Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 217-233

# Calcolo umbrale e sistemi ortonormali

B. GERMANO - P.E. RICCI(*)

RIASSUNTO – *Vengono rivisti alcuni risultati classici sui sistemi di polinomi ortonormali rispetto alla misura di Stieltjes, considerando l'isomorfismo tra lo spazio duale* $\mathcal{P}^*$ *dello spazio dei polinomi in una variabile* $x$ *e l'algebra* $\mathcal{F}$ *delle serie di potenze formali.*

ABSTRACT – *The isomorphism between the dual space* $\mathcal{P}^*$ *of the space of polynomials in a single variable* $x$ *and the algebra* $\mathcal{F}$ *of the formal power series, is suitably considered, in order to revisit several classical results on orthonormal systems of polynomials associated with Stieltjes measures.*

KEY WORDS – *Combinatorics graph theory - Orthogonal polynomials.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 05A15 - 33A65

## – Introduzione

Il calcolo umbrale è stato introdotto da E.T. BELL in un significativo lavoro [2], che risale agli inizi degli anni quaranta, ma una soddisfacente sistemazione teorica è stata proposta solo in tempi recenti da G.C. ROTA [16] e S.M. ROMAN - G.C. ROTA [15].

Una naturale applicazione del punto di vista introdotto da G.C. Rota si riconnette alla teoria classica dei polinomi ortogonali secondo F. RIESZ [9]-[10] (cfr. anche: N.I. AKHIEZER [1], C. BREZINSKI [3], T.S. CHIHARA [4], A. GHIZZETTI - A. OSSICINI [7]).

Infatti, l'isomorfismo tra l'algebra $\mathcal{P}^*$ dei funzionali lineari sullo spazio dei polinomi in una variabile reale (o complessa) e quella $\mathcal{F}$ delle serie

(*)Lavoro svolto nell'ambito del G.N.I.M. del C.N.R..

di potenze formali, permette di mettere in evidenza le connessioni con la trasformata di Laplace-Stieltjes, in alternativa al procedimento ordinariamente seguito che si ricollega alla serie di Hamburger ed alla trasformata di Stieltjes.

Ne nascono, in modo naturale, i problemi consistenti nello studiare le perturbazioni dei sistemi di polinomi ortonormali, qualora la $\phi$-misura che li genera venga alterata mediante la somma (o, più in generale mediante una combinazione lineare a coefficienti non negativi) oppure mediante convoluzione, con una o più misure.

A tale problematica è dedicato, ad esempio, il lavoro di V.B. UVAROV [18].

Nei §§1 e 2 vengono richiamate, per comodità del lettore, le definizioni e prime proprietà relative al calcolo umbrale ed ai sistemi di polinomi ortonormali generati da una $\phi$-misura.

Nei §§3 e 4 vengono studiati i legami con la trasformata di Laplace-Stieltjes e vengono determinate le funzioni generatrici corrispondenti ai pesi dei polinomi ortogonali classici.

Nel §5 si considerano gli effetti delle perturbazioni del sistema ortonormale conseguenti alle più semplici perturbazioni della $\phi$-misura.

## 1 – Richiami sul calcolo umbrale

Sia $P$ l'algebra dei polinomi in una variabile reale (o complessa) $x$. Indichiamo con $\mathcal{P}^*$ lo spazio vettoriale duale dei funzionali lineari su $P$.

Se $c \in \mathcal{P}^*$ poniamo

$$c_k := c(x^k) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.1}$$

e sia

$$c(p(x)) = c\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k c_k$$

il valore che il funzionale $c$ assume sul polinomio $p(x)$.

I numeri reali $c_k$ sono detti *momenti* del funzionale $c$.

Per ogni intero $k \geq 0$, consideriamo il particolare funzionale lineare $D_0^{(k)}$ che associa ad ogni polinomio $p(x) \in \mathcal{P}$ il valore della sua derivata $k$-esima calcolata nell'origine:

$$D_0^{(k)}(x^k) = h!\delta_{h,k} \tag{1.2}$$

($\delta_{h,k}$ = delta di Kronecker).

È ben noto (cfr. ad es. [15]) che ogni funzionale lineare $c \in \mathcal{P}^*$ può essere rappresentato nella forma:

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} D_0^{(k)} . \tag{1.3}$$

La formula (1.3) mette in luce l'*isomorfismo* tra lo spazio vettoriale $\mathcal{P}^*$ e lo spazio $\mathcal{F}$ delle serie di potenze formali in una variabile. Nel seguito indicheremo tale variabile con $-z$, intendendola generalmente come una variabile complessa.

Al funzionale lineare $c$ resta allora biunivocamente associata la serie di potenze formale:

$$c \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{k!} z^k \tag{1.4}$$

OSSERVAZIONE 1. In generale allo sviluppo in serie di potenze (1.4) non è possibile associare alcuna funzione della variabile complessa $z$. Infatti, fino ad ora, non è stata fatta alcuna ipotesi sul raggio di convergenza di tale serie.

Nel seguito dedicheremo particolare attenzione al caso in cui il raggio di convergenza $R$ sia diverso da zero. In tal caso, se poniamo, per $|z| < R$:

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{k!} z^k , \tag{1.5}$$

si ha:

$$c_k = (-1)^k D_0^{(k)}(f(z)) .$$

Di conseguenza, il funzionale lineare $c$ può essere esteso allo spazio delle funzioni analitiche in un intorno dell'origine, nel modo seguente:

$$c(f(z)) = c(f) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} D_0^{(k)}(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k^2}{k!} , \tag{1.6}$$

e quindi, per la (1.5), si può scrivere formalmente:

$$c(f) = f(c), \qquad (c^k := c_k). \tag{1.7}$$

Il menzionato isomorfismo permette di introdurre in $\mathcal{P}^*$ un prodotto. Infatti, poiché $\mathcal{F}$ è un algebra, anche lo spazio $\mathcal{P}^*$ può essere dotato di una operazione di prodotto.

A tal fine è sufficiente porre:

$$\begin{aligned} c * \gamma &\longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{k!} z^k \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \gamma_h}{h!} z^h = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} c_h \gamma_{n-h}\, z^n, \end{aligned} \tag{1.8}$$

cioè, per la (1.3):

$$c * \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} c_h \gamma_{n-h} D_0^{(n)}. \tag{1.9}$$

Si ha allora:

$$(c * \gamma)_k = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} c_h \gamma_{k-h} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.10}$$

OSSERVAZIONE 2. La (1.10), con una caratteristica notazione umbrale, viene di solito scritta nella forma:

$$(c * \gamma)_k = (c + \gamma)^k, \qquad (c^h := c_h\,; \gamma^h := \gamma_h). \tag{1.11}$$

L'algebra $\mathcal{P}^*$ è chiamata *algebra umbrale*. Di essa sono note svariate applicazioni alla soluzione di diversi problemi, (cfr. ad es. [2], [6], [15], [16], [17]).

Per concludere questo paragrafo, osserviamo che se al funzionale lineare $c$ è associato lo sviluppo in serie di potenze (1.4), alla serie di potenze ottenuta derivando termine a termine, corrisponde il funzionale $c'$ i cui momenti sono dati da:

$$c'(x^k) = c_{k+1} = c(x^{k+1}), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

Ovviamente, se il raggio di convergenza della serie (1.4) è diverso da zero, di modo che sussiste la (1.5), al funzionale lineare $c'$ corrisponde la funzione derivata $f'$:

$$c' \longleftrightarrow f'(z)\,.$$

Per tale motivo il funzionale $c'$ può essere chiamato funzionale derivato del funzionale $c$.

Ulteriori estensioni ed applicazioni delle formule citate in questo paragrafo si possono trovare negli articoli sopra menzionati.

## 2 – Richiami sui polinomi ortonormali rispetto ad una assegnata $\phi$-misura

Nel seguito verranno considerati unicamente i funzionali lineari $c \in \mathcal{Q}^* \subset \mathcal{P}^*$ che possono essere rappresentati nel seguente modo:

$$c(p(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)d\phi(x) = \int_{a}^{b} p(x)d\phi(x) \tag{2.1}$$

dove $d\phi(x)$ è una assegnata *$\phi$-misura* generata sull'intervallo $(a,b)$ da una funzione reale della variabile reale $x$, *non decrescente, non costante, con supporto* $(a,b)$ (cfr. ad es. [7, p. 86]). Supporremo che tutti i momenti della misura siano finiti, cioè che risulti:

$$x^k \in L^2_{d\phi}(a,b)\,, \qquad (\forall\, k = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Nel seguito ci riferiremo in modo particolare ai seguenti casi:

$$\text{I)} \qquad (a,b) = (0,+\infty)$$

$$\text{II)} \qquad (a,b) = (-\infty,+\infty)\,.$$

Nel caso in cui il supporto $(a,b)$ è limitato, ci si può ricondurre ai casi precedenti. Infatti, le formule che scriveremo continuano a valere se si cambia $(a,b)$ in $(a',b')$ $(a' < a\,;\, b' > b)$ e si prolunga $\phi(x)$ in modo opportuno (con valore costante) al di fuori dell'intervallo $(a,b)$. Allo stesso modo sarebbe possibile ricondurre il caso I) al caso II).

OSSERVAZIONE 3. Quando si presentano due diverse $\phi$-misure, siano per esempio $\phi_1(x)$, con supporto $(a_1, b_1)$, e $\phi_2(x)$ con supporto $(a_2, b_2)$, è sempre possibile considerare una loro combinazione lineare o la convoluzione delle due misure, pur di considerare come insieme di definizione della nuova misura l'intervallo $(a, b)$:

$$a := \min(a_1, a_2)\,; \qquad b := \max(a_1, a_2)\,.$$

È noto che, nelle ipotesi sopra ammesse, alla successione dei momenti, resta associato un sistema di polinomi ortonormali.

Si possono però presentare due possibilità:

A) Se la funzione $\phi(x)$ ha *infiniti punti di crescenza*, allora per ogni intero $n$ esiste un polinomio $p_n(x)$, di grado $n$, che appartiene al sistema di polinomi ortonormali rispetto alla assegnata $\phi$-misura.

Più precisamente, posto:

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} \Delta_{-1} := 1 \\ \Delta_n := \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} > 0\,, \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$, risulta: $\Delta_n > 0$, ed il sistema ortonormale rimane completamente definito dalle seguenti formule:

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} p_{-1}(x) = 0\,, \\ p_0\;(x) = c_0^{-1/2}\,, \\ p_n\;(x) = (\Delta_{n-1}\Delta_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$\text{(2.4)} \qquad A_n p_n(x) = (x - B_n)p_{n-1}(x) - A_{n-1}p_{n-2}(x)\,,$$

$$(2.5) \qquad A_n = \frac{\left(\Delta_{n-2}\Delta_n\right)^{1/2}}{\Delta_{n-1}}, \quad B_n = \int_a^b x p_{n-1}^2(x) d\phi(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Se si scrive:

$$(2.6) \qquad p_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \alpha_{n,h} x^h ,$$

è stata dimostrata (cfr. [12]-[13]) una relazione di ricorrenza per il calcolo dei $\Delta_n$ in cui compaiono solamente $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$. Allora, $p_n(x)$ può essere ricavato dalle (2.5)-(2.6). Si ha inoltre:

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \Delta_0 = c_0 , \\ \Delta_n = \Delta_{n-1}\left[\int_a^b x^{2n} d\phi(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_a^b x^n p_j(x) d\phi(x)\right)^2\right] = \\ \quad = \Delta_{n-1}\left[c_{2n} - \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{h=0}^{j} \alpha_{j,h} c_{n+h}\right)^2\right], \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

B) Se la funzione $\phi(x)$ ha solamente *un numero finito $m$, di punti di crescenza*, allora si ha:

$$\Delta_n > 0 \quad (\text{per} \quad n = 0, 1, \dots, m-1); \qquad \Delta_m = 0 .$$

In tal caso, è possibile ottenere solo un numero finito di polinomi ortonormali

$$\left\{p_n(x)\right\}_{n=0,1,\dots,m-1} .$$

## 3 – Legami con la trasformata di Laplace-Stieltjes

Per l'isomorfismo sopra ricordato tra $\mathcal{P}^*$ e $\mathcal{F}$, quando il raggio di convergenza della serie (1.5) è non nullo, è possibile collegare la $\phi$-misura con la funzione generatrice $f(z)$.

Vale infatti il seguente

TEOREMA I. *Sia $c \in Q^*$ il funzionale lineare definito dalla* (2.1) *rispetto ad un'assegnata $\phi$-misura. Se il raggio di convergenza della serie di potenze* (1.4) *è diverso da zero, allora la funzione analitica $f(z)$ definita dalla* (1.5) *è la trasformata di Laplace-Stieltjes della $\phi$-misura nel caso* I) *e la trasformata bilatera di Laplace-Stieltjes nel caso* II):

$$f(z) = \mathcal{L}[d\phi] \qquad (\textit{caso}\ \mathrm{I}))$$

$$f(z) = \mathcal{L}_{II}[d\phi] \qquad (\textit{caso}\ \mathrm{II})).$$

DIM. Sia $C$: $|z| < R$ il cerchio di convergenza della serie (1.5). Per ogni $z \in C$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie esponenziale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xz)^k}{k!} = e^{-xz}$$

è uniformemente convergente nel cilindro $C \times \mathbb{R}$, e di conseguenza in $C \times (a, b)$. Allora:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-xz)^k}{k!} d\phi(x) = \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xz)^k}{k!} d\phi(x) = \int_a^b e^{-xz} d\phi(x), \qquad (\mathrm{Re}\, z > -R). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ricordiamo che, nel caso I), è nota una condizione necessaria e sufficiente affinché $f(z)$ possa essere rappresentata nella forma:

$$f(z) = \int_a^b e^{-xz} d\phi(x), \qquad (\xi = \mathrm{Re}\, z > -R). \tag{3.2}$$

Infatti, per un teorema di S. BERNSTEIN (cfr. [17, pp. 154-157]), $f(z)$ può scriversi nella forma (3.2) se e solo se la funzione $f(\xi)$ è *completamente monotona* in $(-R, +\infty)$, cioè, per definizione, se e solo se risultano verificate le due condizioni:

i) $\quad f(\xi) \in C^{\infty}(-R, +\infty)$

ii) $\quad (-1)^k f^{(k)}(\xi) \geq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

(la definizione di *completa monotonia* in $[-R, +\infty)$ richiede, in aggiunta alle due condizioni i)-ii), che sia finito il limite: $\lim_{\xi \to -R^+} f(\xi)$).

Osservazione 4. Il Teorema I traduce, in un caso particolare notevole, la nota relazione tra la serie di Hamburger e la trasformata di Stieltjes. Il collegamento tra i due risultati si può ottenere ricordando che la trasformata di Stieltjes si ottiene iterando la trasformata di Laplace-Stieltjes (cfr. [19, p. 125]), e tenendo conto della relazione tra la funzione generatrice e la funzione generatrice esponenziale di una assegnata successione (cfr. ad es. [14, p. 29]).

Osservazione 5. Si osservi che nelle ipotesi del Teorema I il problema dei momenti risulta sempre determinato. Gli esempi di problema dei momenti indeterminato (cfr. ad es. [7, p. 76 e pp. 91-92]) sono collegati con $\phi$-misure non $\mathcal{L}$-trasformabili.

## 4 – Determinazione delle funzioni analitiche $f(z)$ corrispondenti ai sistemi di polinomi ortogonali classici

Si può osservare che, in corrispondenza ai polinomi ortogonali classici, è possibile determinare le funzioni analitiche $f(z)$ e collegarle con la trasformata ovvero la trasformata bilatera di Laplace dei corrispondenti pesi, rispettivamente nel caso $(a, b) = (0, +\infty)$ o $(a, b) = (-\infty, +\infty)$.

Polinomi di Legendre.

Si ha: $p(x) \equiv 1$; $(a, b) = (-1, 1)$. La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{-1}^{1} e^{-zx} dx = \left[ -\frac{1}{z} e^{-zx} \right]_{-1}^{1} = \frac{2i \sin hz}{z}.$$

Polinomi di Laguerre.

Si ha: $p(x) = e^{-x}$; $(a, b) = (0, +\infty)$. La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-zx} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+z)} dx = \left[ -\frac{1}{1+z} e^{-x(1+z)} \right]_{0}^{+\infty}$$

e quindi, per $|z| < 1$, si ha:

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

POLINOMI DI HERMITE.

Si ha: $p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$; $(a,b) = (-\infty, +\infty)$. La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{e}^{-zx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-zx} dx.$$

Poiché, come è noto:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+iwx} dx = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-w^2/4},$$

posto: $w = iz$, si ottiene:

$$f(z) = F(iz) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-zx} dx = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{z^2/4}.$$

POLINOMI DI LAGUERRE GENERALIZZATI.

Si ha: $p(x) = \mathrm{e}^{-x} x^\alpha$; $(a,b) = (0, +\infty)$ (con $\alpha > -1$). La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^\alpha \mathrm{e}^{-zx} dx = \int_{0}^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x(1+z)} dx.$$

Dalla formula [8, p. 317 - 3.381/4], si ottiene:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1), \qquad (\mathrm{Re}\,(1+z) > 0).$$

Per $\alpha = 0$, si ritrova l'espressione della $f(z)$ relativa ai polinomi di Laguerre.

OSSERVAZIONE 6. Nel caso dei polinomi di Laguerre, di Hermite e di Laguerre generalizzati, si può facilmente osservare il legame, espresso dal Teorema I, tra la funzione analitica $f(z)$ e la trasformata oppure la trasformata bilatera di Laplace. Si ha infatti rispettivamente:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \mathcal{L}[e^{-x}]$$

$$f(z) = \sqrt{\pi}\, e^{z^2/4} = \mathcal{L}[e^{-x^2}]$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1) = \mathcal{L}_{II}[e^{-x}x^{\alpha}]\,,$$

$$(\alpha > -1; \mathrm{Re}\,(1+z) > 0)\,.$$

POLINOMI DI CHEBYSHEV DI PRIMA SPECIE.
Si ha: $p(x) = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$; $(a,b) = (-1,1)$. La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-zx} dx = (\text{posto}: x = \cos t) =$$

$$= \int_{0}^{\pi} e^{-z\cos t} dt = (\text{per [8, p. 482-3.915/3]}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) I_0(z) =$$

$$= \pi I_0(z) = \pi J_0(iz)\,,$$

dove $I_0(z)$ è la funzione di Bessel modificata di prima specie e $J_0(iz)$ è la funzione di Bessel di prima specie.

POLINOMI DI CHEBYSHEV DI SECONDA SPECIE.
Si ha: $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$; $(a,b) = (-1,1)$. La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, e^{-zx} dx = (\text{posto}: x = \cos t) = \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, e^{-z\cos t} dt =$$

$$= (\text{per [8, p. 482 -3.915/4]}) = \sqrt{\pi}\,\frac{2}{z}\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) I_1(z) =$$

$$= \frac{\pi I_1(z)}{z} = \frac{J_1(iz)}{iz}\,.$$

POLINOMI DI JACOBI.

Si ha: $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$; $(a,b) = (-1,1)$ (con $\mathrm{Re}\,\alpha - 1$; $\mathrm{Re}\,\beta > -1$). La (3.2) diventa:

$$f(z) = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta e^{-zx} dx = (\text{per [8, p. 320 - 3.384]}) =$$

$$= 2^{(\alpha+\beta+1)} B(\beta+1, \alpha+1) e^z \, {}_1F_1(\beta+1; \alpha+\beta+2; -2z)$$

$$(\mathrm{Re}\,\alpha > -1; \mathrm{Re}\,\beta > -1),$$

dove ${}_1F_1(\beta+1; \alpha+\beta+2; -2z)$ è la funzione ipergeometrica confluente di Kummer:

$${}_1F_1(\beta+1; \alpha+\beta+2; -2z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)\dots(\alpha+\beta+n+1)} \frac{(-2z)^n}{n!}.$$

## 5 – Sistemi ortonormali collegati con combinazioni lineari o convoluzioni di assegnate $\phi$-misure

Le precedenti considerazioni inducono a considerare i sistemi ortonormali generati da combinazioni lineari a coefficienti positivi o da prodotti di convoluzione di assegnate $\phi$-misure.

Siano $c^{(h)} \in Q^*$ $(h = 1, 2, \dots, m)$ dei funzionali che ammettono la rappresentazione (2.1):

$$c^{(h)}(p(x)) = \int_a^b p(x) d\phi_h(x) \tag{5.1}$$

e siano $a_h \in \mathbb{R}^+$ $(h = 1, 2, \dots, m)$ delle costanti positive. Allora anche il funzionale lineare

$$c := \sum_{h=1}^{m} a_h c^{(h)} \tag{5.2}$$

appartiene a $Q^*$ ed è associato alla $\phi$-misura:

$$\phi(x) := \sum_{h=1}^{m} a_h \phi_h(x), \qquad (a_h \in \mathbb{R}^+ ; h = 1, 2, \dots, m) \tag{5.3}$$

*Ovviamente se almeno una delle funzioni $\phi_h(x)$ ha infiniti punti di crescenza, allora anche la $\phi(x)$ ha infiniti punti di crescenza. Il sistema ortonormale generato dai momenti*

$$c_k = \sum_{h=1}^{m} a_h c_k^{(h)} \qquad (\forall\, a_h \in \mathbb{R}^+ , k \in \mathbb{N}_0)$$

*è quindi completamente determinato.*

Esempio 1. Consideriamo il caso della somma di due $\phi$-misure (i coefficienti positivi della combinazione lineare si suppongono inglobati in ciascuna misura). Allora:

$$c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)}, \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$D_n = \left\| c_{h+k}^{(1)} + c_{h+k}^{(2)} \right\|, \qquad (h, k = 0, 1, \dots, n).$$

Siano:

$$q_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \beta_{n,h} x^h \tag{5.4}$$

i polinomi ortonormali associati alla misura

$$d\phi(x) = d\phi_1(x) + d\phi_2(x).$$

Allora, dalla (2.7) si ha:

$$D_0 = c_0^{(1)} + c_0^{(2)}$$

$$D_n = D_{n-1}\left[ \left( c_{2n}^{(1)} + c_{2n}^{(2)} \right) - \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{h=0}^{j} \beta_{j,h} \left( c_{n+h}^{(1)} + c_{n+h}^{(2)} \right) \right)^2 \right]$$

e dalle relazioni di ricorrenza (2.5)-(2.4), si ricavano i $q_n(x)$.

Come caso particolare, se la misura $d\phi_2(x)$ è una *misura di Dirac*, definita dai momenti:

$$c_k^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\phi_2(x) = s_1 x_1^k, \qquad (x_1 \in \mathbb{R}; s_1 \in \mathbb{R}^+),$$

le formule precedenti diventano:

$$c_k = c_k^{(1)} + s_1 x_1^k \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$D_n = \|c_{h+k}^{(1)} + s_1 x_1^{h+k}\|, \qquad (h, k = 0, 1, \dots, n)$$

e dalla (2.7) si ha:

$$D_0 = c_0^{(1)} + s_1$$

$$D_n = D_{n-1}\left[\left(c_{2n}^{(1)} + s_1 x_1^{2n}\right) - \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{h=0}^{j} \beta_{j,h}\left(c_{n+h}^{(1)} + s_1 x_1^{n+h}\right)\right)^2\right].$$

I $q_n(x)$, come nel caso generale, discendono allora dalle relazioni di ricorrenza (2.5)-(2.4).

Combinazioni lineari con un numero finito di misure di Dirac, si possono ottenere con un procedimento di iterazione.

Il problema della determinazione dei sistemi di polinomi ortonormali ottenuti alterando una data misura mediante una misura di Dirac è, peraltro, già stato risolto, in modo diretto, da U.V. UVAROV [18].

Tenendo conto della relazione con la trasformata di Laplace-Stieltjes, menzionata nel §3, si ha il seguente:

TEOREMA II. *Siano* $c^{(h)} \in Q^*$ $(h = 1, 2)$ *funzionali del tipo* (5.1). *Supponiamo inoltre che per ciascuno di essi le corrispondenti serie* (1.4) *abbiano raggio di convergenza non nullo. Allora anche il prodotto di convoluzione:* $c^{(1)} * c^{(2)}$ *appartiene a* $Q^*$, *e si ha:*

$$\left(c^{(1)} * c^{(2)}\right)(p(x)) = \int_a^b p(x) d(\phi_1 * \phi_2)(x), \tag{5.5}$$

*dove:*

$$(5.6)\qquad (\phi_1 * \phi_2)(x) = \int_0^x \phi_1(x-t)d\phi_2(t) \qquad (\textit{nel caso } \mathrm{I}))$$

$$(5.6)'\qquad (\phi_1 * \phi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x-t)d\phi_2(t) \qquad (\textit{nel caso } \mathrm{II})).$$

DIM. Considereremo solamente il caso I). Il caso II) si ottiene nello stesso modo.

Sia

$$c^{(h)} \longleftrightarrow f_h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k^{(h)}}{k!} z^k$$

$$(|z| < R_h\,;\ h = 1,2)\,.$$

Allora, per il Teorema I,

$$f_h(z) = \mathcal{L}[d\phi_h]\,, \qquad (\mathrm{Re}\, z > -R_h\,;\ h = 1,2)$$

e, per una nota proprietà del prodotto di convoluzione di misure:

$$f_1(z)f_2(z) = \mathcal{L}[d(\phi_1 * \phi_2)]\,, \qquad (\mathrm{Re}\, z > \max(-R_1, -R_2))\,.$$

La tesi è allora immediata conseguenza dell'isomorfismo tra $\mathcal{P}^*$ e $\mathcal{F}$. Si ha infatti:

$$\left(c^{(1)} * c^{(2)}\right)(p(x)) = \int_0^{+\infty} p(x)d(\phi_1 * \phi_2)(x)\,,$$

con $(\phi_1 * \phi_2)(x)$ dato dalla (5.6).

Il prodotto di convoluzione di un numero finito di misure, si può ottenere con un procedimento iterativo.

ESEMPIO 2. Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema II. Allora la formula (1.10) fornisce i momenti del prodotto di convoluzione delle due misure:

$$\int_a^b x^k d(\phi_1 * \phi_2)(x) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{n} c_h^{(1)} c_{n-h}^{(2)} .$$

Le formule generali (2.7)-(2.5)-(2.4) possono, anche questa volta, essere usate per il calcolo dei polinomi del sistema ortonormale associato.

## BIBLIOGRAFIA

[1] N.I. AKHIEZER: *The classical moment problem*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] E.T. BELL: *Postulational basis for the umbral calculus*, Amer. J. Math., 62 (1940).

[3] C. BREZINSKI: *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*, Birkhauser Verlag, ISNM n. 50, Basel, 1980.

[4] T.S. CHIHARA: *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon & Breach, New York, 1978.

[5] J. CIGLER: *Some remarks on Rota's umbral calculus*, Proc. Konink. Nederl. Akad. van Wetenschap., Ser. A, 81 (1978).

[6] A. GARSIA - S.A. IONI: *A new expression for umbral operators and power series inversion*, Proc. Amer. Math. Soc., 64 (1977).

[7] A. GHIZZETTI - A. OSSICINI: *Polinomi ortogonali e problema dei momenti*, Pubbl. Ist. Mat. Applicata Fac. Ingegneria Univ. Stud. Roma, n. 231, Roma, 1981.

[8] I.S. GRADSHTEYN - I.M. RYZHIK: *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York and London, 1965.

[9] I.I. HIRSCHMAN - D.V. WIDDER: *La transformation de convolution*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[10] M. RIESZ: *Sur le problème des moments*, I, II, III, Arkiv. Matem. Astr. Fys. 16 (1921), 16 (1921), 17 (1923).

[11] M. RIESZ: *Sur le problème des moments et le théorème de Parseval corréspondant*, Acta Lit. Ac. Sci. Szeged, 1, 1922-23.

[12] P.E. RICCI: *Sui determinanti di Hankel-Gram ed il calcolo per ricorrenza dei sistemi di polinomi ortonormali*, Rend. Mat., VII, 7 (1987).

[13] P.E. RICCI: *Sul calcolo dei determinanti di Hankel e dei sistemi di polinomi ortonormali*, Rend. Mat., VII, 10 (1990).

[14] J. RIORDAN: *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.

[15] S.M. ROMAN: *The formula of Faà di Bruno*, Amer. Math. Monthly, 87, (1980).

[16] S.M. ROMAN - G.C. ROTA: *The umbral calculus*, Advances in Math., 27 (1978).

[17] G.C. ROTA: *Finite operational calculus*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1975.

[18] V.B. UVAROV: *The connection between systems of polynomials orthogonal with respect to different distribution functions*, U.S.S.R. Comput. Math. and Phys. 9 (1969), 6.

[19] D.V. WIDDER: *An introduction to Transform Theory*, Academic Press, New York-London, 1971.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 12 aprile 1991*
*ed accettato per la pubblicazione il 16 settembre 1991*
*su parere favorevole di G. Roghi e di A. Avantaggiati*

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Bruna Germano - Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate - Via Antonio Scarpa, 10 - 00161 Roma - Italia

Paolo Emilio Ricci - Dipartimento di Matematica - Università degli Studi "La Sapienza" - Piazzale Aldo Moro, 2 - 00185 Roma - Italia