

L'applicazione di Gauss per grafi trivalenti

C. CILIBERTO - A. FRANCHETTA^(*)

RIASSUNTO – *Scopo di questo lavoro è di presentare un approccio puramente combinatorico ad alcuni problemi relativi a curve poligonali. In particolare, ci si occupa dello studio di un invariante combinatorico di un grafo, la cosiddetta mappa di Gauss.*

ABSTRACT – *Aim of this paper is to give a purely combinatorial approach to some questions related to polygonal curves. In particular, the main purpose is to study a combinatorial invariant of a graph, the so called Gauss map.*

KEY WORDS – *Curva poligonale - Grafo - Mappa di Gauss.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 14N10

1 – Introduzione

Questo lavoro è dedicato a prospettare un approccio puramente combinatorico, in termini di teoria dei grafi ad alcune questioni concernenti le curve poligonali, che sono state recentemente oggetto di studio in geometria algebrica. Per ampi richiami su tali questioni rinviamo a [4]. Lo scopo dell'articolo è di mostrare da un lato come l'approccio combinatorico semplifichi alquanto la trattazione di questi argomenti, dall'altro come idee provenienti dalla geometria algebrica possano portare all'introduzione di nozioni di qualche interesse in combinatorica.

L'oggetto di studio in questo articolo è un'applicazione lineare w , da noi chiamata *applicazione di Gauss*, definita a partire da un dato

^(*)Gli autori sono finanziati dal MURST e dal CNR.

grafo \mathbb{G} trivalente e dotato di due orientazioni, una per lati e una per vertici (cfr. n. 2), il cui dominio è $\Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k)$ e il cui codominio è $\text{Cat}_0(\mathbb{G}, k) \oplus \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$, dove k è un campo di caratteristica diversa da 2. La definizione di questa applicazione si trova nel n. 2, ove è verificato che il suo corango, detto *numero di Gauss* di \mathbb{G} e denotato con $w(\mathbb{G})$, non dipende dalle orientazioni di \mathbb{G} e dunque è un invariante combinatorico del grafo \mathbb{G} che, a nostra conoscenza, è qui considerato per la prima volta.

Il resto dell'articolo è dedicato allo studio di questo invariante. Nel n. 3, ad esempio, si stabiliscono delle stime superiori per $w(\mathbb{G})$. Tra queste segnaliamo quella fornita dal teorema 3.2, che afferma che $w(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 2$, dove $g(\mathbb{G})$ è il *genere* di \mathbb{G} , per ogni grafo \mathbb{G} trivalente e 3-connesso: per la naturalità dell'ipotesi di 3-connessione, che spesso ricorre nel lavoro, rinviamo a [4]. Per il lettore interessato di geometria algebrica, questa stima andrà paragonata con la proposizione 4.9 di [12] (cfr. anche [4], [5] e [11]). Il teorema 3.5 migliora la stima $w(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 3$, facendo intervenire altri invarianti del grafo. La stima del teorema 3.5, come dimostrano le considerazioni del n. 4, non è migliorabile, in quanto vi sono grafi per cui essa diviene un'uguaglianza.

Nel n. 4 si danno condizioni su un grafo \mathbb{G} affinché il suo numero di Gauss sia "molto basso", in particolare sia 0 o 1. Si dimostra innanzi tutto che per i grafi planari è sempre $w(\mathbb{G}) \geq 1$ e si danno condizioni necessarie e sufficienti affinché sia $w(\mathbb{G}) = 1$ (cfr. teorema 4.2). Questo risultato è sostanzialmente una riformulazione di un teorema di R. Miranda sulle curve poligonali canoniche (cfr. [8]). Ancora nel n. 4 si prova l'esistenza di grafi \mathbb{G} trivalenti e 3-connessi per cui $w(\mathbb{G}) = 0$, per ogni valore del genere $g = g(\mathbb{G}) \geq 10$, con $g \neq 11$ (cfr. teorema 4.8). Questo risultato, già provato in [6], viene qui dimostrato col nostro approccio combinatorico, in modo molto semplice e diretto, senza far ricorso, come in [6], all'uso di mezzi di calcolo. Si noti che non esiste alcun grafo \mathbb{G} trivalente e 3-connesso con $g(\mathbb{G}) \leq 11$, $g(\mathbb{G}) \neq 10$ e $w(\mathbb{G}) = 0$. Ciò è ovvio se $g(\mathbb{G}) \leq 9$ per banali motivi di dimensione di dominio e immagine dell'applicazione di Gauss. Invece per $g(\mathbb{G}) = 11$ la cosa è conseguenza di alcuni risultati di geometria algebrica di J. Wahl e di S. Mori e S. Mukai (cfr. [9] e [10]), ma non se ne conosce nessuna dimostrazione diretta in termini di teoria dei grafi.

Nel n. 5 si dimostra l'esistenza, per ogni genere $g \geq 11$, $g \neq 12$, di grafi planari trivalenti e 3-connessi \mathbb{G} di genere g tali che $w(\mathbb{G}) = 1$ (per

$g = 12$ non esiste alcun grafo siffatto). Anzi del numero di tali grafi si fornisce una limitazione inferiore (cfr. teorema 5.5). Ciò completa il citato risultato di R. Miranda, che non si era preoccupato di discutere l'esistenza dei suddetti grafi.

Nell'ordine di idee di questo articolo vi sono vari possibili approfondimenti ed estensioni. Per un breve cenno ad alcuni di essi rinviamo a [4]. Accenniamo qui solo brevemente alla questione di formulare ed implementare algoritmi per il calcolo del numero di Gauss di un grafo. Ciò è stato già realizzato da D. Bayer e M. Stillman nell'ambito del programma Macaulay [3], che fa uso di basi di Groebner. Riteniamo che l'approccio combinatorico qui presentato suggerisca algoritmi possibilmente più efficienti. Osserviamo ancora che in [4] si prova l'esistenza di grafi \mathbb{G} trivalenti e 3-connessi con dato numero di Gauss.

Notazioni

\mathbb{G}	un grafo senza lati multipli e senza cappi, che verrà identificato col complesso simpliciale ad esso associato
$c(\mathbb{G})$	il numero delle componenti connesse di \mathbb{G}
$\mathcal{V}(\mathbb{G})$	l'insieme dei vertici di \mathbb{G}
$v(\mathbb{G})$	il numero dei vertici di \mathbb{G} , ordine di $\mathcal{V}(\mathbb{G})$
$\mathcal{L}(\mathbb{G})$	l'insieme dei lati di \mathbb{G}
$\ell(\mathbb{G})$	il numero dei lati di \mathbb{G} , ordine di $\mathcal{L}(\mathbb{G})$
k	un campo di caratteristica diversa da 2
$\text{Cat}_0(\mathbb{G}, k)$	il k -spazio vettoriale $v(\mathbb{G})$ -dimensionale $\mathbb{C}^{\mathcal{V}(\mathbb{G})}$ delle 0-catene a coefficienti in k sul grafo \mathbb{G} . Un elemento $c \in \text{Cat}_0(\mathbb{G}, k)$ si scriverà come $\sum_{\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{G})} c_\gamma \gamma$, con c_γ elemento di k , detto <i>molteplicità</i> di c in γ
$\text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$	il k -spazio vettoriale $\ell(\mathbb{G})$ -dimensionale $\mathbb{C}^{\mathcal{L}(\mathbb{G})}$ delle 1-catene a coefficienti complessi sul grafo \mathbb{G} . Un elemento $c \in \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$ si scriverà come $\sum_{p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})} c_p p$, con c_p elemento di k , detto <i>molteplicità</i> di c in p
$\text{Supp}(c)$	il <i>supporto</i> di una 1-catena $c \in \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$: è l'unione dei lati p di \mathbb{G} tali che $c_p \neq 0$
$\text{Ad}(c)$	L' <i>adiacenza</i> della 1-catena c , cioè l'unione dei lati <i>adiacenti</i> a c , ossia dei lati che escono dai vertici del supporto di c
∂_ω	l'operatore di bordo $\partial_\omega: \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k) \rightarrow \text{Cat}_0(\mathbb{G}, k)$ definito a partire da una data orientazione ω del grafo \mathbb{G} ; viene in-

	dicato con ∂ se non v'è luogo ad equivoco
$H_1(\mathbb{G}, \omega, k)$	il primo spazio vettoriale di omologia di \mathbb{G} , nucleo di ∂_ω , viene indicato con $H_1(\mathbb{G}, k)$ se non v'è luogo ad equivoco
$\nu(\gamma, \mathbb{G})$	la <i>valenza</i> di un vertice di \mathbb{G} , cioè il numero di lati uscenti da γ , denotata con $\nu(\gamma)$ se non v'è luogo ad equivoco. Se la funzione ν è costante in $\mathcal{V}(\mathbb{G})$, allora \mathbb{G} si dice <i>regolare</i> e il valore assunto da ν si denota con $\nu(\mathbb{G})$ e prende il nome di <i>valenza</i> di \mathbb{G}
$\delta(\alpha, \beta)$	il <i>numero di (α, β)-sconnessione</i> con α e β vertici distinti di \mathbb{G} : è la minima cardinalità di un insieme di lati di \mathbb{G} che formano un insieme (α, β) - <i>sconnettente</i> ossia un sottoinsieme E di $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ tale che per ogni cammino σ da α a β si ha che $\{p \in \mathcal{L}(\mathbb{G}) : p \subset \text{Supp}(\sigma)\} \cap E \neq \emptyset$. Si ricorda che un <i>cammino</i> σ da α a β è una 1-catena tale che $\partial(\sigma) = \beta - \alpha$.
$\gamma(\mathbb{G})$	il <i>girth</i> del grafo \mathbb{G} , cioè la minima cardinalità di un insieme di lati contenuti nel supporto di un ciclo di \mathbb{G}
$\mathcal{F}(\mathbb{G})$	l'insieme delle facce di un grafo planare \mathbb{G}
$f(\mathbb{G})$	numero delle facce di un grafo planare \mathbb{G} , cioè l'ordine di $\mathcal{F}(\mathbb{G})$
$f_i(\mathbb{G})$	numero delle facce con i lati di un grafo planare \mathbb{G}
σ_f	il ciclo <i>associato</i> ad una faccia f di un grafo planare \mathbb{G} , è definito a meno del segno ed ha supporto sui lati della faccia, ciascuno dei quali ha in σ_f molteplicità ± 1
$[x]$	la parte intera del numero reale x

2 - L'applicazione di Gauss per i grafi trivalenti

Sia \mathbb{G} un grafo senza lati multipli e senza cappi. È assegnata una *orientazione* ω di \mathbb{G} se è dato un orientamento di ciascun lato di \mathbb{G} . Una siffatta orientazione verrà da noi denominata *l-orientazione* o orientazione per i lati di \mathbb{G} . La coppia (\mathbb{G}, ω) si dice un *grafo orientato* e si può considerare l'omologia $H_1(\mathbb{G}, \omega, k)$, indicata con $H_1(\mathbb{G}, k)$ se non v'è luogo ad equivoco, in relazione all'orientazione di \mathbb{G} . $H_1(\mathbb{G}, \omega, k)$ è un k -sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$ delle 1-catene a coefficienti nel campo k sul grafo \mathbb{G} , e dipende dall'orientazione ω . Tuttavia è ben noto che la sua dimensione $g(\mathbb{G})$ è indipendente da ω . Siano

infatti ω e ω' orientazioni di \mathbb{G} e sia \mathcal{L}' l'insieme dei lati su cui ω e ω' sono concordi e $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}(\mathbb{G}) - \mathcal{L}'$. Ogni 1-catena $c \in \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$ si scrive come $c = \sum_{p \in \mathcal{L}'} c_p p + \sum_{p \in \mathcal{L}''} c_p p$. L'applicazione

$$\Phi_{\omega, \omega'} : \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k) \longrightarrow \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$$

che agisce nel seguente modo

$$c = \sum_{p \in \mathcal{L}'} c_p p + \sum_{p \in \mathcal{L}''} c_p p \longrightarrow \Phi_{\omega, \omega'}(c) = \sum_{p \in \mathcal{L}'} c_p p - \sum_{p \in \mathcal{L}''} c_p p$$

è un isomorfismo involutorio di $\text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$ in sé che induce un isomorfismo di $H_1(\mathbb{G}, \omega, k)$ su $H_1(\mathbb{G}, \omega', k)$.

L'intero $g(\mathbb{G})$ prende il nome di *genere* del grafo \mathbb{G} . Ricordiamo la ben nota *formula di Eulero*

$$c(\mathbb{G}) - g(\mathbb{G}) = v(\mathbb{G}) - \ell(\mathbb{G})$$

che, in particolare, per i grafi connessi diviene

$$g(\mathbb{G}) = \ell(\mathbb{G}) - v(\mathbb{G}) + 1.$$

Se il grafo è *regolare* di valenza $\nu(\mathbb{G})$, dalla formula di Eulero segue che

$$v(\mathbb{G}) = 2 \frac{g(\mathbb{G}) - 1}{\nu(\mathbb{G}) - 2},$$

$$\ell(\mathbb{G}) = \nu(\mathbb{G}) \frac{g(\mathbb{G}) - 1}{\nu(\mathbb{G}) - 2}$$

e in particolare, per i grafi trivalenti, a cui tra poco limiteremo la nostra attenzione, si ha

$$v(\mathbb{G}) = 2g(\mathbb{G}) - 2 \quad , \quad \ell(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3.$$

Accanto al concetto di ℓ -orientazione introduciamo il concetto di *v -orientazione*, o orientazione per vertici del grafo \mathbb{G} . Diremo assegnata una v -orientazione φ di \mathbb{G} se per ogni vertice γ di \mathbb{G} è data una permutazione ciclica φ_γ dei lati di \mathbb{G} che hanno un estremo in γ .

Sia \mathbb{G} un grafo trivalente, che supponiamo munito di una ℓ -orientazione ω e di una v -orientazione φ . Definiamo un'applicazione k -lineare

$$w_{\omega, \varphi}: \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k) \longrightarrow \text{Cat}_0(\mathbb{G}, k) \oplus \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$$

denotata semplicemente con w se non v'è luogo ad equivoco, detta *applicazione di Gauss* del grafo \mathbb{G} : per la motivazione di questa denominazione si veda [4]. Per definire l'applicazione w basta definire le applicazioni

$$u_{\omega, \varphi}: \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k) \longrightarrow \text{Cat}_0(\mathbb{G}, k),$$

$$v_{\omega, \varphi}: \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k) \longrightarrow \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k),$$

denotate con u e v se non v'è luogo ad equivoco, composte della w con le proiezioni naturali di $\text{Cat}_0(\mathbb{G}, k) \oplus \text{Cat}_1(\mathbb{G}, k)$ sui due addendi. Inoltre basta definire u e v sui tensori del tipo $\sigma \wedge \tau \in \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k)$.

Per definire u procediamo nel seguente modo. Dato un tensore $\sigma \wedge \tau \in \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k)$, fissiamo un qualunque vertice $\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{G})$ e sia p un lato avente un estremo in γ . Se $q = \varphi_\gamma(p)$, poniamo

$$u(\sigma \wedge \tau)_\gamma = \partial(p)_\gamma \cdot \partial(q)_\gamma \cdot \begin{vmatrix} \sigma_p & \tau_p \\ \sigma_q & \tau_q \end{vmatrix}.$$

Denoteremo in seguito il determinante che appare nella definizione di $u(\sigma \wedge \tau)_\gamma$ col simbolo $(\sigma\tau)_{p,q}$. Definiamo

$$u(\sigma \wedge \tau) = \sum_{\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{G})} u(\sigma \wedge \tau)_\gamma \gamma.$$

Il seguente lemma assicura che la definizione di u è ben posta:

LEMMA 2.1. Per ogni vertice γ , $u(\sigma \wedge \tau)_\gamma$ è indipendente dalla scelta del lato p uscente da γ .

DIM. Poniamo $q = \varphi_\gamma(p)$ e $r = \varphi_\gamma(q)$. Poiché σ e τ sono cicli, si ha

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r \cdot \partial(r)_\gamma &= -\sigma_p \cdot \partial(p)_\gamma - \sigma_q \cdot \partial(q)_\gamma, \\ \tau_r \cdot \partial(r)_\gamma &= -\tau_p \cdot \partial(p)_\gamma - \tau_q \cdot \partial(q)_\gamma. \end{aligned}$$

Di conseguenza è facile verificare che

$$\partial(r)_\gamma \cdot (\sigma, \tau)_{q,r} = -\partial(p)_\gamma \cdot (\sigma, \tau)_{q,p} = \partial(p)_\gamma \cdot (\sigma, \tau)_{p,q}$$

da cui l'asserto. \square

Similmente, per definire v , procediamo al seguente modo. Per ogni vertice p di \mathbb{G} , siano α e β gli estremi di p e supponiamo che p sia orientato da α a β nella data ℓ -orientazione di \mathbb{G} . Posto $q = \varphi_\alpha(p)$ e $r = \varphi_\beta(p)$, poniamo

$$v(\sigma \wedge \tau)_\gamma = \partial(q)_\alpha \cdot \partial(r)_\beta \cdot \begin{vmatrix} \sigma_q & \tau_q \\ \sigma_r & \tau_r \end{vmatrix} = \partial(q)_\alpha \cdot \partial(r)_\beta \cdot (\sigma, \tau)_{q,r}.$$

Definiamo poi

$$v(\sigma \wedge \tau) = \sum_{p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})} v(\sigma \wedge \tau)_{pp}.$$

OSSERVAZIONE 2.3. Dalla stessa definizione delle applicazioni u e v segue che se $\sigma \wedge \tau \in \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k)$, e se $\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{G})$ e $p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})$, allora:

- (i) $u(\sigma \wedge \tau)_\gamma = 0$ se $\gamma \notin \text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau)$;
- (ii) $v(\sigma \wedge \tau)_\gamma = 0$ se $p \notin \text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau)$.

Ora vediamo come dipendono u , v e w dalle orientazioni del grafo.

LEMMA 2.4. *Sia data una ℓ -orientazione ω del grafo \mathbb{G} e siano φ e ψ due v -orientazioni. Allora per ogni $\delta \in \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k)$:*

- (i) per ogni $\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{G})$, si ha

$$u_{\omega, \psi}(\delta)_\gamma = u_{\omega, \varphi}(\delta)_\gamma \iff \varphi_\gamma = \psi_\gamma$$

$$u_{\omega, \psi}(\delta)_\gamma = -u_{\omega, \varphi}(\delta)_\gamma \iff \varphi_\gamma \neq \psi_\gamma$$

- (ii) per ogni $p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})$ di estremi α e β , orientato da α a β , si ha

$$v_{\omega, \psi}(\delta)_p = \begin{cases} v_{\omega, \varphi}(\delta)_p & \iff \varphi_\alpha = \psi_\alpha \text{ e } \varphi_\beta = \psi_\beta \\ -v_{\omega, \varphi}(\delta)_p - u_{\omega, \varphi}(\delta)_\beta & \iff \varphi_\alpha \neq \psi_\alpha \text{ e } \varphi_\beta = \psi_\beta \\ -v_{\omega, \varphi}(\delta)_p + u_{\omega, \varphi}(\delta)_\alpha & \iff \varphi_\alpha = \psi_\alpha \text{ e } \varphi_\beta \neq \psi_\beta \\ v_{\omega, \varphi}(\delta)_p + u_{\omega, \varphi}(\delta)_\alpha + u_{\omega, \varphi}(\delta)_\beta & \iff \varphi_\alpha \neq \psi_\alpha \text{ e } \varphi_\beta \neq \psi_\beta \end{cases}$$

DIM. Basta tener presente le formule (2.2) valide per ogni $\gamma \in \mathcal{V}(\mathbb{G})$. \square

LEMMA 2.5. *Sia data una v -orientazione φ del grafo \mathbb{G} e siano ω e ω' due ℓ -orientazioni. Denotato ancora con*

$$\Phi_{\omega, \omega'} : \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, \omega, k) \longrightarrow \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, \omega', k)$$

l'isomorfismo indotto da $\Phi_{\omega, \omega'} : H_1(\mathbb{G}, \omega, k) \longrightarrow H_1(\mathbb{G}, \omega', k)$, si ha

$$u_{\omega, \varphi} = u_{\omega', \varphi} \circ \Phi_{\omega, \omega'}.$$

Inoltre per ogni $\delta \in \Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, k)$ si ha

$$u_{\omega, \varphi}(\delta)_p = \begin{cases} u_{\omega', \varphi}(\delta)_p & \iff p \in \mathcal{L}' \\ -u_{\omega', \varphi}(\delta)_p & \iff p \in \mathcal{L}'' \end{cases}$$

DIM. Basta tener presente il fatto che se $\sigma' = \Phi_{\omega, \omega'}(\sigma)$, per ogni lato p di \mathbb{G} con un estremo nel vertice γ , si ha

$$\partial_\omega(p)_\gamma \cdot \sigma(p)_p = \partial_{\omega'}(p)_\gamma \cdot \sigma'(p)_p. \quad \square$$

Dai due lemmi precedenti segue immediatamente la:

PROPOSIZIONE 2.6. *Il rango dell'applicazione $w_{\omega, \varphi}$ non dipende dalle orientazioni ω e φ .*

Il corango di w , che è un invariante del grafo \mathbb{G} , verrà denotato col simbolo $w(\mathbb{G})$ e denominato *numero di Gauss* del grafo \mathbb{G} .

3 – Stime per il numero di Gauss di grafi trivalenti e triconnessi

In questo paragrafo stabiliremo stime per il numero di Gauss di un grafo \mathbb{G} . Supporremo d'ora in poi fissata una ℓ -orientazione e una ν -orientazione su ogni grafo considerato.

Ricordiamo che un grafo \mathbb{G} si dice *planare* se si può immergere in una 2-sfera. In tal caso \mathbb{G} decompone la sfera in $f(\mathbb{G})$ facce, dette facce di \mathbb{G} , tali che ogni lato p di \mathbb{G} è comune a due e due sole facce. Per ogni faccia di \mathbb{G} , se ne può considerare il numero i dei lati: si dice allora che la data faccia è *i -gonale* o un *i -agone*. Si indica con $f_i(\mathbb{G})$ il numero degli i -agoni di \mathbb{G} . Il teorema di Eulero afferma che

$$\nu(\mathbb{G}) - \ell(\mathbb{G}) + f(\mathbb{G}) = 2$$

e in particolare se \mathbb{G} è trivalente si ha

$$f(\mathbb{G}) = g(\mathbb{G}) + 1.$$

Per ogni faccia f di un grafo planare \mathbb{G} , si può considerare il ciclo σ_f associato a f . Esso è definito a meno del segno ed ha supporto sui lati della faccia f , ciascuno dei quali ha in σ_f molteplicità ± 1 .

LEMMA 3.1. *Sia \mathbb{G} un grafo trivalente. Allora:*

- (i) \mathbb{G} è 3-connesso se e solo se per ogni lato $p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})$ esistono due cicli σ e $\tau \in H_1(\mathbb{G}, k)$ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = p$;
- (ii) se \mathbb{G} è planare, allora è 3-connesso se e solo se per ogni lato $p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})$, le due facce della sfera che hanno p a comune si intersecano solo in p .

DIM. (i) Se \mathbb{G} è 3-connesso l'esistenza dei due cicli è assicurata dal teorema di Whitney che afferma che un grafo è h -connesso se e solo se per ogni coppia (α, β) di vertici distinti esistono almeno h cammini σ_i , $i = 1, 2, \dots, h$, da α a β tali che $\text{Supp}(\sigma_i) \cap \text{Supp}(\sigma_j) = \{\alpha, \beta\}$, per ogni coppia (i, j) con $i \neq j$.

Per provare l'altra implicazione basta dimostrare che se per ogni lato $p \in \mathcal{L}(\mathbb{G})$ esistono due cicli σ e $\tau \in H_1(\mathbb{G}, k)$ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = p$, allora per ogni coppia (α, β) di vertici distinti di \mathbb{G} , si ha $\delta(\alpha, \beta) \geq 3$, dove $\delta(\alpha, \beta)$ è il numero di (α, β) -sconnessione di \mathbb{G} . Infatti in tal caso

la 3-connessione di \mathbb{G} segue dal citato teorema di Whitney e dal teorema di Menger che assicura che se $\delta(\alpha, \beta) \geq 3$ allora esistono almeno tre cammini da α a β che a due a due hanno supporti che s'intersecano in $\{\alpha, \beta\}$. Supponiamo per assurdo $\delta(\alpha, \beta) \leq 2$ e sia E un insieme (α, β) -sconnettente di ordine minimo. Sia p un lato in E e ne siano α' e β' i vertici. Per l'ipotesi esistono due cammini σ e τ da α' a β' tali che $p \not\subset \text{Supp}(\sigma) \cup \text{Supp}(\tau)$ e tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \{\alpha', \beta'\}$. Dunque al più uno di tali cammini, diciamo τ , può contenere un altro eventuale lato q di E . Consideriamo un qualunque cammino ρ da α a β che contenga p . La catena $\rho' = \rho - \rho_p p + \rho_p \sigma$ è ancora un cammino da α a β il cui supporto non contiene p . Se $E = \{p\}$ siamo pervenuti ad un assurdo. Se $E = \{p, q\}$, essendo E un insieme (α, β) -sconnettente, si ha $q \subset \text{Supp}(\rho')$. Ma ragionando in modo analogo a quanto fatto prima, a partire da ρ' si può ottenere un nuovo cammino ρ'' da α a β il cui supporto non contiene né p né q , e così si perviene ancora ad un assurdo.

(ii) Per ogni faccia f di un grafo planare si può considerare il ciclo σ_f ad essa associato. Una delle implicazioni è dunque conseguenza di (i). Viceversa sia \mathbb{G} un grafo planare trivalente a 3-connesso e sia p un lato di \mathbb{G} per cui le due facce f' e f'' che hanno p a comune sono tali che $\text{Supp}(\sigma_{f'}) \cap \text{Supp}(\sigma_{f''}) \neq p$. In virtù della trivalenza di \mathbb{G} , esiste un lato $q \neq p$ tale che $q \subset \text{Supp}(\sigma_{f'}) \cap \text{Supp}(\sigma_{f''})$. Ma allora è chiaro che $\mathbb{G} - \{p, q\}$ non è connesso. \square

Una prima limitazione superiore per il numero di Gauss (cfr.[11], [12] e [6] per il paragone con la cosiddetta mappa di Gauss per curve algebriche lisce) è fornita dal seguente:

TEOREMA 3.2. *Per ogni grafo \mathbb{G} trivalente e 3-connesso si ha $w(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 2$.*

DIM. Notiamo che

$$(3.3) \quad \text{rg}(w) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v|_{\ker(u)}).$$

Basta dunque dimostrare che il rango dell'applicazione u è almeno $2g(\mathbb{G}) - 3$. Per ogni lato p di \mathbb{G} esistono, per il lemma 3.1, due cicli σ e τ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = p$. Si può supporre che $\sigma_p = \tau_p = 1$. Chiamiamo α e β gli estremi di p . Allora per l'osservazione 2.3,

$u(\sigma \wedge \tau)_\gamma = 0$ se $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$. Sia q il lato uscente da α e successivo a p e sia r il lato uscente da β e successivo a p nella v -orientazione. Vi sono essenzialmente due casi distinti da esaminare: $q \subset \text{Supp}(\sigma)$ e $r \subset \text{Supp}(\tau)$, oppure $q \cup r \subset \text{Supp}(\sigma)$.

Nel primo caso si ha

$$u(\sigma \wedge \tau)_\alpha = -[\partial(q)_\alpha \sigma_q] \cdot [\partial(p)_\alpha \tau_p] = -[-\partial(p)_\alpha \sigma_p] \cdot [\partial(p)_\alpha \tau_p] = 1,$$

$$u(\sigma \wedge \tau)_\beta = [\partial(p)_\beta \sigma_p] \cdot [\partial(r)_\beta \tau_r] = [\partial(p)_\beta \sigma_p] \cdot [-\partial(p)_\beta \tau_p] = -1.$$

Nel secondo, con calcoli analoghi si trova

$$u(\sigma \wedge \tau)_\alpha = u(\sigma \wedge \tau)_\beta = 1.$$

Sia T un albero generante di \mathbb{G} . Si ha

$$v(T) = v(\mathbb{G}) = 2g(\mathbb{G}) - 2 \quad , \quad \ell(T) = v(T) - 1 = 2g(\mathbb{G}) - 3.$$

Consideriamo l'applicazione

$$\bar{\delta}: \text{Cat}_1(T, k) \longrightarrow \text{Cat}_0(T, k) = \text{Cat}_0(\mathbb{G}, k)$$

definita associando ad un lato p di T tale che $\partial(p) = \beta - \alpha$, proprio $\bar{\delta}(p) = \partial(p) = \beta - \alpha$ se per p si verifica il primo caso, e invece $\bar{\delta}(p) = \beta + \alpha$ nel secondo caso. Poiché è chiaro che $\ker(\bar{\delta}) = (0)$, si ha $\text{rg}(\bar{\delta}) = 2g(\mathbb{G}) - 3$. D'altra parte, per quanto visto in precedenza, $\text{Im}(u)$ contiene $\text{Im}(\bar{\delta})$. Da ciò l'asserto. \square

A differenza di quanto avviene per la mappa di Gauss per le curve algebriche lisce (cfr. proposizione 4.9 di [12]), il limite superiore $3g - 2$ per $w(\mathbb{G})$, come vedremo, non è mai raggiunto se $g(\mathbb{G}) > 4$. Proviamo il seguente:

LEMMA 3.4. *Sia \mathbb{G} un grafo trivalente e 3-connesso di genere $g(\mathbb{G}) > 4$. Allora:*

- (i) *esistono due cicli $\sigma, \tau \in H_1(\mathbb{G}, k)$ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$ mentre $\text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau) \neq \emptyset$;*
- (ii) *se $g(\mathbb{G}) \geq 9$ allora vi sono $\gamma(\mathbb{G})$ lati distinti p di \mathbb{G} per cui esistono due cicli $\sigma, \tau \in H_1(\mathbb{G}, k)$ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$ mentre $\text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau) = p$.*

DIM. Si consideri un ciclo σ il cui supporto contenga il minimo numero $\gamma(\mathbb{G})$ di lati. Sopprimiamo dal grafo \mathbb{G} tutti i lati che escono dai vertici del supporto di σ . Si ottiene così un nuovo grafo \mathbb{G}' .

Per provare la (i) consideriamo una qualunque coppia (α, β) di vertici distinti di σ . Detti α' e β' gli altri estremi dei lati uscenti da α e β e non appartenenti al supporto di σ , proviamo che se $\gamma(\mathbb{G}) \neq 4$ allora $\alpha' \neq \beta'$. Infatti se fosse $\alpha' = \beta'$ esisterebbe un ciclo di \mathbb{G} di lunghezza al più $\lfloor \gamma(\mathbb{G})/2 \rfloor + 2$. Per la definizione di $\gamma(\mathbb{G})$, si avrebbe allora $\gamma(\mathbb{G}) \leq 4$ e se fosse $\gamma(\mathbb{G}) = 3$, essendo $g(\mathbb{G}) > 3$, il grafo \mathbb{G} conterrebbe il sottografo di figura 1, il che contraddice la 3-connessione.

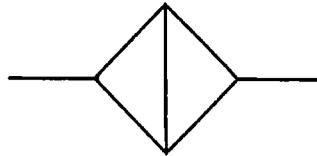


Fig. 1

Dunque se $\gamma(\mathbb{G}) \neq 4$, ogni vertice di \mathbb{G}' ha valenza almeno 2, e quindi ogni componente connessa di \mathbb{G}' ha genere positivo e per ogni suo vertice passa un ciclo. Da ciò segue l'asserto.

Se invece $\gamma(\mathbb{G}) = 4$ possiamo ridurci al caso in cui \mathbb{G} contenga il sottografo di figura 2.

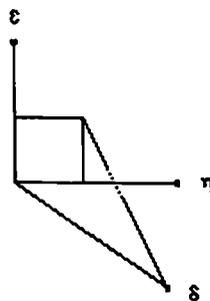


Fig. 2

Si noti che $\epsilon \neq \eta$, in quanto in caso contrario, essendo $g(\mathbb{G}) > 4$, sarebbe contraddetta la 3-connessione. Allora \mathbb{G}' ha soltanto il punto δ di valenza 1, e quindi ogni sua componente ha genere positivo e si può concludere come sopra.

Proviamo la (ii). A tale scopo osserviamo che, con le stesse notazioni già introdotte, per ogni coppia (α, β) di vertici distinti di σ , i vertici α' e β' , che sono distinti, non sono estremi di un lato di \mathbb{G} . Infatti in caso contrario, ragionando come già fatto in precedenza si avrebbe $\gamma(\mathbb{G}) \leq 6$. Inoltre per ogni coppia (λ, μ) di vertici di \mathbb{G}' che stanno nell'adiacenza di σ , detti λ', λ'' e μ', μ'' gli altri estremi dei lati uscenti da λ e μ rispettivamente e non contenuti in $\text{Ad}(\sigma)$, tali vertici sono tra loro distinti. In caso contrario, sempre dal solito ragionamento seguirebbe $\gamma(\mathbb{G}) \leq 8$.

Sia ora λ un vertice di \mathbb{G}' che sta nell'adiacenza di σ . Per ognuno degli altri vertici siffatti di \mathbb{G}' togliamo da \mathbb{G}' i due lati da esso uscenti e che non stanno in $\text{Ad}(\sigma)$. Si ottiene così un grafo \mathbb{G}'' , ogni vertice del quale ha almeno valenza 2. Quindi ogni componente connessa di \mathbb{G}'' ha genere positivo e per ogni suo vertice, tra cui λ , passa un ciclo. Da ciò l'asserto. \square

Possiamo ora migliorare la stima del teorema 3.2.

TEOREMA 3.5. *Sia \mathbb{G} un grafo trivalente di genere $g(\mathbb{G}) > 4$. Allora $w(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 3$.*

DIM. Per la (3.3) basta dimostrare che la restrizione di v a $\ker(u)$ non è nulla. In virtù del lemma 3.4 esistono due cicli $\sigma, \tau \in H_1(\mathbb{G}, k)$ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$ mentre $\text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau) \neq \emptyset$. Per l'osservazione 2.3, $\sigma \wedge \tau \in \ker(u)$. Sia p un lato adiacente a σ e a τ , di estremi α e β , e siano q e r i lati uscenti da α e β e successivi a p nella v -orientazione. Supporremo che $q \subset \text{Supp}(\sigma)$ e $r \subset \text{Supp}(\tau)$, sicché $\sigma_q \neq 0$ e $\tau_r \neq 0$. si ha allora

$$v(\sigma \wedge \tau)_p = [\partial(q)_\alpha \sigma_q] \cdot [\partial(r)_\beta \tau_r] \neq 0$$

e quindi $v(\sigma \wedge \tau) \neq 0$. \square

La dimostrazione del precedente teorema indica la via per dare buone stime superiori per il numero di Gauss. Dato un grafo \mathbb{G} , denotiamo con $e(\mathbb{G})$ il numero dei lati p di \mathbb{G} per cui esistono due cicli $\sigma, \tau \in H_1(\mathbb{G}, \mathbb{C})$ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$ mentre $\text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau) = p$. Per la parte (ii) del lemma 3.4 si ha $e(\mathbb{G}) \geq \gamma(\mathbb{G})$ se \mathbb{G} è 3-connesso e $\gamma(\mathbb{G}) \geq 9$.

TEOREMA 3.6. *Se \mathbb{G} è un grafo trivalente e 3-connesso si ha $w(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 2 - e(\mathbb{G})$, e quindi $w(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 2 - \gamma(\mathbb{G})$ se $\gamma(\mathbb{G}) \geq 9$.*

DIM. La dimostrazione del teorema 3.5 mostra che il rango della restrizione di v a $\ker(u)$ vale almeno $e(\mathbb{G})$, da cui l'asserto. \square

OSSERVAZIONE 3.7. È noto (cfr. [1], teorema IV.1) che

$$g \geq \begin{cases} 2^{\gamma(\mathbb{G})/2} & \text{se } \gamma(\mathbb{G}) \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2} 2^{(\gamma(\mathbb{G})-1)/2} > 2^{\gamma(\mathbb{G})/2} & \text{se } \gamma(\mathbb{G}) \not\equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Notiamo anche che se \mathbb{G} è un grafo planare si ha $\gamma(\mathbb{G}) \leq 5$. Infatti vale la relazione

$$(3.8) \quad \sum_i (6-i) f_i(\mathbb{G}) = 12$$

che non è compatibile con $\gamma(\mathbb{G}) > 5$ e cioè con $f_3(\mathbb{G}) = f_4(\mathbb{G}) = f_5(\mathbb{G}) = 0$. Quindi per un grafo planare non è mai verificata la seconda eventualità del teorema 3.6.

Volendo ottenere grafi con numero di Gauss basso, occorre ricercare grafi \mathbb{G} con $e(\mathbb{G})$ alto ad esempio $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$. Questo è l'oggetto del prossimo paragrafo.

4 - Grafi con numero di Gauss zero o uno

Proviamo il seguente:

LEMMA 4.1. *Sia \mathbb{G} un grafo trivalente con $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$. Allora $w(\mathbb{G})$ è uguale al corango dell'applicazione u .*

DIM. Per ogni lato p di \mathbb{G} , esiste un elemento k_p di $\ker(u)$ tale che $w(k_p) = v(k_p) = p$. Quindi $rg(v|_{\ker(u)}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$ e l'asserto segue dalla (3.3). \square

Possiamo ora dimostrare il seguente:

TEOREMA 4.2. *Sia \mathbb{G} un grafo planare trivalente. Si ha $w(\mathbb{G}) \geq 1$ e vale l'uguaglianza se e solo se \mathbb{G} è 3-connesso e si ha $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$.*

DIM. Fissiamo la v -orientazione di \mathbb{G} deducendola dal senso di rotazione antiorario attorno ai vertici di \mathbb{G} che si ottiene fissando una orientazione della sfera. Siano f e g facce di \mathbb{G} tali che $\text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g) \neq \emptyset$

e siano p_1, \dots, p_h lati di \mathbb{G} tali che $p_1 \cup \dots \cup p_h = \text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g)$. Dalla dimostrazione del teorema 3.2 segue facilmente che $u(\sigma_f \wedge \sigma_g) = \sum_{i=1, \dots, h} \pm \partial(p_i)$. Poiché lo spazio $H_1(\mathbb{G}, k)$ è generato dal sistema dei cicli $\{\sigma_f\}_{f \in \mathcal{F}(\mathbb{G})}$, $\text{Im}(u)$ è generata dalle immagini degli elementi $\{\sigma_f \wedge \sigma_g\}_{f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{G})}$. Poiché l'operatore di bordo ∂ ha corango 1, la u non è suriettiva e dalla (3.3) segue $w(\mathbb{G}) \geq 1$.

Sia $w(\mathbb{G}) = 1$. Allora u ha corango 1 e $v_{|\ker(u)}$ è suriettiva. Siano f e g facce di \mathbb{G} tali che $\text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g) \neq \emptyset$ e si abbia $p_1 \cup \dots \cup p_h = \text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g)$, sicché $u(\sigma_f \wedge \sigma_g) = \sum_{i=1, \dots, h} \pm \partial(p_i)$. Allora chiaramente il corango di u vale almeno h , dunque $h = 1$ e \mathbb{G} è 3-connesso per il Lemma 3.1, (ii). Non è difficile vedere ora che $\ker(u)$ è generato dagli elementi del tipo $\sigma_f \wedge \sigma_g$ con f e g facce tali che $\text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g) = \emptyset$. Sia p un lato di \mathbb{G} . Consideriamo un elemento δ di $\ker(u)$ tale che $v(\delta) = p$. In ogni espressione di δ quale combinazione lineare di elementi del tipo $\sigma_f \wedge \sigma_g$ con $\text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g) = \emptyset$, deve comparire necessariamente l'addendo $\sigma_{f'} \wedge \sigma_{g'}$ con f' e g' facce di \mathbb{G} che hanno p nella comune adiacenza ma non nel comune supporto. Infatti per ogni altro tipo di addendo $\sigma_f \wedge \sigma_g$ è $v(\sigma_f \wedge \sigma_g)_p = 0$. Deve perciò essere $\text{Supp}(\sigma_{f'}) \cap \text{Supp}(\sigma_{g'}) = \emptyset$. Inoltre si ha anche $\text{Ad}(\sigma_{f'}) \cap \text{Ad}(\sigma_{g'}) = p$ altrimenti non sarebbe $v(\delta) = p$. Ciò prova che $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$.

Viceversa sia \mathbb{G} un grafo 3-connesso tale che $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$. Per ogni lato p di \mathbb{G} siano f e g facce di \mathbb{G} tali che $p = \text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g)$. Possiamo supporre che $u(\sigma_f \wedge \sigma_g) = \partial(p)$. Pertanto u ha lo stesso corango dell'operatore di bordo, e cioè 1. Per il Lemma 4.1 si ha $w(\mathbb{G}) = 1$. \square

OSSERVAZIONI 4.3. (i) R. MIRANDA prova in [8] che si ha $w(\mathbb{G}) = 1$ per ogni grafo planare trivalente e 3-connesso tale che:

- (a) per ogni lato p di \mathbb{G} , dette f e g le facce tali che $p \subset \text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g)$, si ha $p = \text{Supp}(\sigma_f) \cap \text{Supp}(\sigma_g)$;
- (b) per ogni lato p di \mathbb{G} , dette f e g le facce tali che $p \subset \text{Ad}(\sigma_f) \cap \text{Ad}(\sigma_g)$, si ha $p = \text{Ad}(\sigma_f) \cap \text{Ad}(\sigma_g)$.

Dal Lemma 3.1 segue che la (a) è equivalente alla 4-connessione del grafo. È d'altra parte evidente che la (b) equivale a supporre $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$.

(ii) Se \mathbb{G} è un grafo planare con $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$ allora $f_3(\mathbb{G}) = f_4(\mathbb{G}) = 0$. Ad esempio se \mathbb{G} ha una faccia triangolare, i cicli associati alle facce adiacenti a ciascun lato del triangolo hanno supporti non di-

sgiuanti, dunque $e(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 6$. Se invece vi è una faccia quadrata, i cicli associati alle facce adiacenti ad ogni lato del quadrato hanno almeno anche il lato opposto del quadrato nella comune adiacenza. Dunque $e(\mathbb{G}) \leq 3g(\mathbb{G}) - 7$. Quindi $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3 - 4f_4(\mathbb{G}) - 3f_3(\mathbb{G})$ se e solo se ogni lato di \mathbb{G} che non appartiene ad un quadrato o a un triangolo contribuisce al numero $e(\mathbb{G})$.

Notiamo che dalla relazione (3.8) segue che il *dodecaedro*, che ha 12 facce pentagonali e verifica le ipotesi del teorema 4.2, è il minimo esempio di grafo che verifica tali ipotesi.

(iii) La 3-connessione e l'essere $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$ sono ipotesi indipendenti per i grafi planari trivalenti. Infatti esistono per ogni genere g , grafi \mathbb{G} con $g(\mathbb{G}) = g$, 3-connessi e con facce triangolari o quadrate.

Viceversa consideriamo la seguente costruzione. Siano \mathbb{G}' e \mathbb{G}'' due grafi planari 3-connessi e con $e(\mathbb{G}') = 3g(\mathbb{G}') - 3$ e $e(\mathbb{G}'') = 3g(\mathbb{G}'') - 3$. Siano f e g una faccia di \mathbb{G}' e una di \mathbb{G}'' e ne siano p, p' e q, q' delle rispettive coppie di lati. Fissiamo poi in ognuno dei suddetti lati un punto distinto dai vertici e siano essi ordinatamente α, α', β e β' . Consideriamo infine il grafo \mathbb{G} ottenuto dall'unione di \mathbb{G}' e \mathbb{G}'' introducendo i nuovi vertici α, α', β e β' e i nuovi lati r ed s , con r congiungente α e β , ed s congiungente α' e β' . È facile vedere che \mathbb{G} è planare, $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$ ma \mathbb{G} non è 3-connesso perché la rimozione di r ed s lo sconnette.

Ora daremo condizioni sufficienti su un grafo \mathbb{G} affinché il suo numero di Gauss sia nullo.

PROPOSIZIONE 4.4. *Sia \mathbb{G} un grafo trivalente e 3-connesso tale che $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$. Si ha $w(\mathbb{G}) = 0$ se è possibile dare una v -orientazione e una l -orientazione su \mathbb{G} in modo tale che valgano le seguenti due proprietà illustrate dalle figure 3 e 4:*

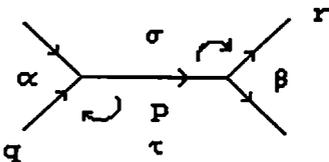


Fig. 3

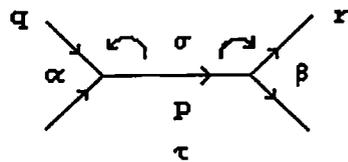


Fig. 4

(i) per ogni lato p di \mathbb{G} tale che $\partial(p) = \beta - \alpha$, esistono due cicli σ e τ di \mathbb{G} tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = p$, $\sigma_p = \tau_p = 1$, e tali che, detti q e r i lati uscenti da α e β rispettivamente e successivi a p , si abbia $q \subset \text{Supp}(\tau)$ e $r \subset \text{Supp}(\sigma)$;

(ii) esiste un lato p di \mathbb{G} tale che $\partial(p) = \beta - \alpha$, ed esistono due cicli σ e τ di \mathbb{G} tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = p$, $\sigma_p = \tau_p = 1$, e tali che, detti q e r i lati uscenti da α e β rispettivamente e successivi a p , si abbia $q \cup r \subset \text{Supp}(\sigma)$.

DIM. Per il lemma 4.1, $w(\mathbb{G})$ è uguale al corango di u . Ora notiamo che, come nella dimostrazione del teorema 3.2, la proprietà (i) consente di trovare, per ogni lato p di \mathbb{G} , un elemento π_p di $\Lambda^2 H_1(\mathbb{G}, \mathbb{C})$ tale che $u(\pi_p) = \partial(p)$. Similmente, se σ e τ sono i cicli di cui alla (ii), si ha $u(\sigma \wedge \tau) = \alpha + \beta$. Quindi $\text{Im}(u)$ contiene $\text{Im}(\partial)$ e $\alpha + \beta$. Poiché chiaramente $\alpha + \beta$ non appartiene a $\text{Im}(\partial)$ si conclude che u ha rango massimo. \square

Questa proposizione consente di costruire con una certa facilità dei grafi con numero di Gauss zero. In tal modo è possibile, tra l'altro, ottenere con semplici ragionamenti puramente combinatorici, una rapida dimostrazione del risultato principale di [6].

A tal fine ricordiamo la definizione dei cosiddetti *grafi di Petersen generalizzati* $\mathbb{G}_{n,h}$. Si fissino un intero $n \geq 3$ e un intero positivo $h < n$ e primo con n (noi denoteremo con k l'inverso di h modulo n). Il grafo $\mathbb{G}_{n,h}$ trivalente e 3-connesso con $g(\mathbb{G}_{n,h}) = n + 1$ consiste dei vertici $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, n$ (gli indici da ora in poi sono presi modulo n), e dei lati $p_i, q_i, r_i, i = 1, \dots, n$, con le seguenti proprietà di incidenza:

- (i) p_i congiunge α_i e α_{i+1} ;
- (ii) q_i congiunge β_i e β_{i+1} ;
- (iii) r_i congiunge α_i e β_{hi} .

Se n è dispari, e quindi $g(\mathbb{G})$ è pari, prenderemo sempre $h = 2$.

Fissiamo ora la ℓ -orientazione di $\mathbb{G}_{n,h}$ nel seguente modo:

$$\partial(p_i) = \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad \partial(q_i) = \beta_{i+1} - \beta_i, \quad \partial(r_i) = \beta_{hi} - \alpha_i$$

e la ν -orientazione determinata dalle permutazioni (p_{i-1}, r_i, p_i) e (q_{i-1}, r_{ki}, q_i) dei lati che escono da α_i e β_i rispettivamente.

LEMMA 4.5. Se $3h + 2 \leq n$, $k + 4 \leq n$ e se $k \geq 4$ oppure $k \geq 5$ a seconda che $h > 2$ o $h = 2$ rispettivamente, allora $w(\mathbb{G}_{n,h}) = 0$.

DIM. Proveremo che se $3h + 2 \leq n$ e $k + 4 \leq n$ allora $\mathbb{G}_{n,h}$ verifica le ipotesi della proposizione 4.4. Innanzitutto proviamo che $e(\mathbb{G}) = 3n$.

(a) per ogni lato p_i i due cicli σ e τ illustrati nella seguente figura 5:

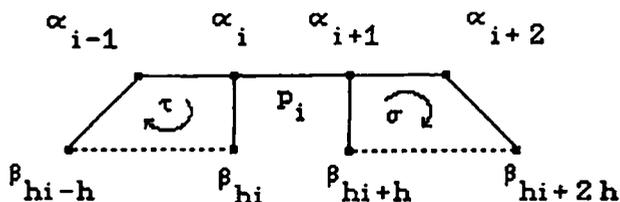


Fig. 5

e precisamente

$$\sigma = p_{i+1} + r_{i+2} - q_{hi+h} - \dots - q_{hi+2h-1} - r_{i+1}$$

$$\tau = p_{i-1} + r_i - q_{hi-h} - \dots - q_{hi-1} - r_{i-1}$$

hanno soltanto p_i nella comune adiacenza sempre che sia $3h + 2 \leq n$;

(b) per ogni lato q_i i due cicli σ e τ illustrati nella seguente figura 6:

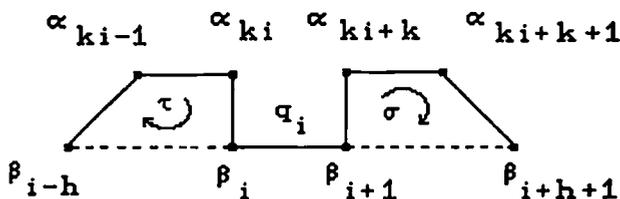


Fig. 6

e precisamente

$$\sigma = p_{ki+k} + r_{ki+k+1} - q_{i+1} - \dots - q_{i+h} - r_{ki+k}$$

$$\tau = p_{ki-1} + r_{ki} - q_{i-h} - \dots - q_{i-1} - r_{ki-1}$$

hanno soltanto q_i nella comune adiacenza sempre che sia $k + 4 \leq n$;

(c') per ogni lato r_i i due cicli σ e τ illustrati nella seguente figura 7:

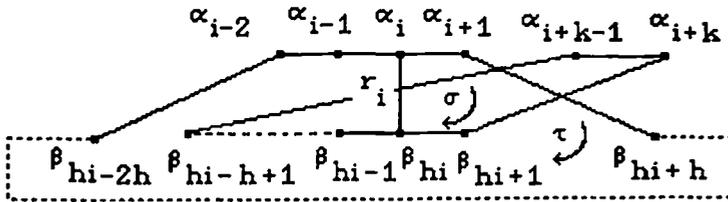


Fig. 7

e precisamente

$$\sigma = p_{i+k-1} + r_{i+k} - q_{hi-h+1} - \dots - q_{hi} - r_{i+k-1}$$

$$\tau = p_{i-2} + \dots + p_i + r_{i+1} - \sum_{j \neq hi-2h, \dots, hi+h-1} q_j - r_{i-2}$$

hanno soltanto r_i nella comune adiacenza sempre che sia $h \neq 2$ e $k \geq 4$;
 (c'') se $h = 2$ e $k \geq 5$, per ogni lato r_i i due cicli σ e τ illustrati nella seguente figura 8:

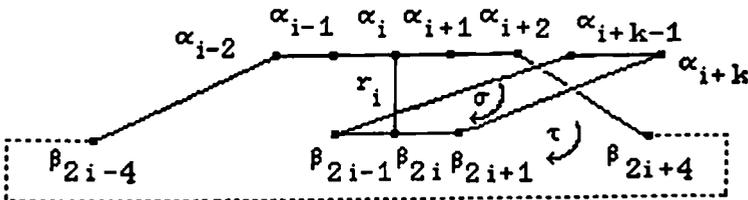


Fig. 8

e precisamente

$$\sigma = p_{i+k-1} + r_{i+k} - q_{2i-1} - q_{2i} - r_{i+k-1}$$

$$\tau = p_{i-2} + \dots + p_{i+1} + r_{i+2} - \sum_{j \neq 2i-4, \dots, 2i+3} q_j - r_{i-2}$$

hanno soltanto r_i nella comune adiacenza.

Ora verifichiamo la (i) dell'enunciato della proposizione 4.4. Ad esempio, per ogni lato p_i i cicli σ e τ indicati nella seguente figura 9:

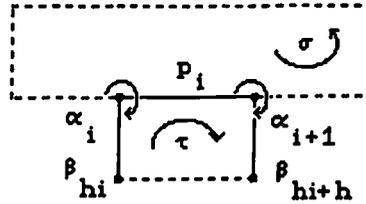


Fig. 9

e precisamente

$$\sigma = \sum_j p_j, \quad \tau = p_i + r_{i+1} - q_{hi} - \dots - q_{hi+h-1} - r_i$$

hanno soltanto p_i nel comune supporto e verificano la condizione richiesta. Similmente i cicli σ e τ illustrati nelle seguenti figure 10 e 11:

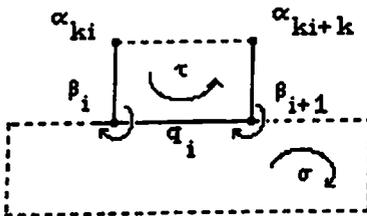


Fig. 10

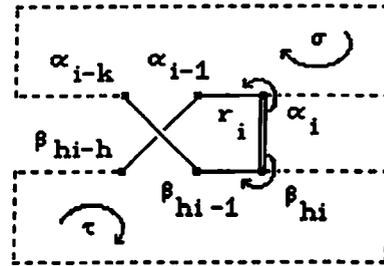


Fig. 11

e precisamente i cicli

$$\sigma = -p_{ki} - \dots - p_{ki+k-1} - r_{ki+k} + q_i + r_{ki}, \quad \tau = \sum_{j=1, \dots, n} q_j$$

e

$$\sigma = r_i - q_{hi-1} - r_{i-k} - \sum_{j \neq i-k, \dots, i-1} p_j$$

$$\tau = r_i + \sum_{j \neq hi-h, \dots, hi-1} q_j - r_{i-1} + p_{i-1}$$

rispettivamente verificano le condizioni richieste.

Infine proviamo che vale la (ii) della citata proposizione. Ciò è mostrato, in relazione ad ogni lato r_i , dall'esistenza dei cicli σ e τ indicati in figura 12:

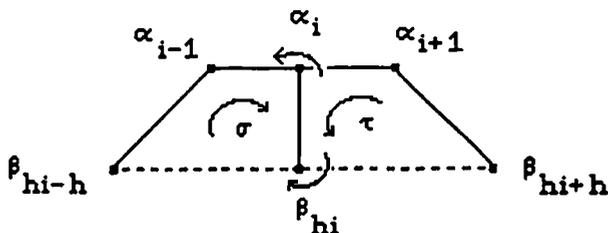


Fig. 12

e precisamente dai cicli

$$\sigma = p_{i-1} + r_i - q_{hi-h} - \dots - q_{hi-1} - r_{i-1}$$

$$\tau = r_i + q_{hi} + \dots + q_{hi+h-1} - r_{i+1} - p_i$$

□

PROPOSIZIONE 4.6. Per ogni $n \geq 9$ e $n \neq 10, 12$ sia h il minimo numero primo che non divide n . Allora si ha $w(\mathbb{G}_{n,h}) = 0$.

DIM. Se $n = 2k - 1$, allora $k + 4 \leq n$ e $k \geq 5$ sono verificate per $n \geq 9$. Se n è pari e $n \geq 14$ l'asserto segue mostrando, con una facile applicazione del postulato di Bertrand (cfr. [6], pg. 851) che $3h + 2 \leq n$ e $k + 4 \leq n$. □

Altri esempi di grafi con numero di Gauss zero si ottengono utilizzando la seguente costruzione. Sia \mathbb{G} un grafo e se ne considerino due lati distinti p e q . Siano α e β punti di p e q rispettivamente distinti dai vertici. Congiungendo α e β con un nuovo lato r si ottiene un nuovo grafo che denoteremo col simbolo $\mathbb{G}(p, q)$ e che diremo ottenuto da \mathbb{G} per *suddivisione* dei lati p e q . È chiaro che se \mathbb{G} è trivalente e 3-connesso, lo stesso accade per $\mathbb{G}(p, q)$ per ogni coppia di lati distinti p e q di \mathbb{G} .

Fissiamo ora l'attenzione sui grafi $\mathbb{G}_{n,2}$ con n dispari e $n \geq 11$ e consideriamo i grafi $\mathbb{G}'_{n,2} = \mathbb{G}_{n,2}(r_1, r_5)$. Rispetto a $\mathbb{G}_{n,2}$, $\mathbb{G}'_{n,2}$ possiede:

(a) due nuovi vertici α e β situati su r_1 e r_5 rispettivamente, oltre ai vertici $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, n$;

(b) un nuovo lato r che congiunge α e β , due lati $r_{1,1}, r_{1,2}$ [risp. $r_{2,1}, r_{2,2}$] invece del lato r_1 [risp. r_2] di $\mathbb{G}_{n,2}$, oltre ai lati $p_i, q_i, r_j, i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, n$ ma $j \neq 1, 5$, di $\mathbb{G}_{n,2}$.

Noi fisseremo le orientazioni di $\mathbb{G}'_{n,2}$ in modo che per i vertici e i lati del grafo che sono pure vertici e lati di $\mathbb{G}_{n,2}$ le orientazioni restino le stesse, mentre per i nuovi vertici e lati si abbia:

(i) $r_{1,1}, r_{1,2}$ [risp. $r_{2,1}, r_{2,2}$] abbiano le orientazioni indotte da quelle del lato r_1 [risp. r_2] di $\mathbb{G}_{n,2}$;

(ii) r sia orientato da α a β ;

(iii) Le v -orientazioni relative ad α e β sono quelle determinate dalle terne $(r_{1,1}, r, r_{1,2})$ e $(r_{2,1}, r_{2,2}, r)$.

Tutto ciò è illustrato nella seguente figura 13.

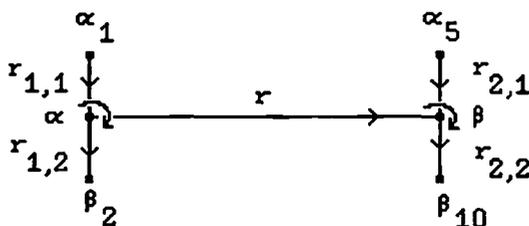


Fig. 13

LEMMA 4.7. Per ogni intero dispari $n \geq 11$ si ha $w(\mathbb{G}'_{n,2}) = 0$.

DIM. Di nuovo la dimostrazione si riduce a verificare che ricorrono per i grafi $\mathbb{G}'_{n,2}$ le ipotesi della proposizione 4.4. Proviamo in breve che $e(\mathbb{G}) = 3n$.

(a) Per ogni lato p_i si considerino i due cicli σ e τ illustrati nella figura 5. Questi verificano anche in $\mathbb{G}'_{n,2}$ la condizione richiesta.

(b) Per ogni lato q_i si considerino i due cicli σ e τ illustrati nella figura 6. Se questi non verificano in $\mathbb{G}'_{n,2}$ la condizione richiesta, vuol dire che uno dei lati r_{ki-1}, r_{ki} coincide con uno dei lati r_1, r_5 , ed uno dei lati r_{ki+k}, r_{ki+k+1} coincide con l'altro. Ma ciò non accade mai in relazione alla coppia di lati (r_{ki}, r_{ki+k}) , in quanto $k \geq 6$ e $n - k \geq 5$. Se allora, ad esempio, r_{ki-1} coincide con uno dei lati r_1, r_5 , basta sostituire il ciclo τ della figura 6 col ciclo τ' indicato nella seguente figura 14.

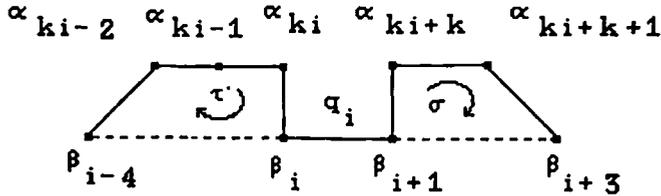


Fig. 14

In modo analogo si ragiona se invece r_{ki+k+1} coincide con uno dei lati r_1, r_5 . Si noti che i cicli σ e τ' hanno nella comune adiacenza soltanto q_i perché $k + 5 \leq n$ in quanto $n \geq 11$, ossia $k \geq 6$.

Una costruzione analoga, su cui non ci attardiamo, consente di adeguare i due cicli mostrati in figura 8 e relativi ai lati $r_j, j \neq 1, 5$, al caso in cui essi non verifichino la condizione richiesta in $G'_{n,2}$.

(c) Le seguenti figure 15, ..., 19 mostrano per ognuno dei lati $r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2}, r$, una coppia di cicli σ e τ aventi soltanto tali lati nella comune adiacenza.

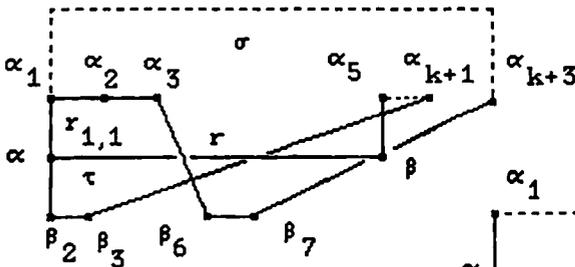


Fig. 15

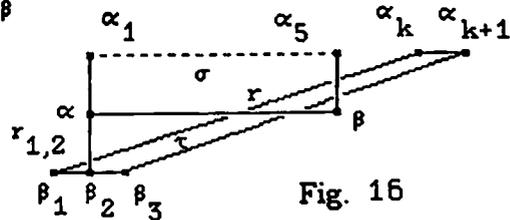


Fig. 16

Fig. 15

Fig. 16

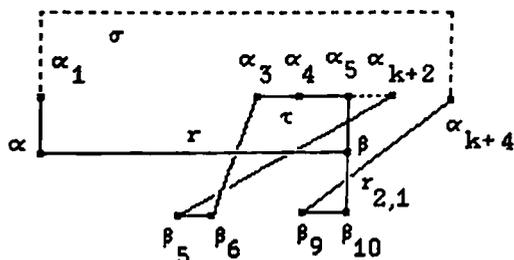


Fig. 17

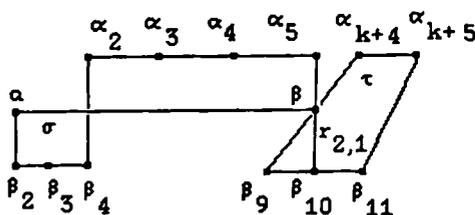


Fig. 18

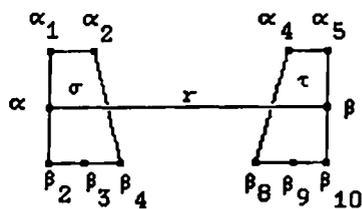


Fig. 19

Verifichiamo infine la (i) dell'enunciato della proposizione 4.4. Per i lati $p_i, q_i, r_j, i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, n$ ma $j \neq 1, 5$, i cicli indicati nelle figure 9, 10 e 11 rispettivamente verificano ancora le condizioni richieste. La seguente figura 20 mostra dei cicli σ, σ', τ e τ' che, scelti opportunamente a coppie, verificano le condizioni richieste per i lati $r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2}, r$.

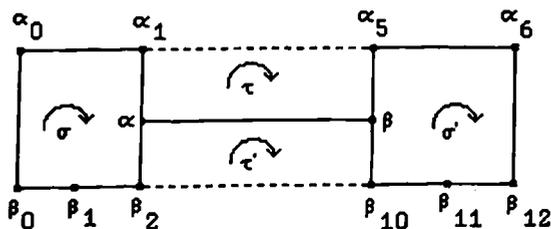


Fig. 20

Infine, quanto alla (ii) della proposizione 4.4 basta considerare ancora i cicli di cui alla figura 12. \square

Possiamo infine dimostrare il:

TEOREMA 4.8 (cfr. [6]). *Per ogni $g \geq 10$ e $g \neq 11$ esiste un grafo trivalente e 3-connesso \mathbb{G} tale che $g(\mathbb{G}) = g$ e $w(\mathbb{G}) = 0$.*

DIM. Dalla proposizione 4.6 segue l'asserto per ogni $g \geq 10$ e $g \neq 11, 13$. Dal lemma 4.7 si ha che $\mathbb{G}'_{11,2}$, che ha genere 13, ha anche esso numero di Gauss zero. \square

OSSERVAZIONI 4.9. (i) Le ipotesi del lemma 4.1, e conseguentemente quelle della proposizione 4.4, si possono indebolire nel modo seguente. Si supponga che per un lato r di \mathbb{G} esistano due cicli σ e τ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$ mentre $\text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau) = r$. Allora affinché $w(\mathbb{G})$ sia uguale al corango di u , basta che per ogni lato t di \mathbb{G} esistano due cicli σ e τ tali che $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$ e $\text{Ad}(\sigma) \cap \text{Ad}(\tau)$ è uguale a t o a $t \cup r$. Ciò segue senza nessuna difficoltà dalla stessa dimostrazione del lemma 4.1. Si capisce come in modo analogo si possano ottenere ulteriori indebolimenti delle ipotesi.

(ii) Il lemma 4.7 suggerisce l'idea che l'operazione di suddivisione su un grafo trivalente e 3-connesso, porta, di solito, ad ottenere un grafo con numero di Gauss minore di quello di partenza. Non ci attardiamo a precisare questa circostanza in generale ma facciamo un esempio descritto nella seguente figura 21.

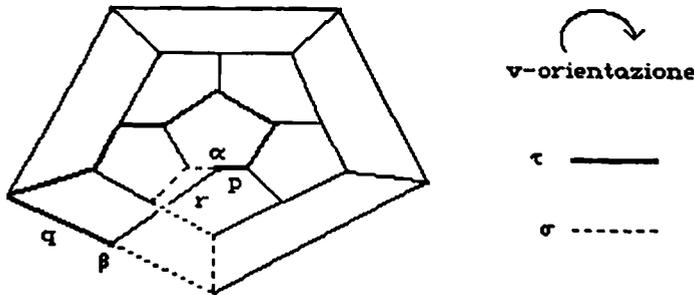


Fig. 21

Qui si tratta del grafo \mathbb{G} ottenuto dal dodecaedro per suddivisione dei lati p e q . Fissiamo una ℓ -orientazione di \mathbb{G} in modo qualunque mentre la v -orientazione si fissa, come descritto in figura 21, deducendola da una data orientazione del piano.

Notiamo che a \mathbb{G} si applica immediatamente quanto osservato in (i). È facile verificare inoltre che vale la (i) della proposizione 4.4. Per i lati di \mathbb{G} che sono anche lati del dodecaedro ciò è ovvio. Per i rimanenti cinque lati la cosa si verifica "a vista". Così pure si vede che per il lato r esistono due cicli σ e τ (ad esempio quelli indicati in figura) verificanti la (ii) della proposizione 4.4. Se ne conclude che \mathbb{G} è un grafo di genere 12 con numero di Gauss zero, ottenuto per suddivisione a partire dal dodecaedro il cui numero di Gauss è 1 (cfr. osservazione 5.3, (ii)).

Nel successivo n. 5 costruiremo infiniti grafi planari verificanti le ipotesi del teorema 4.2, in particolare ne otterremo per ogni genere $g \geq 11$, $g \neq 12$. A partire da questi, con un procedimento analogo a quello dianzi descritto per il dodecaedro, si potranno ottenere altri grafi di generi $g \geq 12$, $g \neq 13$ con numero di Gauss zero.

5 – Esistenza di grafi planari con numero di Gauss uno

Proviamo la seguente:

PROPOSIZIONE 5.1. *Per ogni $g \geq 11$, $g \neq 12$ esiste un grafo planare \mathbb{G} trivalente e 3-connesso, di genere g con $e(\mathbb{G}) = 3g - 3$, e quindi con $w(\mathbb{G}) = 1$. Per $g = 12$ non esiste un siffatto grafo.*

DIM. Costruiamo, per ogni $n \geq 5$, un grafo planare \mathbb{G}_n trivalente e 3-connesso, di genere $g(\mathbb{G}_n) = 2n + 1$, con $e(\mathbb{G}_n) = 3g(\mathbb{G}_n) - 3$. Verifica le condizioni richieste il grafo con due facce n -gonali e $2n$ facce pentagonali illustrato, per $n = 6$, nella figura 22.

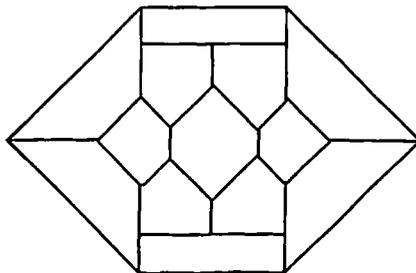


Fig. 22

Sia ora $n \geq 6$ e siano p e q due lati di una delle facce n -gonali che non siano adiacenti, né adiacenti ad uno stesso lato. Allora il grafo $\mathbb{G} = \mathbb{G}_n(p, q)$ ottenuto da \mathbb{G}_n per suddivisione dei lati p e q (cfr. n. 4) è planare, trivalente e 3-connesso, di genere $g(\mathbb{G}_n) + 1 = 2n + 2$ con $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$. Ciò dimostra la prima asserzione dell'enunciato.

Se $g = 12$, un grafo \mathbb{G} verificante le proprietà richieste avrebbe, per la formula (3.8), 13 facce di cui 12 pentagonali e una esagonale. \mathbb{G} conterrebbe allora la configurazione illustrata nella figura 23:

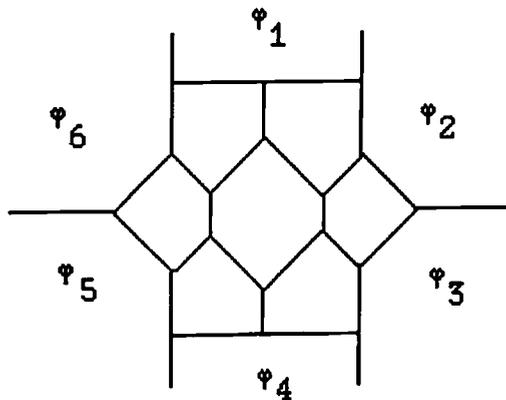


Fig. 23

Tenendo presente il fatto che le facce φ_i , $i = 1, \dots, 6$, sono pentagonali, si vede facilmente che esse devono essere distinte. Di conseguenza il grafo dovrebbe essere quello della figura 22 che ha però genere 13. \square

OSSERVAZIONE 5.2. (i) Usando la formula (3.8) e ragionando come nella dimostrazione precedente segue che, se $g = 13$, deve necessariamente aversi $f_5(\mathbb{G}) = 12$ e $f_6(\mathbb{G}) = 2$.

(ii) Non è difficile ottenere altri grafi verificanti le proprietà dell'enunciato della proposizione 5.1 con costruzioni diverse da quella presentata nella dimostrazione, ma ad essa analoghe. Ad esempio esistono, per ogni $n \geq 5$, grafi \mathbb{G} di genere $4n + 1$ con $f_n = 2$, $f_5 = f_6 = 2n$, di cui illustriamo nella figura 24 il caso $n = 5$.

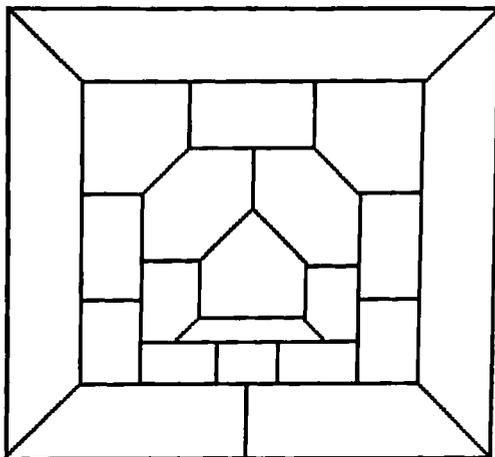


Fig. 24

Esemplifichiamo ora mediante due costruzioni come, a partire da un grafo planare \mathbb{G} trivalente e 3-connesso, di genere g con $e(\mathbb{G}) = 3g - 3$, se ne possano ottenere molti altri di genere maggiore con la stessa proprietà.

La prima costruzione consiste in iterate applicazioni della nozione di suddivisione già usata nel n. 4. Consideriamo un grafo \mathbb{G}_n , con $n \geq 6$. Denoteremo con $\mathbb{G}_{n,1}(h, k)$ il grafo ottenuto da \mathbb{G}_n per suddivisione di due lati p e q di una faccia n -gonale F in modo che da tale faccia se ne ottengano una h -gonale e una k -gonale. Perché sia conservata l'ipotesi di massimalità su $e(\mathbb{G})$, dovrà essere $5 \leq h \leq k \leq n - 1$; denotiamo con F_1 la faccia k -gonale. Fissiamo poi l'attenzione su una delle facce pentagonali di \mathbb{G}_n adiacenti a F . In $\mathbb{G}_{n,1}(h, k)$ a tale faccia corrisponde una faccia esagonale G . Si può ora operare una suddivisione su due lati di G di cui uno coincidente con il lato di F_1 , in modo da ottenere due facce pentagonali. Denotiamo con $\mathbb{G}_{n,2}(h, k)$ il grafo così ottenuto e indichiamo con F_2 la faccia $(k + 1)$ -gonale di questo grafo corrispondente a F_1 . Poiché $k + 1 \geq 6$, si può ancora operare una suddivisione su due lati di F_2 giacenti su p e q , in modo da ottenere un nuovo grafo $\mathbb{G}_{n,3}(h, k)$ in cui a F_2 corrispondano due facce, una pentagonale, e una F_3 k -gonale. Questo procedimento è illustrato nella figura 25 per $n = 6$ e $h = k = 5$.

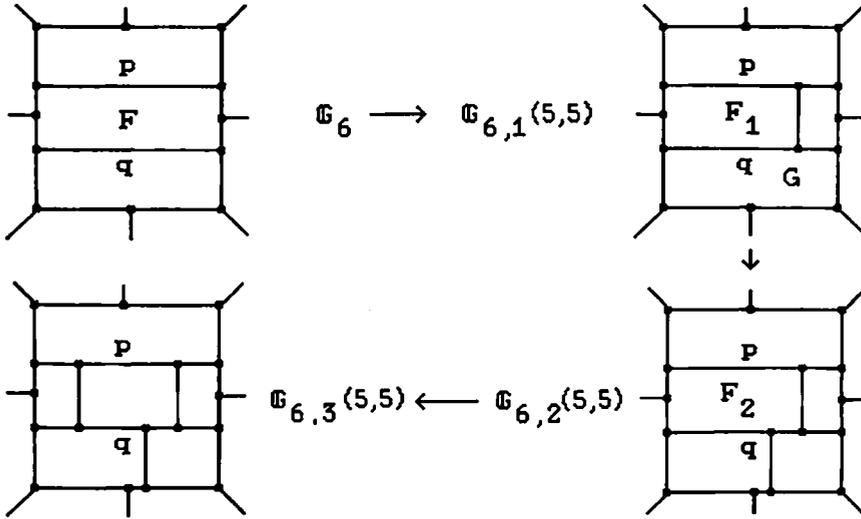


Fig. 25

È chiaro a questo punto come induttivamente si definisca, per ogni $r \geq 1$, il grafo $\mathbb{G}_{n,r}(h, k)$, ottenuto a partire da \mathbb{G}_n con r operazioni di suddivisione.

PROPOSIZIONE 5.3. (i) I grafi $\mathbb{G}_{n,r}(h, k)$ sono planari, trivalenti e 3-connessi, di genere $g = 2n + r + 1$ con $e(\mathbb{G}_{n,r}(h, k)) = 3g - 3$.

(ii) $\mathbb{G}_{n,r}(h, k)$ e $\mathbb{G}_{n,r}(h', k')$ sono isomorfi se e solo se $(h, k) = (h', k')$.

DIM. La (i) è ovvia. Per la (ii) osserviamo che se $k > k'$ allora

$$f_k(\mathbb{G}_{n,r}(h, k)) = f_k(\mathbb{G}_{n,r}(h', k')) + 1.$$

Ciò è chiaro se $r = 1$, poiché in tal caso $\mathbb{G}_{n,r}(h, k)$ ha una faccia k -gonale e $\mathbb{G}_{n,r}(h', k')$ nessuna, in quanto $k > k' \geq 5$. Inoltre qualche faccia k -gonale compare in $\mathbb{G}_{n,r}(h', k')$ solo dopo un certo numero r di suddivisioni (che non importerebbe calcolare, ma che precisamente è $r = 2(k - 6) + 1, 2(k - 6) + 2$ oppure $2(k - 6) + 3$ e corrispondentemente $f_k(\mathbb{G}_{n,r}(h', k'))$ vale 1, 2 e 1). Ma allora anche in $\mathbb{G}_{n,r}(h, k)$ compaiono le stesse facce k -gonali comparse in $\mathbb{G}_{n,r}(h', k')$, oltre alla faccia k -gonale relativa alla prima suddivisione della faccia n -gonale. \square

Sia $N(g)$ il numero dei grafi planari \mathbb{G} trivalenti e 3-connessi non isomorfi di genere g con $e(\mathbb{G}) = 3g - 3$. Presenteremo ora una costruzione che fornirà una stima esponenziale per $N(g)$.

Siano \mathbb{G}_1 e \mathbb{G}_2 due grafi planari, trivalenti e 3-connessi con $e(\mathbb{G}_i) = 3g(\mathbb{G}_i) - 3$, con $i = 1, 2$. Supponiamo che \mathbb{G}_1 e \mathbb{G}_2 abbiano entrambi una faccia n -gonale, cui sono associati i cicli σ_1 e σ_2 rispettivamente. Sia \mathbb{G}'_i il grafo ottenuto da \mathbb{G}_i rimuovendo le due facce e l'adiacenza di σ_i , $i = 1, 2$. Tali grafi posseggono esattamente n vertici di valenza 2, i rimanenti essendo di valenza 3. Stabilita una biezione φ tra questi vertici di valenza 2, si consideri il grafo \mathbb{G} ottenuto a partire da \mathbb{G}_1 e \mathbb{G}_2 unendo tra loro i vertici di valenza 2 che si corrispondono in φ . È chiaro che si potrà scegliere φ in n modi diversi in modo che \mathbb{G} sia ancora planare. Diremo allora che \mathbb{G} è ottenuto da \mathbb{G}_1 e \mathbb{G}_2 per *incollamento* sulle facce prescelte. Si ha che $g(\mathbb{G}) = g(\mathbb{G}_1) + g(\mathbb{G}_2) - n - 1$ e \mathbb{G} è ancora trivalente, 3-connesso e tale che $e(\mathbb{G}) = 3g(\mathbb{G}) - 3$.

In particolare, operando sul dodecaedro \mathbb{G}_5 con r successivi incollamenti su facce pentagonali, si ottengono grafi di genere $g_r = 11 + 5r$. A proposito di tali grafi proviamo il:

LEMMA 5.4. *Per ogni $g \geq 21$ e $g \equiv 11 \pmod{5}$ sia $r = (g - 11)/5$. Esistono $2^{r-2} + 2^{\lfloor (r-2)/2 \rfloor}$ grafi planari \mathbb{G} trivalenti, 3-connessi, di genere g e tali che $e(\mathbb{G}) = 3g - 3$ non isomorfi, ottenuti operando sul dodecaedro \mathbb{G}_5 con r successivi incollamenti su facce pentagonali.*

DIM. Consideriamo l'insieme \mathcal{P} delle applicazioni dell'insieme $\{2, \dots, r\}$ in $\{0, 1\}$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{P}$ definiremo un grafo planare \mathbb{G}_φ ottenuto operando sul dodecaedro \mathbb{G}_5 con r successivi incollamenti su facce pentagonali. Si consideri il grafo planare \mathbb{G} ottenuto per incollamento di due dodecaedri: si noti che c'è, a meno di isomorfismi, un unico grafo siffatto. \mathbb{G} ha 5 facce esagonali e 12 pentagonali: di queste, due sono adiacenti solo a facce pentagonali. Indichiamole con F e F' . Se $\varphi(2) = 0$ operiamo il successivo incollamento sulla faccia F' . Se invece $\varphi(2) = 1$ operiamo il successivo incollamento su una faccia adiacente a F' . Anche qui tali operazioni possono farsi, a meno di isomorfismi, in un unico modo. In entrambi i casi il grafo ottenuto ha, oltre a F , un'unica faccia F'' pentagonale adiacente soltanto a facce pentagonali. Se $\varphi(3) = 0$ operiamo il terzo incollamento sulla faccia F'' . Se invece $\varphi(3) = 1$ operiamo

l'incollamento su una faccia adiacente a F'' . È chiaro come, procedendo in tal modo, si pervenga a definire induttivamente il grafo \mathbb{G}_φ . Notiamo che il grafo ottenuto ha di nuovo, oltre a F , un'unica faccia pentagonale adiacente soltanto a facce pentagonali. Diremo che F è la prima e l'altra è la seconda faccia siffatta.

Per provare l'asserto noi proveremo che \mathbb{G}_φ è isomorfo a \mathbb{G}_ψ se e solo se o $\varphi = \psi$ oppure $\varphi = \psi'$ dove $\psi'(i) = \psi(r + 2 - i)$ per ogni $i = 2, \dots, r$. Se $\varphi = \psi$ oppure se $\varphi = \psi'$ per ogni $i = 2, \dots, r$, allora chiaramente \mathbb{G}_φ è isomorfo a \mathbb{G}_ψ . Viceversa supponiamo che \mathbb{G}_φ sia isomorfo a \mathbb{G}_ψ . Poiché entrambi i grafi hanno due sole facce pentagonali aventi nella adiacenza soltanto facce pentagonali, nell'isomorfismo tali facce si devono corrispondere. Cambiando eventualmente ψ con ψ' , possiamo supporre che si corrispondano ordinatamente le prime. Di conseguenza si corrispondono anche i pentagoni ad esse adiacenti. È allora evidente che l'isomorfismo tra \mathbb{G}_φ e \mathbb{G}_ψ comporta che $\varphi(2) = \psi(2)$ e, reiterando questo ragionamento, si ottiene che $\varphi = \psi$. Da ciò segue facilmente l'asserto. \square

Possiamo ora provare il:

TEOREMA 5.5. *Si ha $N(g) \geq o(2^{g/5})$.*

DIM. L'asserto segue dal lemma 5.4 se $g \equiv 11 \pmod{5}$. Se $g \not\equiv 11 \pmod{5}$ basta considerare i grafi di genere g ottenibili da quelli costruiti nella dimostrazione del lemma 5.4 per successive opportune suddivisioni. \square

OSSERVAZIONE 5.6. È evidente che la stima ottenuta nel teorema 5.5 non è la migliore possibile. Infatti, come apparirà ormai chiaro, varie sono le possibili costruzioni per ottenere dei grafi del tipo di quelli di cui ci siamo qui occupati. È opportuno, per concludere, segnalare la stima asintotica ottenuta da BENDER e CANFIELD [2] sul numero di grafi possedenti certe proprietà di regolarità.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. BOLLOBAS: *Graph theory, an introductory course*, Springer Verlag, New York, (1979).
- [2] E.A. BENDER - R. CANFIELD: *The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequence*, J. Comb. Th., Ser. A, 24 (1978), 296-307.
- [3] D. BAYER - M. STILLMAN: *Macaulay, a computer algebra system 1981-1990*, diffuso gratuitamente dagli autori.
- [4] C. CILIBERTO - A. FRANCHETTA: *Curve poligonali, grafi e applicazione di Gauss*, Atti del Convegno "Giornate di Geometria", Caserta, Gennaio 1990.
- [5] C. CILIBERTO - R. MIRANDA: *Gaussian maps for certain families of canonical curves*, Preprint.
- [6] C. CILIBERTO - J. HARRIS - R. MIRANDA: *On the surjectivity of the Wahl map*, Duke Math. J., 57 (1988), 829-858.
- [7] C. CILIBERTO - A. VERRA: *On the surjectivity of the gaussian map for Prym-canonical line bundles on a general curve*, Preprint (1991).
- [8] R. MIRANDA: *The gaussian map for certain planar graphs*, Preprint (1989).
- [9] S. MORI - S. MUKAI: *The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11*, Algebraic Geometry, Springer L. N. in Math., 1016 (1983), 334-353.
- [10] J. WAHL: *The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity*, Duke Math. J., 55 (1987), 843-871.
- [11] J. WAHL: *Gaussian maps on algebraic curves*, J. Diff. Geom. 32 (1990), 77-98.
- [12] J. WAHL: *Introduction to gaussian maps on an algebraic curve*, in corso di stampa sugli atti del convegno di Geometria Algebrica, Trieste, 1989.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 22 marzo 1991
ed accettato per la pubblicazione il 15 maggio 1991
su parere favorevole di E. Sernesi e di G. Tallini*

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Ciro Ciliberto - Dipartimento di Matematica - Università di Roma "Tor Vergata" - Via O. Raimondo - 00173 Roma - Italia

Anna Franchetta - Dipartimento di Matematica - Università di Roma "La Sapienza" - P.le A. Moro, 2 - 00185 Roma - Italia