Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11, Roma (1991), 809-818

Stima dello Spettro di un Rivestimento Riemanniano Tramite lo Spettro della Base

M. BORDONI[(*)]

RIASSUNTO – *Sia $\widetilde{M}$ una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo e $M = \widetilde{M}/G$, essendo G un gruppo finito che agisce liberamente e propriamente per isometrie su $\widetilde{M}$. Il fibrato vettoriale $\widetilde{M} \times_G L^2(G)$ su M si spezza in sottofibrati $\widetilde{M} \times_G L^2_i(G)$, ove $L^2_i(G)$ sono le componenti irriducibili di $L^2(G)$. Si ottiene da ciò una stima di $N_{\widetilde{M}}(\lambda)$ tramite $N_M(\lambda)$ ($N_M(\lambda)$ denota il numero degli autovalori dell'operatore di Laplace-Beltrami Δ_M che sono minori di λ). Si dà anche un esempio di varietà collassanti $\widetilde{M}_\epsilon$ e M_ϵ, per le quali $\lambda_1(\widetilde{M}_\epsilon)$ converge a zero e $\lambda_1(M_\epsilon)$ tende ad un valore strettamente positivo per ϵ che tende a zero.*

ABSTRACT – *Let $\widetilde{M}$ be a Riemannian connected compact manifold without boundary and $M = \widetilde{M}/G$, with G a finite group acting freely and properly by isometrics on $\widetilde{M}$. The vector fiber bundle $\widetilde{M} \times_G L^2(G)$ on M splits into subbundles $\widetilde{M} \times_G L^2_i(G)$, where $L^2_i(G)$ are the irreducibles of $L^2(G)$. From this, an estimate of $N_{\widetilde{M}}(\lambda)$ by $N_M(\lambda)$ is obtained ($N_M(\lambda)$ denotes the number of the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator Δ_M which are less of λ). It is also given an example of collapsing manifolds $\widetilde{M}_\epsilon$ and M_ϵ, for which $\lambda_1(\widetilde{M}_\epsilon)$ converges to zero and $\lambda_1(M_\epsilon)$ does to a strictly positive quantity as ϵ goes to 0.*

KEY WORDS – *Laplacian - Riemannian covering - Collapsing manifolds.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 53C42 - 58G25 - 58C40

1 – Introduzione

1.1 Sia Δ_X *l'operatore di Laplace-Beltrami* su una data varietà rie-

[(*)]Lavoro finanziato con fondi del M.U.R.S.T.

manniana X (connessa compatta e senza bordo) e $\operatorname{Spec}\Delta_X = \{\lambda_i(X)\}$, $i = 0, 1, \ldots$, il suo *spettro*, ciascun autovalore essendo ripetuto un numero di volte pari alla propria molteplicità. La *funzione di contaggio* $N_X(\lambda)$ è la funzione che per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ dà il numero dei $\lambda_i(X)$ che sono minori di λ.

Lo scopo di questo lavoro è dare una stima, per un rivestimento riemanniano ad h fogli $\widetilde{M} \longrightarrow M$, di $N_{\widetilde{M}}(\lambda)$ tramite $N_M(\lambda)$. Precisamente, data la varietà riemanniana $\widetilde{M}$, sia G *un gruppo finito di cardinalità h che agisce liberamente e propriamente per isometrie su* $\widetilde{M}$, e sia $M = \widetilde{M}/G$ dotata dell'unica metrica riemanniana per la quale la proiezione $\pi\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$ è un rivestimento riemanniano.

Decomposto $L^2(G) = \{f\colon G \longrightarrow \mathbf{R}\}$ in componenti ortogonali irriducibili:

$$L^2(G) = \bigoplus_{i=0}^{k} L_i^2(G), \tag{1}$$

il risultato cui si perviene è la stima data nel Teorema 2, sezione 3:

$$N_{\widetilde{M}}(\lambda) \leq N_M(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} \left[N_M(C(h_i,q)^{-1}\lambda)(h_i + q - 1) - 1\right]. \tag{2}$$

ove $h_i = \dim L_i^2(G)$ e $C(h,q)$ è data, per h e q interi positivi, da

$$C(h,q) = \frac{q-1}{2(h+1)(h+q)} + \frac{1}{8(h+1)^2}. \tag{3}$$

La (2) migliora una precedente stima data dall'autore in [3] e si estende, in base ad un principio generale enunciato sempre in [3], ad ogni applicazione $\pi\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$ che sia un rivestimento riemanniano ad h fogli regolare al di fuori di un sottoinsieme di M chiuso e di capacità nulla.

L'idea della dimostrazione della (2) è la seguente: si considera (sezione 2) il fibrato vettoriale riemanniano $\mathcal{L} \longrightarrow M$, $\mathcal{L} = \widetilde{M} \times_G L^2(G)$ (cfr. [5], vol. I), e lo si decompone (sezione 3) in sottofibrati $\mathcal{L}_i = \widetilde{M} \times_G L_i^2(G)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, in accordo con la decomposizione (1). A ciascun $\mathcal{L}_i$ si applica la stima tramite $N_M(\lambda)$ della funzione di contaggio del *laplaciano bruto* del fibrato stabilita da S. Gallot e D. Meyer (v. [4], prop. 5) nella versione datane in [3]. Si conclude dimostrando (sezione 3) che lo spettro di $\Delta_{\widetilde{M}}$ coincide con l'unione disgiunta degli spettri dei suddetti laplaciani bruti.

1.2 Osserviamo infine che una conseguenza della (2) è che per $i = 1,2,\ldots$ si ha:

$$\lambda_{i(h+q)-1}(\widetilde{M}) \geq C(h,q)\lambda_i(M),$$

che per $i = q = 1$ diviene:

$$\lambda_h(\widetilde{M}) \geq C(h,1)\lambda_1(M). \tag{4}$$

È naturale allora chiedersi se sussista una diseguaglianza analoga per $\lambda_1(\widetilde{M})$ in luogo di $\lambda_h(\widetilde{M})$: la risposta è *no*, come mostriamo nella sezione 4 dando un esempio analogo all'altere di Calabi-Cheeger (cfr. [2], p. 188), di un rivestimento riemanniano a 2 fogli $\widetilde{M}_\varepsilon$ di M_ε (le varietà dipendono da un parametro ε) per il quale risulta, al collassare delle varietà per $\varepsilon \to 0$, $\lim \lambda_1(\widetilde{M}_\varepsilon) = 0$, mentre C. ANNÈ ha dimostrato in [1] che $\lim \lambda_1(M_\varepsilon) > 0$.

2 – Il fibrato $\mathcal{L} \longrightarrow M$

2.1. Indichiamo con $C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$ lo spazio delle funzioni reali differenziabili G-invarianti su $\widetilde{M} \times G$: questo spazio si identifica con $C^\infty(\widetilde{M})$ tramite l'isomorfismo canonico che a $\phi \in C^\infty(\widetilde{M})$ fa corrispondere $\Phi \in C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$ definita da

$$\Phi(x,g) = \phi(g^{-1}x) \tag{5}$$

e che viceversa associa a Φ la ϕ definita da $\phi(x) = \Phi(x,e)$, essendo e l'elemento neutro di G.

Sia $L^2(G)$ lo spazio vettoriale reale, di dimensione uguale alla cardinalità h di G, delle funzioni reali su G, dotato del prodotto scalare

$$\langle\langle f_1, f_2 \rangle\rangle_{L^2(G)} = \sum_{g\in G} f_1(g) f_2(g); \tag{6}$$

G agisce per isometrie su $L^2(G)$, γf essendo definita, per $\gamma \in G$, da

$$(\gamma f)(g) = f(\gamma^{-1}g).$$

L'azione diagonale di G su $\widetilde{M} \times L^2(G)$ dà, per passaggio al quoziente, lo spazio $\mathcal{L} = \widetilde{M} \times_G L^2(G)$ che è un fibrato vettoriale riemanniano su M di fibra-tipo $L^2(G)$ (cfr. [5], vol. I). Le sezioni differenziabili di questo fibrato si identificano in maniera naturale con le funzioni di $C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$. In definitiva, indicando con $C^\infty(M, \mathcal{L})$ lo spazio delle sezioni differenziabili del fibrato $\mathcal{L} \longrightarrow M$, abbiamo:

Osservazione 1. Gli spazi $C^\infty(\widetilde{M}), C_G^\infty(\widetilde{M} \times G), C^\infty(M, \mathcal{L})$ sono canonicamente isomorfi.

In base a (5), (6), il prodotto scalare puntuale di due sezioni è espresso, per $b \in M$ e $x \in \pi^{-1}(b)$, da:

$$\langle s_1(b), s_2(b)\rangle = \sum_{g \in G} \Phi_1(x,g)\Phi_2(x,g) = \sum_{y \in \pi^{-1}(b)} \phi_1(y)\phi_2(y),$$

avendo indicato con $\Phi_1, \Phi_2 \in C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$ e $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\widetilde{M})$ gli elementi corrispondenti alle sezioni $s_1, s_2 \in C^\infty(M, \mathcal{L})$.

2.2. Indichiamo, per $\Phi \in C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$, con $d^1\Phi$ il differenziale di Φ rispetto alla prima variabile; detta ϕ la funzione di $C^\infty(\widetilde{M})$ corrispondente a Φ, abbiamo cioè per la (5):

$$(d^1\Phi)(x,g) = (d\phi \circ dg^{-1})(x), \tag{7}$$

da cui

Proposizione 1. *Se $\tilde{Z}$ è un campo differenziabile di vettori G-invariante su $\widetilde{M}$ e $\Phi \in C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$, allora $d^1_{\tilde{Z}}\Phi \in C_G^\infty(\widetilde{M} \times G)$.*

Dim. Risulta infatti, per la (7) e l'invarianza di $\tilde{Z}$:

$$(d^1_{\tilde{Z}}\Phi)(x,g) = ((d\phi)(g^{-1}x))(\tilde{Z}) = (\tilde{Z}\phi)(g^{-1}x) \tag{8}$$

e quindi, qualunque sia $\gamma \in G$:

$$(d^1_{\tilde{Z}})(\gamma x, \gamma g) = (\tilde{Z}\phi)((\gamma g)^{-1}(\gamma x)) = (d^1_{\tilde{Z}}\Phi)(x,g).$$

$\square$

Possiamo quindi porre:

DEFINIZIONE 1. *Sia Z un campo differenziabile di vettori su M e sia $\tilde{Z}$ il campo (G-invariante) sollevato orizzontale di Z su $\widetilde{M}$. Si definisce una connessione D agente sulle sezioni s del fibrato $\mathcal{L} \longrightarrow M$ ponendo, per $b \in M$ e $x \in \pi^{-1}(b)$:*

$$(D_Z s)(b) = (d^1_{\tilde{Z}} \Phi)(x, g), \tag{9}$$

ove $\Phi \in C^\infty_G(\widetilde{M} \times G)$ è la corrispondente di $s \in C^\infty(M, \mathcal{L})$.

La connessione D è compatibile con la metrica del fibrato $\mathcal{L} \longrightarrow M$, come subito si verifica.

3 – La decomposizione di $L^2(\widetilde{M})$ e la stima spettrale

3.1. Indichiamo con $L^2(M, \mathcal{L})$ il completamento di $C^\infty(M, \mathcal{L})$ rispetto alla norma

$$\|s\|^2_{L^2(M,\mathcal{L})} = \int_M \langle s(b), s(b)\rangle db,$$

ove db è la misura canonica indotta su M dalla metrica.

Se $\phi \in C^\infty(\widetilde{M})$ è la funzione corrispondente, a norma dell'Oss. 1, alla sezione $s \in C^\infty(M, \mathcal{L})$, si ha per il Teorema di Fubini (v. anche (5) e (6)):

$$\|s\|^2_{L^2(M,\mathcal{L})} = \|\phi\|^2_{L^2(\widetilde{M})} \tag{10}$$

quindi:

PROPOSIZIONE 2. *Gli spazi di Hilbert $L^2(\widetilde{M})$, $L^2(M, \mathcal{L})$ sono isometrici.*

Detto poi $H^1(M, \mathcal{L})$ il completamento di $C^\infty(M, \mathcal{L})$ rispetto alla norma

$$\|s\|^2_{H^1(M,\mathcal{L})} = \|s\|^2_{L^2(M,\mathcal{L})} + \|Ds\|^2_{L^2(M,\mathcal{L})},$$

abbiamo anche:

PROPOSIZIONE 3. *Lo spazio di Hilbert $H^1(M, \mathcal{L})$ è isometrico al primo spazio di Sobolev $H^1(\widetilde{M})$.*

DIM. Le (6), (9) e (8) danno, per un qualsiasi campo differenziabile di vettori Z su M, di cui $\tilde{Z}$ è il sollevato orizzontale su $\widetilde{M}$:

$$\langle (D_Z s)(b), (D_Z s)(b)\rangle = \sum_{g\in G}\left[(d^1_{\tilde{Z}}\Phi)(x,g)\right]^2 = \sum_{y\in\pi^{-1}(b)}\left[(\tilde{Z}\phi)(y)\right]^2$$

e quindi

$$|(Ds)(b)|^2 = \sum_{y\in\pi^{-1}(b)} |(d\phi)(y)|^2.$$

Integrando su un dominio fondamentale del rivestimento si ha, per il Teorema di Fubini:

$$\|Ds\|^2_{L^2(M,\mathcal{L})} = \|d\phi\|^2_{L^2(\widetilde{M})}. \tag{11}$$

□

Per il principio del minimax, lo spettro di $\Delta_{\widetilde{M}}$ coincide con quello della forma quadratica $\|d\phi\|^2_{L^2(\widetilde{M})}$ su $H^1(\widetilde{M})$ ed, analogamente, lo spettro del *laplaciano bruto* $\overline{\Delta}_{\mathcal{L}} = D^* D$ del fibrato $\mathcal{L} \longrightarrow M$ coincide con quello della forma quadratica $\|Ds\|^2_{L^2(M,\mathcal{L})}$ su $H^1(M,\mathcal{L})$ (cfr. [4]). Per (10) e (11) concludiamo allora che:

TEOREMA 1. *Lo spettro dell'operatore di Laplace-Beltrami $\Delta_{\widetilde{M}}$ coincide con quello del laplaciano bruto $\overline{\Delta}_{\mathcal{L}}$ del fibrato $\mathcal{L} \longrightarrow M$.*

3.2. La decomposizione (1) di $L^2(G)$ in componenti ortogonali irriducibili:

$$L^2(G) = \bigoplus_{i=0}^{k} L^2_i(G),$$

di dimensioni rispettivamente h_i con $\sum_{i=0}^{k} h_i = h$, induce una decomposizione di $\mathcal{L} \longrightarrow M$ in sottofibrati $\mathcal{L}_i \longrightarrow M$, di fibra-tipo $L^2_i(G)$:

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathcal{L}_i, \quad \mathcal{L}_i = \widetilde{M} \times_G L^2_i(G);$$

corrispondentemente, lo spazio $L^2(M,\mathcal{L})$ si decompone in una somma diretta di sottospazi $L^2(M,\mathcal{L})$-ortogonali, $L^2(M,\mathcal{L}) = \bigoplus_{i=0}^{k} L^2(M,\mathcal{L}_i)$.

Poiché $s_i \in C^\infty(M,\mathcal{L}_i)$ implica (cfr. (9)) $D_Z s_i \in C^\infty(M,\mathcal{L}_i)$ qualunque sia il campo differenziabile di vettori Z su M, anche $H^1(M,\mathcal{L})$ si decompone in una somma diretta di sottospazi $H^1(M,\mathcal{L})$-ortogonali, $H^1(M,\mathcal{L}) = \bigoplus_{i=0}^{k} H^1(M,\mathcal{L}_i)$.

Il laplaciano bruto $\overline{\Delta}_{\mathcal{L}_i}$ del fibrato $\mathcal{L}_i \longrightarrow M$ coincide con la restrizione di $\overline{\Delta}_{\mathcal{L}}$ alle sezioni di $C^\infty(M,\mathcal{L}_i)$. In definitiva abbiamo perciò che

$$\operatorname{Spec}\overline{\Delta}_{\mathcal{L}} = \bigcup_{i=0}^{k} \operatorname{Spec}\overline{\Delta}_{\mathcal{L}_i}. \tag{12}$$

3.3. La decomposizione (1) di $L^2(G)$ induce, tramite l'isomorfismo dell'Oss. 1 ed in base alle Prop. 2,3, una decomposizione di $L^2(\widetilde{M})$ e di $H^1(\widetilde{M})$ in componenti ortogonali G-invarianti:

$$L^2(\widetilde{M}) = \bigoplus_{i=0}^{k} L_i^2(\widetilde{M}), \quad H^1(\widetilde{M}) = \bigoplus_{i=0}^{k} H_i^1(\widetilde{M}).$$

Per esempio, ad $L_0^2(G) = \{\text{funzioni costanti su } G\}$ corrisponde lo spazio $L_0^2(\widetilde{M})$ delle funzioni costanti sulle fibre del rivestimento, che si identifica a sua volta con $L^2(M)$.

Poiché G agisce su $\widetilde{M}$ per isometrie, i sottospazi di queste decomposizioni sono $\Delta_{\widetilde{M}}$-invarianti, sicché otteniamo:

$$\operatorname{Spec}\Delta_{\widetilde{M}} = \bigcup_{i=0}^{k} \operatorname{Spec}\Delta_{\widetilde{M}}\Big|_{L_i^2(\widetilde{M})} = \operatorname{Spec}\Delta_M \cup \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Spec}\Delta_{\widetilde{M}}\Big|_{L_i^2(\widetilde{M})}.$$

Abbiamo allora la stima (2):

Teorema 2. *Per ogni intero positivo q risulta*

$$N_{\widetilde{M}}(\lambda) \le N_M(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} [N_M(C(h_i,q)^{-1}\lambda)(h_i + q - 1) - 1]$$

essendo C data da (3).

DIM. La dimostrazione si ottiene direttamente dal Teorema 1 e dalla (12). Precisamente, le stesse considerazioni del Teorema 1 danno che lo spettro di $\Delta_{\widetilde{M}}|_{L_i^2(\widetilde{M})}$ coincide con quello del Laplaciano bruto $\overline{\Delta}_{\mathcal{L}_i}$. Abbiamo quindi

$$N_{\widetilde{M}}(\lambda) = N_M(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} N_{\overline{\Delta}_{\mathcal{L}_i}}(\lambda).$$

La conclusione segue allora applicando al fibrato $\mathcal{L}_i \longrightarrow M$ la Prop. 5 di [4] nella versione data in [3], secondo la quale si ha

$$N_{\overline{\Delta}_{\mathcal{L}_i}}(\lambda) \leq N_M(C(h_i, q)^{-1}\lambda)(h_i + q - 1) - 1,$$

essendo $h_i = \dim L_i^2(G)$. □

4 – Un esempio

Escindiamo da una sfera unitaria S^n due dischi diametralmente opposti di raggio ε ed incolliamovi un cilindro $Z(\varepsilon) = S^{n-1}(\varepsilon) \times [0, L]$ di raggio ε e lunghezza L, arrotondando gli angoli in modo da ottenere una varietà n-dimensionale M_ε, diffeomorfa a $S^{n-1} \times S^1$, la cui metrica comporta un rigonfiamento (ved. ad es. come si fa in [2], p. 188). La varietà $\widetilde{M}_\varepsilon$ ottenuta con lo stesso metodo, collegando due sfere S_1^n, S_2^n privata ciascuna di due dischetti D_1, D_1' e D_2, D_2' risp., con due cilindri Z_1, Z_2 di egual raggio ε e lunghezza L, è ancora diffeomorfa a $S^{n-1} \times S^1$, ma la metrica comporta due rigonfiamenti.

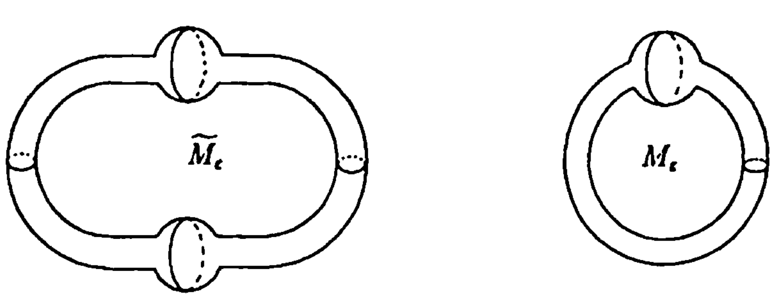

Fig. 1

L'applicazione $S^{n-1} \times S^1 \longrightarrow S^{n-1} \times S^1$

$$(x, e^{i\theta}) \longrightarrow (x, e^{2i\theta})$$

dà un rivestimento riemanniano a due fogli $\pi\colon \widetilde{M}_\epsilon \longrightarrow M_\epsilon$.

La funzione $f\colon \widetilde{M}_\epsilon \longrightarrow \mathbf{R}$ definita, per $k \neq 0$ costante arbitraria, da

$$f\Big|_{S_1^n \setminus \{D_1 \cup D_1'\}} = k, \quad f\Big|_{S_2^n \setminus \{D_2 \cup D_2'\}} = -k,$$

$$f\Big|_{Z_1} = \frac{2k}{L}t - k, \quad f\Big|_{Z_2} = -\frac{2k}{L}t + k, \qquad 0 \le t \le L,$$

è di classe C^1 e di integrale nullo su $\widetilde{M}_\epsilon$. Si ha perciò

$$\lambda_1(\widetilde{M}_\epsilon) \le \frac{\|df\|^2_{L^2(\widetilde{M}_\epsilon)}}{\|f\|^2_{L^2(\widetilde{M}_\epsilon)}} \le \frac{2(\frac{2\pi}{L})^2 L \operatorname{Vol} S^{n-1}(\varepsilon)}{2k^2 \operatorname{Vol}(S^n \setminus \{D \cup D'\})}$$

e quindi

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lambda_1(\widetilde{M}_\epsilon) = 0.$$

Invece, per $\varepsilon \to 0$, il cilindro $Z(\varepsilon)$ tende ad un filo $Z(0)$ e si ha (cfr. [1]):

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lambda_1(M_\epsilon) = \inf(\lambda_1(S^n), \lambda_0^D(Z(0))) > 0,$$

ove $\lambda_0^D(Z(0))$ indica il primo autovalore dello spettro di Dirichlet di $Z(0)$.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia S. Gallot per le stimolanti discussioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Annè: *Spectre du laplacien et écrasement d'anses*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t.20 (1987), 271-280.

[2] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet: *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture notes 194, Springer, Berlin-Heidelberg, 1971.

[3] M. Bordoni: *Spectral estimates for Riemannian submersions and coverings*, Pré-publication de l'Institut Fourier, Grenoble, n. 135 (1989)

[4] S. Gallot - D. Meyer: *D'un résultat hibertien à un principe de comparaison entre spectre. Applications*, Ann. Sceint. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t.21 (1988), 561-591.

[5] S. Kobayashi - K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Wiley Inter-science, New York-London, 1963-1969.

Lavoro pervenuto alla redazione il 17 luglio 1990
ed accettato per la pubblicazione il 30 ottobre 1990
su parere favorevole di E. Martinelli e di S. Marchiafava

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Manlio Bordoni - Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo" - Università la Sapienza - P.le Aldo Moro, 2 - 00185 Roma - Italia