica di ordine superiore*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Romaine, 6, 1962, 139-149.

[2] M. GEVREY: *Détermination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique*, J. Math. pures appl., 9, 1930, 1-80.

[3] G. GIRAUD: *Sur le problème de Dirichlet généralisé (deuxième mémoire)*, Ann. Éc. N. Sup., 46, 1929, 131-245.

[4] G. GIRAUD: *Sur différentes questions relatives aux équations du type elliptique*, Ann. Éc. N. Sup., 47, 1930, 197-266.

[5] G. GIRAUD: *Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes*, Ann. Éc. N. Sup., 49,1932, 1-104 et 245-308.

[6] G. GIRAUD: *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*, Bull. Sci. Math., 56, 1932, 248-272.

[7] G. GIRAUD: *Équations à intégrales principales. Étude suivie d'une application*, Ann. Éc. N. Sup., 51, 1934, 251-372.

[8] G. GIRAUD: *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque*, Ann. Éc. N. Sup., 53, 1936, 1-40.

[9] G. GIRAUD: *Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique*, J. Math. pures appl. 1939, 111-143.

[10] D. HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 2 Auflage Teubner Leipzig (1924).

[11] E.E. LEVI: *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Mem. Soc. Ital. dei XL, 16, 1910, 1-112.

[12] L. LICHTENSTEIN: *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom ellyptischen Typus*, Encykl. Math. Wiss. Bd. II, 3 Heft. 8, 1924, 1277-1334.

[13] C. MIRANDA: *Partial differential equations of elliptic type*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[14] M. PETTINEO: *Un'osservazione per trattare taluni problemi al contorno relativi ad equazioni differenziali lineari*, Rend. Mat. Appl. Roma, 6, 1986, 423-433.

Lavoro pervenuto alla redazione il 1° settembre 1990
ed accettato per la pubblicazione il 26 ottobre 1990
su parere favorevole di A. Ghizzetti e di P.E. Ricci

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Maria Pettineo - Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università - Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo - Italia