Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11 , Roma (1991), 673-689

Approximants de Padé "Homogènes" et Polynômes Orthogonaux à Deux Variables

B. BENOUAHMANE

RIASSUNTO – *Vengono costruite le approssimanti di tipo-Padé "omogenee" in due variabili scegliendo un arbitario polinomio come generatore dell'approssimante. Viene mostrata l'esistenza di una naturale connessione, come nel caso delle funzioni di una variabile, tra la teoria dei polinomi ortogonali e le approssimanti di Padé "omogenee" in due variabili, imponendo delle condizioni supplementari ai polinomi generatori.*

ABSTRACT – *We construct homogeneous Padé-type approximants in two variables, choosing an arbitrary polynomial as the generating one of the approximant. The existence of a natural connection is shown, as the case of one variable, between the theory of orthogonal polynomials and homogenous Padé approximants in two variables with setting supplementary conditions in the generating polynomials.*

KEY WORDS – *Formal series in two variables - Padé-type "homogeneouos" approximation in two variables - Orthogonality conditions - "Homogeneous" Padé approximation in two variables - Three-terms recurrence relations.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 33A65 - 41A21 - 42C05

1 – Introduction

Soit une série formelle $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Soit c la fonctionnelle linéaire définie sur l'espace vectoriel des polynômes à une variable par:

$$c(x^n) = c_n\,, \quad n \geq 0$$

Soit V un polynôme arbitraire de degré m.
L'approximant de type-Padé $(m-1/m)_f$ dont le polynôme générateur est V, est donné [2] par:

$$(m-1/m)_f = \frac{\widetilde{W}(t)}{\widetilde{V}(t)}$$

avec

$$\widetilde{V}(t) = t^m V(t^{-1})$$

$$W(t) = c\left(\frac{V(x)-V(t)}{x-t}\right)$$

où la fonctionnelle c agit seulement sur la variable x.

$$\widetilde{W}(t) = t^{m-1} W(t^{-1})$$

et on a alors la propriété d'approximation

$$f(t) - (m-1/m)_f(t) = \frac{t^m}{\widetilde{V}(t)} c\left(\frac{V(x)}{1-xt}\right)$$

Si $V = P_m$ où P_m est le polynôme de degré m de la famille des polynômes orthogonaux par rapport à c, c'est-à-dire tels que: $\deg P_m = m$ et $c(x^i P_m(x)) = 0$, pour tout i tel que: $0 \leq i \leq m-1$, alors

$$f(t) - (m-1/m)_f(t) = \frac{t^{2m}}{\widetilde{V}(t)} c\left(\frac{x^m V(x)}{1-xt}\right) = O(t^{2m})$$

Dans ce cas l'approximation est optimale et $(m-1/m)_f$ coïncide avec l'approximant de Padé $[m-1/m]_f$. (Voir [2]).

Le but de cet article est de construire les approximants de type-Padé "homogènes" à deux variables en choisissant un polynôme arbitraire comme polynôme générateur de l'approximant, et de relier ensuite d'une façon naturelle, comme c'est le cas d'une variable, la théorie des polynômes orthogonaux aux approximants de Padé "homogènes" à deux variables.

2 – Construction

Soit P l'espace vectoriel des polynômes à deux variables sur $\mathbf{C}$. Soit f une série formelle à deux variables.

$$f(t,s)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}c_{p-q,q}t^{p-q}s^{q}\,,\quad c_{p-q;q}\in\mathbf{C}$$

et c la fonctionnelle linéaire définie sur P par:

$$c\left(x^{p-q}y^{q}\right)=c_{p-q;q}/\binom{p}{q}\,,\quad 0\leq q\leq p\qquad p\geq 0$$

où $\binom{p}{q}=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$
On vérifie facilement le lemme suivant:

LEMME 2.1.
$$f(t,s)=c\left(\frac{1}{1-xt-ys}\right)$$
où c agit uniquement sur les variables x et y.

On considère un polynôme "homogène" arbitraire de degré $nm+m$ de la forme:
$$V_{n;m}(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\zeta_{nm+m-i}(y)x^{i}$$

où $\zeta_{nm+m-i}(y)$, $0\leq i\leq m$ sont des polynômes arbitraires d'une variable tels que: $\deg\zeta_{nm+m-i}=nm+m-i$

Pour chaque $V_{n;m}(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{nm+m-i}a_{nm+m-i-j;j}y^{j}\right)x^{i}$, on définit $W(t,s)$ [1] par:
$$W(t,s)=c\left(\frac{V_{n;m}(t,s)-V_{n;m}(x+ys,s)}{t-(x+ys)}\right)$$

LEMME 2.2. *$W(t,s)$ est un polynôme de degré $nm+m-1$ qui s'écrit:*

$$W(t,s)=\sum_{N=nm}^{nm+m-1}\sum_{M=0}^{N}d_{N-M;M}t^{N-M}s^{M}$$

avec

$$d_{N-M;M} = \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \cdot c_{N-i-(M-j);M-j}$$

DÉMONSTRATION.

$$V_{n;m}(t,s) - V_{n;m}(x+ys,s) = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{nm+m-i} a_{nm+m-i-j;j} s^j \right) (t^i - (x+ys)^i)$$

en divisant par $t-(x+ys)$ et en appliquant c aux deux membres. On obtient:

$$W(t,s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{nm+m-i} \sum_{p=0}^{i-1} \sum_{q=0}^{p} a_{nm+m-i-j;j} c_{p-q;q} t^{i-1-p} s^{j+q}$$

En posant: $I = nm + m - i$ on obtient:

$$W(t,s) = \sum_{I=nm}^{nm+m-i} \sum_{j=0}^{I} \sum_{p=0}^{nm+m-1-I} \sum_{q=0}^{p} a_{I-j;j} c_{p-q;q} t^{nm+m-1-I-p} s^{j+q}$$

d'où le résultat en faisant le changement de variable: $N = I + p \quad M = j + q$ et avec la convention que tous les $c_{i;j}$ avec i ou j strictement négatif sont nuls. $\square$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctionnelles linéarires $c^{(n-i;i)} (i = 0, \ldots, n)$ et $c^{(0;-n+1)}$ par:

$$c^{(n-i;i)}\left(x^{p-q}y^q\right) = \binom{n}{i} c\left(x^{p+n-(i+q)} y^{i+q}\right), \quad 0 \le i \le n$$

et

$$c^{(0;-n+1)}\left(x^{p-q}y^q\right) = \begin{cases} \dfrac{\binom{p-q+1}{q-n+1}}{\binom{p}{q}} c\left(x^{p-q}y^{q-n+1}\right) & \text{si} \quad q-n+1 \ge 0 \\ 0 & \text{si} \quad q-n+1 < 0 \end{cases}$$

On pose:

$$\widetilde{W}_{n;m}(t,s) = \widetilde{V}_{n;m}(t,s)\cdot \sum_{p=0}^{n-m} c((xt+ys)^p) + \\ + \sum_{i=0}^{n-m+1} t^{n-m+1-i}s^i \widetilde{W}^{(n-m+1-i,i)}(t,s)$$

avec

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s) = t^{nm+m} V_{n;m}\left(t^{-1}, t^{-1}s\right)$$

$$W^{(n-m+1-i;i)}(t,s) = c^{(n-m+1-i;i)}\left(\frac{V_{n;m}(t,s) - V_{n;m}(x+ys,s)}{t-(x+ys)}\right)$$

$$\widetilde{W}^{(n-m+1-i;i)}(t,s) = t^{nm+m-1} W^{(n-m+1-i;i)}\left(t^{-1}, t^{-1}s\right)$$

avec la convention que $\sum_{p=0}^{n-m} c((xt+ys)^p) \equiv 0$, si $n-m<0$ et $c^{(n-m+1-i;i)}$ identiquement nul si $n-m+1<0$ et $i \neq n-m+1$. $\dfrac{\widetilde{W}_{n;m}(t,s)}{\widetilde{V}_{n;m}(t,s)}$ est une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont de degrés respectifs $nm+n$ et $nm+m$ et dont le développement en série par rapport à t et s coïncide avec celui de $f(t,s)$ jusqu'à l'ordre $nm+n$ compris, soit: $\sum_{p=0}^{nm+n} c((xt+ys)^p)$.
On la note: $(n/m)_f(t,s)$.
On a alors,

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s)\cdot f(t,s) - \widetilde{W}_{n;m}(t,s) = O\left(t^{nm+n+1}\right) \qquad \text{(voir [1])}$$

Avec la convention que pour tout T, $c[(x+yT)^N] = 0$ pour $N<0$, on a le lemme suivant:

LEMME 2.3.

$$\sum_{M=0}^{N} d_{N-M;M}\, t^{N-M} s^M = t^N c\left[\left(x+yt^{-1}s\right)^{N-(nm+m)} \cdot V_{n;m}\left(x+yt^{-1}s, t^{-1}s\right)\right]$$

avec

$$d_{N-M;M} = \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \cdot c_{N-i-(M-j);M-j}$$

DÉMONSTRATION.

$$t^N c\left[\left(x+yt^{-1}s\right)^{N-(nm+m)} \cdot V_{n;m}\left(x+yt^{-1}s, t^{-1}s\right)\right] =$$

$$= t^N \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} c\left(\left(x+yt^{-1}s\right)^{N-i}\right)\left(t^{-1}s\right)^j =$$

$$= \sum_{i=nm}^{\min(N,nm+m)} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \sum_{l=0}^{N-i} c\left(\binom{N-i}{l} x^{N-i-l} y^l\right) t^{N-j-l} s^{j+l}$$

On pose: $j+l=M$. L'expression précèdente devient:

$$\sum_{i=nm}^{\min(N,nm+m)} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \sum_{M=j}^{N-i-j} c\left(\binom{N-i}{M-j} x^{N-i-(M-j)} y^{M-j}\right) t^{N-M} s^M .$$

Avec la convention: $c_{ij}=0$ si $i<0$ ou $j<0$, l'égalité devient:

$$t^N c\left[\left(x+yt^{-1}s\right)^{N-(nm+m)} \cdot V_{n;m}\left(x+yt^{-1}s, t^{-1}s\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \sum_{M=0}^{N} c_{N-i-(M-j);M-j} t^{N-M} s^M$$

D'où le résultat.

On a alors le théorème suivant qui est essentiel pour la suite.

THÉORÈME 1.1.

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s) \cdot f(t,s) - \widetilde{W}_{n;m}(t,s) =$$

$$= t^{nm+m+1} c\left[\frac{\left(x+yt^{-1}s\right)^{n+1-m} \cdot V_{n;m}\left(x+yt^{-1}s, t^{-1}s\right)}{1-xt-ys}\right]$$

DÉMONSTRATION.

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s) = \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} t^{i-j} s^j$$

et

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s) \cdot f(t,s) = \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_{i-j;j} \cdot c_{k-l;l} t^{(i+k)-(j+l)} s^{j+l}$$

En faisant le changement de variable $i+k=N$ et $j+l=M$, on obtient:

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s) \cdot f(t,s) = \sum_{N=nm}^{\infty} \sum_{M=0}^{N} \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \cdot c_{N-i-(M-j);M-j} t^{N-M} s^M$$

D'autre part la série $f(t,s)$ admet un seul approximant de type-Padé $(n/m)_f$ ayant pour dénominateur $\widetilde{V}_{n;m}(t,s)$.
Ainsi on obtient:

$$\widetilde{V}_{n;m}(t,s) \cdot f(t,s) = \sum_{N=nm}^{\infty} \sum_{M=0}^{N} d_{N-M;M} t^{N-M} s^M$$

$$\widetilde{W}_{n;m}(t,s) = \sum_{N=nm}^{nm+n} \sum_{M=0}^{N} d_{N-M;M} t^{N-M} s^M$$

avec

$$d_{N-M;M} = \sum_{i=nm}^{nm+m} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j;j} \cdot c_{N-i-(M-j);M-j}$$

et finalement il suffit d'utiliser le lemme 2.3 pour conclure. $\square$

Le polynôme $V_{n;m}$ dépend de $nm(m+1)+m(m+3)/2$ constantes arbitraires.
Puisque $(n/m)_f$ reste invariant par multiplication de $V_{n;m}$ par un scalaire non nul, l'approximant dépend donc de $nm(m+1)+(m(m+3)/2)-1$ constantes arbitraires.

Certaines de ces constantes peuvent être déterminées en imposant à $V_{n;m}$ les conditions d'orthogonalité suivantes:

$$c\left[(x+yt^{-1}s)^{n+1-m+N} \cdot V_{n;m}\left(x+yt^{-1}s, t^{-1}s\right)\right] = 0 \quad \forall t \neq 0,\ \forall s$$

Pour $N = 0, \ldots, l-1 \leq m-1$
Les constantes restantes sont fixées d'une manière arbitraire.
Par construction on a:

$$f(t,s) - (n/m)_f(t,s) =$$

$$= \frac{t^{nm+m+1+l}}{\widetilde{V}_{n;m}(t,s)} c \left[\frac{(x+yt^{-1}s)^{n+1-m+l} \cdot V_{n;m}(x+yt^{-1}s, t^{-1}s)}{1-xt-ys} \right] =$$

$$=0\left(t^{nm+n+1+l}\right)$$

Lorsque $l = m$, $V_{n;m}$ est entièrement déterminé par les conditions d'orthogonalité, puisque les coefficients $a_{i;j}$ sont obtenus comme solution d'un système linéaire de $nm(m+1) + (m(m+3)/2) - 1$ équations et $nm(m+1) + (m(m+3)/2)$ inconnues.

Dans ce cas l'approximant est optimale et $(n/m)_f$ coïncide avec l'approximant de Padé "homogène" $[n/m]_f$.
On choisira donc $V_{n;m}$ tel que:

$$c\left[(x+yt^{-1}s)^{n+1-m+N} \cdot V_{n;m}\left(x+yt^{-1}s, t^{-1}s\right)\right] = 0 \quad \forall t \neq 0, \forall s$$

Pour $N = 0, \ldots, m-1$
Si on pose: $v = t^{-1}s$, $u = x + yv$, alors on voit que l'on se ramène à des conditions sur une variable.
Notations:

F: l'ensemble des fractions rationnelles

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \zeta_i(v)u^i \, , \, \zeta_i(v) \in F \, , \, n \geq 0 \right\}$$

3 – Polynômes orthogonaux

DÉFINITION 3.1. *On commence par définir une fonctionnelle linéaire* Γ *sur* Π *par:*

$$\Gamma(u^p) = \sum_{q=0}^{p} c_{p-q;q} v^q \, , \quad p \in \mathbb{N}$$

Les conditions d'orthogonalité se traduisent ici par:

$$\Gamma^{(n+1-m)}\left(u^i V_{n;m}(u,v)\right) = 0\,, \quad \forall v$$

Pour $i = 0, \ldots, m-1$
où la fonctionnelle $\Gamma^{(n+1-m)}$ *n'agit que sur la variable* u *et est définie par:*

$$\Gamma^{(l)}(u^i) = \Gamma\left(u^{l+i}\right) = \sum_{j=0}^{l+i} c_{l+i-j;j} v^j$$

REMARQUE: On voit que le problème d'approximation de Padé "homogène" à deux variables se formule comme un problème d'approximation de Padé à une variable, sauf que les coefficients dépendent ici du paramètre v.

On cherche les polynômes $V_{n;m}$, $n+1-m \geq 0$ de la forme:

$$V_{n;m}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \zeta_{nm+m-i}(v) u^i$$

où ζ_{nm+m-i}, $0 \leq i \leq nm+m$ est un polynôme en v de degré $nm+m$, tels que les $V_{n;m}$ soient orthogonaux par rapport à la fonctionnelle $\Gamma^{(n+1-m)}$, c'est-à-dire tels que: $V_{n;m}$ soit exactement de degré m en u et

$$\Gamma^{(n+1-m)}\left(u^N V_{n;m}(u,v)\right) = 0\,, \quad \forall v$$

pour $N = 0, \ldots, m-1$
Si on écrit $\zeta_{nm+m-i}(v) = \sum_{j=0}^{nm+m-i} a_{nm+m-i-j;j} v^j$, on obtient le système linéaire suivant:

$$\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{nm+m-i} a_{nm+m-i-j;j} v^j \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i+N} a_{i+N-l;l} v^l \right) = 0\,, \forall\, v$$

Pour $N = 0, \ldots, m-1$

On note $C_{i;j}$ la matrice suivante de taille $(i+j+1)\times(j+1)$

$$C_{i;j}=\begin{pmatrix} c_{i;0} & & \\ c_{i-1;1} & \cdot & \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\ \cdot & \cdot & c_{i;0} \\ c_{0;i} & & c_{i-1;1} \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & c_{0;i} \end{pmatrix}$$

On note A_i le vecteur de $\mathbb{C}$:

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{i;0} \\ a_{i-1;1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{0;i} \end{pmatrix}$$

On obtient alors les coefficients $(a_{i-j;j})$, $0\leq j\leq i\quad nm\leq i\leq nm+m$ comme solution du système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} C_{m;nm} & C_{m-1;nm+1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & C_{0;nm+m} \\ C_{m+1;nm} & C_{m;nm+1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & C_{1;nm+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ C_{2m-1;nm} & C_{2m-2;nm+1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & C_{m-1;nm+m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{nm} \\ A_{nm+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{nm+m} \end{pmatrix}=0$$

Il faut maintenant chercher des conditions pour que ce système linéaire ait une solution.

4 – Existence des polynômes orthogonaux-déterminants polynômiaux de Hankel

DÉFINITION 4.1. *On appelle déterminants polynômiaux de Hankel, les déterminants définis par:*

$$H_0^{(n)}[c_n(v)] = 1\,, \quad n \geq 0$$

$$H_k^{(n)}[c_n(v)] = \begin{vmatrix} c_n(v) & c_{n+1}(v) & \cdots & c_{n+k-1}(v) \\ c_{n+1}(v) & c_{n+2}(v) & \cdots & c_{n+k}(v) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n+k-1}(v) & c_{n+k}(v) & \cdots & c_{n+2k-2}(v) \end{vmatrix}, \; n \geq 0 \quad k \geq 1$$

où $c_i(v) = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j;j}\, v^j$

On a: $\deg H_k^{(n)}[c_n(v)] = (n+k-1)\cdot k$

Examinons maintenant le choix de $\zeta_{nm}(v)$.
Puisqu'il faut que $V_{n;m}$ soit exactement de degré m en u, un choix serait de prendre

$$\zeta_{nm}(v) = H_m^{(n+1-m)}[c_{n+1-m}(v)]$$

et de supposer que $H_m^{(n+1-m)}[c_{n+1-m}(0)]$ est différent de zéro.

L'intêret de ce choix est que, non seulement on sait calculer les déterminants polynômiaux de Hankel par un algorithme classique, mais on peut retrouver tous les résultats démontrés pour le problème d'approximation de Padé à une variable dès que $v = 0$.

Le théorère suivant est fondamental pour la suite.

THÉORÈME 4.1. (d'unicité) *Soit* $V_m \in P$ *où* m *est son degré en* u. *Si* $H_{m+1}^{(n)}[c_n(v)] \neq 0$ *et si* V_m *vérifie:* $\Gamma^{(n)}(u^i V_m(u,v)) = 0,\ 0 \leq i \leq m,$ *alors* $V_m = 0$.

DÉMONSTRATION.

On écrit: $V_m(u,v) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{n_j} a_p^{(j)} v^p \right) u^j \,, \quad n_j \in \mathbb{N}$

On a: $\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{n_j} a_p^{(j)} v^p \right) \left(\sum_{q=0}^{n+i+j} c_{n+i+j-q;q} v^q \right) = 0 \,, \forall v \,, \, 0 \leq i \leq m$

On pose: $N = \max(n_j, 0 \leq j \leq m)$

$$E_l = \begin{pmatrix} a_l^{(0)} \\ a_l^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_l^{(m)} \end{pmatrix} , \; 0 \leq l \leq N$$

avec

$$a_l^{(j)} = 0 \,, \; n_j < l \leq N \quad 0 \leq j \leq m$$

Avec cette notation, le système linéaire à résoudre se réécrit comme $N+1$ systèmes linéaires de même matrice:

$$\begin{pmatrix} c_{n;0} & c_{n+1;0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+m;0} \\ c_{n+1;0} & c_{n+2;0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+m+1;0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+m;0} & c_{n+m+1;0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+2m;0} \end{pmatrix} \cdot E_j =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ L_j & \text{pour tout } j \text{ tel que: } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

avec le second membre L_j qui s'écrit comme combinaison linéaire matricielle de $E_0, E_1, \ldots, E_{j-1}$.

La matrice de ces systèmes linéaires est une matrice de Hankel dont le déterminant $H_{m+1}^{(n)}[c_n(0)]$ est non nul par hypothèse.

Le premier système linéaire étant homogène, notre résultat est démontré immédiatement.

THÉORÈME 4.2. *Avec le choix précédent, si* $H_m^{(n+1-m)}[c_{n+1-m}(0)] \neq 0$, *alors* $V_{n;m}$, *vérifiant les conditions d'orthogonalité, existe et est unique.*

DÉMONSTRATION.

.$V_{n;m}$, s'il existe, est unique d'après le théorème précèdent

.$V_{n;m}$ s'exprime sous forme du déterminant suivant:

$$V_{n;m}(u,v) = \begin{vmatrix} c_{n+1-m}(v) & c_{n+2-m}(v) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+1}(v) \\ c_{n+2-m}(v) & c_{n+3-m}(v) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+2}(v) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n(v) & c_{n+1}(v) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+m}(v) \\ 1 & u & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u^m \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un polynôme qui peut s'écrire sous la forme:

$$\sum_{i=0}^{m} \zeta_{nm+m-i}(v)u^i$$

où $\zeta_{nm+m-i}(v)$, $0 \leq i \leq nm+m$ est un polynôme de degré $nm+m-i$ et $\zeta_{nm}(v) = H_m^{(n+1-m)}[c_{n+1-m}(v)]$.

D'autre part, en multipliant $V_{n,m}$ par u^i et en appliquant la fonctionnelle $\Gamma^{(n+1-m)}$, deux lignes du déterminant obtenu sont identiques pour $i = 0, \ldots, m-1$.

D'où le résultat annoncé.

On voit immédiatement que $\Gamma^{(n+1-m)}(u^m V_{n;m}) = H_{m+1}^{(n+1-m)}[c_{n+1-m}(v)]$. Par combinaison linéaire des relations d'orthogonalité, on obtient:

$$\Gamma^{(n+1)}(V_{n+m;m}V_{n+m';m'}) = 0\,, \quad \forall m \neq m' \quad n+1 \geq 0$$

On note:

$$F_n = \{V_{n+m;m}\,,\ m \geq 0\} \quad n \geq -1$$

On va montrer que F_n vérifie une relation de récurrence à troix termes.

Pour $n \geq -1$ fixé, on suppose dans toute la suite que $H_{m+1}^{(n+1)}[c_{n+1}(v)] \neq 0 \, \forall m$.
On dit alors que $\Gamma^{(n+1)}$ est défini.

5 - Relation de récurrence

On montre d'abord que les polynômes $V_{n+m;n}$, $m \geq 0$ sont linéairement indépendants.

THÉORÈME 5.1. *Si $\Gamma^{(n+1)}$ est défini, alors $V_{n+m;m}$, $m \geq 0$ sont linéairement indépendants.*

DÉMONSTRATION. On suppose qu'il existe $\zeta_0(v), \zeta_1(v), \ldots$ tels que:

$$\zeta_0(v)V_{n;0}(u,v) + \zeta_1(v)V_{n+1;1}(u,v) + \ldots = 0 \, \forall u, \quad \forall v$$

alors $\forall k \geq 0$ on a:

$$\begin{aligned}&\zeta_0(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n;0}) + \zeta_1(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n+1;1}) + \ldots \\ &+\zeta_k(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n+k;k}) + \zeta_{k+1}(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n+k+1;k+1}) \ldots = 0\end{aligned}$$

D'après les relations d'orthogonalité on a:

$$\zeta_0(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n;0}) + \zeta_1(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n+1;1}) + \ldots + \zeta_k(v)\Gamma^{(n+1)}(u^k V_{n+k;k}) = 0$$

Si $k = 0$, alors $\zeta_0(v)\Gamma^{(n+1)}(V_{n;0}) = 0$. Cela implique: $\zeta_0(v) = 0$ puisque $\Gamma^{(n+1)}(V_{n;0}) \neq 0$.
Si $k = 1$, alors $\zeta_0(v)\Gamma^{(n+1)}(uV_{n;0}) + \zeta_1(v)\Gamma^{(n+1)}(uV_{n+1;1}) = 0$, $\zeta_0(v) = 0$ et $\Gamma^{(n+1)}(uV_{n+1;1}) \neq 0$ puisque $\Gamma^{(n+1)}$ est défini, donc $\zeta_1(v) = 0$.
Faire la démonstration par récurrence.

THÉORÈME 5.2. *La suite $\{V_{n+m;m}\}_{m\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante:*

$$\begin{aligned}V_{n+m+1;m+1}(u,v) = &\alpha_{m+1}^{(n+1)}(v) \cdot \Big[\Big(u - \beta_{m+1}^{(n+1)}(v)\Big) \cdot V_{n+m;m}(u,v) \\ &- \gamma_{m+1}^{(n+1)}(v) \cdot V_{n+m-1;m-1}(u,v)\Big] \qquad m \geq 0\end{aligned}$$

avec

$$\alpha_{m+1}^{(n+1)}(v) = \gamma_{m+1}^{(n+1)}(v) = \frac{H_{m+1}^{(n+1)}[c_{n+1}(v)]}{H_m^{(n+1)}[c_{n+1}(v)]}$$

$$\beta_{m+1}^{(n+1)}(v) = \frac{\Gamma^{(n+1)}\left(u \cdot V_{n+m;m}^2(u,v)\right)}{\Gamma^{(n+1)}\left(V_{n+m;m}^2(u,v)\right)}$$

et les conditions initiales:

$$V_{n-1;-1}(u,v) = 0 \qquad V_{n;0}(u,v) = 1$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème précèdent, le polynôme $u \cdot V_{n+m;m}(u,v)$ s'exprime de façon unique en fonction de $V_{n+i;i}(u,v)$, $0 \leq i \leq m+1$

$$uV_{n+m;m}(u,v) = \sum_{j=0}^{m+1} \eta_j^{(n+1)}(v) \cdot V_{n+j;j}(u,v), \quad \eta_j^{(n+1)} \in F$$

En multipliant par $V_{n+i;i}$ et en appliquant $\Gamma^{(n+1)}$ aux deux membres de cette égalité, on obtient:

$$\Gamma^{(n+1)}\left(uV_{n+i;i} \cdot V_{n+m;m}\right) = \sum_{j=0}^{m+1} \eta_j^{(n+1)}(v) \cdot \Gamma^{(n+1)}\left(V_{n+i;i}(u,v)V_{n+j;j}(u,v)\right)$$

Pour $i = 0, \ldots, m-2$ on a: $\Gamma^{(n+1)}\left(V_{n+i;i}(u,v)V_{n+m;m}(u,v)\right) = 0$
On obtient du fait des conditions d'orthogonalité:

$$\eta_j^{(n+1)}(v) = 0, \quad \forall v \quad 0 \leq j \leq m-2$$

Lorsque $i = m-1$ on obtient:

$$\eta_{m-1}^{(n+1)}(v) = \frac{\Gamma^{(n+1)}\left(uV_{n+m-1;m-1} \cdot V_{n+m;m}\right)}{\Gamma^{(n+1)}\left(V_{n+m-1;m-1}^2(u,v)\right)}$$

Lorsque $i = m$ on obtient:

$$\eta_m^{(n+1)}(v) = \frac{\Gamma^{(n+1)}\left(uV_{n+m;m}^2(u,v)\right)}{\Gamma^{(n+1)}\left(V_{n+m;m}^2(u,v)\right)}$$

Lorsque $i = m + 1$ on obtient:

$$\eta_{m+1}^{(n+1)}(v) = \frac{\Gamma^{(n+1)}\left(uV_{n+m-1;m-1} \cdot V_{n+m+1;m+1}\right)}{\Gamma^{(n+1)}\left(V_{n+m+1;m+1}^{2}(u,v)\right)}$$

D'autre part, $V_{n+m;m}$ s'écrit:

$$V_{n+m;m}(u,v) = H_m^{(n+1)}[c_{n+1}(v)]\, u^m + \dots$$

Par conséquent:

$$\eta_{m-1}^{(n+1)}(v) = \frac{H_{m+1}^{(n+1)}[c_{n+1}(v)]}{H_m^{(n+1)}[c_{n+1}(v)]}$$

d'où le résultat.

Pour chaque $n \geq -1$, on a une relation de récurrence fournissant les approximants de Padé "homogènes" $[n + m/m]$, $m \geq 0$ et qui correspond à la $n+1$ème diagonale supérieure de la table de Padé "homogène":

0	0	0	–	–	–		
0	[0/0]	[1/0]	–	–	–		
0	[0/1]	[1/1]	[2/1]	–	–	–	
0	[0/2]	[1/2]	[2/2]	[3/2]	–	–	–
$\vert$	[0/3]	[1/3]	[2/3]	[3/3]	–	–	–
$\vert$	$\vert$	[1/4]	[2/4]	[3/4]	–	–	–
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$			
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$			

Les autres approximants de la table peuvent être obtenus en utilisant la relation (voir [3]):

$$([n/m+1] - [n/m])^{-1} + ([n/m-1] - [n/m])^{-1} =$$
$$= ([n = 1/m] - [n/m])^{-1} + ([n-1/m] - [n/m])^{-1}$$

avec

$$[-1/m] = 0\,, \qquad [n/-1] = \infty$$

$$[n/0] = \sum_{p=0}^{n} c\left((xt+ys)^p\right) \text{ et } [0/m] = 1/\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{p} d_{p-q;q}t^{p-q}s^q$$

où la série $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} d_{p-q;q}t^{p-q}s^q$ est telle que:

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} c_{p-q;q}t^{p-q}s^q\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} d_{p-q;q}t^{p-q}s^q\right) = 1$$

ou on peut utiliser les relations en escalier (cf thèse à paraître).

REFERENCES

[1] S. Arioka: *Padé-type Approximants in Multivariables*, J. Applied numerical Mathematics 3 (1987), 497-511.

[2] C. Brezinski: *Padé-type Approximation and General orthogonal Polynomials*, Birkhauser, Basel, 1980).

[3] A. Cuyt: *Padé approximants for operators: theory and applications*, Lecture Note in Maths 1065, Springer Verlag (1984).

Lavoro pervenuto alla redazione il 20 giugno 1989
ed accettato per la pubblicazione il 12 marzo 1990
su parere favorevole di A. Ossicini e di P.E. Ricci

Indirizzo dell'autore:

Brahim Benouahmane - INSA de Rouen - Departement de Génie Mathématiques - Palace Emile Blondel BP 08 - 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex, France.