Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 235-249

Densità degli zeri di un sistema di polinomi s-ortogonali

M.R. MARTINELLI - A. OSSICINI - F. ROSATI

RIASSUNTO – *Mediante una opportuna valutazione dei cosiddetti numeri di Christofell viene stabilita la densità degli zeri di un sistema di polinomi s-ortogonali.*

ABSTRACT – *Density of the zeros of s-orthogonal polynomials is stated by means of convenient estimations of Christofell numbers.*

KEY WORDS – *Orthogonal polynomials.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 33A65

1 – Posizione del problema

È noto [4, 7, 11], che assegnata nell'intervallo $[-1,1]$ una funzione non decrescente $\alpha(x)$, dotata di infiniti punti di crescenza e *fissato un intero* $s \geq 0$, ha senso considerare il sistema $\{P_m(x), m = 0,1,2,\ldots\}$ dei polinomi $P_m(x)$ di grado m, s-ortogonali in $[-1,1]$ rispetto al peso $d\alpha(x)$.

Essi, a meno di una costante moltiplicativa (che supporremo fissata in modo che il coefficiente di x^m in $P_m(x)$ valga 1) sono *univocamente* individuati dalle

$$(1.1) \qquad \int_{-1}^{1} x^k [P_m(x)]^{2s+1} d\alpha(x) = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,m-1\,, m \geq 1\,.$$

Inoltre, se $s \geq 1$, $P_m(x)$, per $m \geq 1$, ha i suoi m zeri $x_{m,k}$ con $k = 1, \ldots, m$, tutti reali, distinti ed interni a $[-1, 1]$, come nel caso elementare ($s = 0$) del sistema dei polinomi ortogonali [6, 8]; porremo pertanto

$$-1 < x_{m,1} < x_{m,2} < \ldots < x_{m,m} < 1\,. \tag{1.2}$$

Si pone quindi la questione di esaminare se l'analogia con il sistema dei polinomi ortogonali valga anche per ciò che concerne la *densità* in $[-1, 1]$ degli zeri del predetto sistema $\{P_m(x)\}$ per $s \geq 1$.

Si rileva intanto la seguente fondamentale proprietà, dimostrata al n. 6, che impone di limitare l'indagine alle sole funzioni $\alpha(x)$ crescenti.

TEOREMA I. *Se $\alpha(x)$ è non decrescente in $[-1, 1]$ ed ivi dotata di infiniti punti di crescenza, se esiste un intervallo $[a, b] \subset [-1, 1]$ ove $\alpha(x)$ è costante, cioè $\alpha(b) = \alpha(a)$, in esso, ciascun polinomio $P_m(x)$, $m \geq 1$, ha al più uno zero.*

Ciò premesso, in questo lavoro si stabilisce la proprietà di densità degli zeri, per funzioni $\alpha(x)$ crescenti e soddisfacenti alla *ulteriore* condizione assai generale

$$\begin{cases} M(x-y)^{\gamma} \leq \alpha(x) - \alpha(y) \leq N(x-y)^{\delta}\,, \\ \forall (x,y) \in A\,,\ \text{con } A = \Big\{(x,y) | x \in (-1,1], y \in [-1,1), y < x\Big\}\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

ove γ, δ, M, N *sono costanti assegnate* in modo che

$$\gamma \geq 1\,, \quad \delta \in (0,1]\,, \quad 0 < M \leq 2^{\delta-\gamma} N\,. \tag{1.4}$$

Sotto tali ipotesi, in relazione alle notazioni (1.2), posto per comodità di scrittura

$$x_{m,0} = -1\,, \quad x_{m,m+1} = 1\,, \tag{1.5}$$

si ha la seguente fondamentale proprietà

$$\max_{k=0,1,\ldots,m} \left(x_{m,k+1} - x_{m,k}\right) = 0\Big(m^{-(2s+\delta)/(2s+\gamma)}\Big), m \to \infty\,, \tag{1.6}$$

che esprime la *densità degli zeri* del sistema $\{P_m(x)\}$ dei polinomi s-ortogonali in $[-1,1]$ rispetto alla assegnata $d\alpha(x)$.

È da segnalare il caso particolare notevole $\delta = \gamma = 1$ delle $\alpha(x)$ Lipschitziane a derivata (ove esiste) *non nulla* per le quali si ha il risultato ottimale

$$(1.6') \qquad \max_{k=0,1,\dots,m}(x_{m,k+1} - x_{m,k}) = 0(1/m)\,.$$

Perverremo allo scopo, attraverso una opportuna valutazione dei cosiddetti numeri di Christoffel $A_{2s,k}$. Individuati al n. 2 tali numeri attraverso una proprietà di estremo, al n. 3 vengono date limitazioni relative a polinomi, per mezzo di polinomi di Tchebychef di prima e seconda specie; al n. 4 si stabiliscono limitazioni superiori per i predetti $A_{2s,k}$; infine, dopo aver stabilito al n. 5 analoghe formule di minorazione, si perviene al n. 6 alle (1.6).

2 – Numeri di Christoffel

In quanto segue, non essendovi a temere confusione operando per m fissato, porremo nella (1.2) x_k in luogo di $x_{m,k}$, scriveremo cioè per gli m zeri di $P_m(x)$,

$$(2.1) \qquad -1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1\,;$$

ci riferiremo inoltre ad una $\alpha(x)$ crescente, non necessariamente verificante condizioni del tipo (1.3).

In corrispondenza ad *un fissato zero* x_k di (1.2), cioè

$$(2.2) \qquad -1 < x_k < 1$$

considerato il funzionale

$$(2.3) \qquad \frac{1}{(2s)!}\int_{-1}^{1}\left[\frac{P_m(x)}{P'_m(x_k)}\right]^{2s}\cdot\Big[\Pi_{m-1}(x,x_k)\Big]^2 d\alpha(x)$$

al variare di $\Pi_{m-1}(x,x_k)$ nella classe dei polinomi di grado $\leq m-1$, verificanti (per k fissato) la condizione

$$(2.4) \qquad \Pi_{m-1}(x_k,x_k) = 1\,,$$

sussiste la seguente fondamentale proprietà:

TEOREMA II. *Nelle ipotesi poste, il funzionale* (2.3) *assume il valore minimo*

$$A_{2s,k} = \frac{1}{(2s)!}\int_{-1}^{1}\left[\frac{P_m(x)}{P'_m(x_k)}\right]^{2s+2}\cdot\left[x-x_k\right]^{-2}d\alpha(x)\,, \tag{2.5}$$

in corrispondenza al particolare polinomio $\tilde{\Pi}_{m-1}(x,x_k)$ *dato da*

$$\tilde{\Pi}_{m-1}(x,x_k) = \frac{P_m(x)}{(x-x_k)P'_m(x_k)}\,. \tag{2.6}$$

DIM. Indicato con $\Pi_{m-1}(x,x_k)$ *un arbitrario* polinomio di grado $\leq m-1$, nella classe dei polinomi verificanti (2.4); introdotto il polinomio di grado $\leq 2m(s+1)-2$

$$\rho_k(x) = \frac{1}{(2s)!}\left[\frac{P_m(x)}{P'_m(x_k)}\right]^{2s}\cdot\left[\Pi_{m-1}(x,x_k)\right]^2 \tag{2.7}$$

ed osservato che

$$\rho_k^{(h)}(x_i) = 0\,, \quad \text{per} \quad h = 0,1,\ldots,2s-1\,; \quad i = 1,2,\ldots,m\,, \tag{2.8}$$

mentre si ha

$$\rho_k^{(2s)}(x_i) \geq 0\,, \quad \text{per} \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{2.9}$$

(con il valore 1 per $i = k$), ricorrendo alla formula di quadratura ipergaussiana [esatta per polinomi di grado $\leq 2m(s+1)-1$] [4], risulta

$$\int_{-1}^{1}\rho_k(x)d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} A_{2s,i}\rho^{(2s)}(x_i) \geq A_{2s,k} > 0\,, \tag{2.10}$$

con $A_{2s,k}$ dato in (2.5).

Confrontando (2.10) con (2.7) e (2.5), si vede che in (2.10) il segno = [valore minimo] è raggiunto, onde $A_{2s,k}$ è il minimo, se e solo se (2.7) ha la forma $\tilde{\rho}_k(x)$ che si ottiene ponendo $\tilde{\Pi}_{m-1}(x,x_k)$ di (2.6) in luogo di $\Pi_{m-1}(x,x_k)$. □

Da questo Teorema II, si può trarre per $s \geq 1$ una notevole formula di maggiorazione per i coefficienti di Christoffel $A_{2s,k}$ dati in (2.5).

Considerato che per la (2.10), in virtù di (2.7) risulta

$$A_{2s,k} \leq \frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} \left[\frac{P_m(x)}{P'_m(x_k)}\right]^{2s} \cdot \left[\Pi_{m-1}(x, x_k)\right]^2 d\alpha(x) \tag{2.11}$$

per ogni $\Pi_{m-1}(x, x_k)$ verificante (2.4), si può osservare che

$$A_{2s,k} \leq \frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} \left[\frac{P_m(x)}{P'_m(x_k)}\right]^{2s} \cdot \frac{(x-x_k)^{2s/(s+1)}}{(x-x_k)^{2s/(s+1)}} \cdot \left[\Pi_{m-1}(x, x_k)\right]^2 d\alpha(x) \leq$$

$$\leq \left(\int_{-1}^{1} \left[\frac{P_m(x)}{P'_m(x_k)}\right]^{2s+2} \cdot (x-x_k)^{-2} d\alpha(x)\right)^{s/(s+1)} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-1}^{1} (x-x_k)^{2s} \left[\Pi_{m-1}(x, x_k)\right]^{2s+2} d\alpha(x)\right)^{1/(s+1)},$$

ove i due fattori all'ultimo membro provengono da una applicazione della disuguaglianza di Schwarz-Hölder all'integrale a secondo membro.

Dall'ultima relazione scritta, confrontando con (2.5) si ha

$$A_{2s,k} \leq \left(A_{2s,k}\right)^{s/(s+1)} \cdot \left(\frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} (x-x_k)^{2s} \left[\Pi_{m-1}(x, x_k)\right]^{2s+2} d\alpha(x)\right)^{1/(s+1)}.$$

Risolvendo rispetto $A_{2s,k}$, si conclude col

TEOREMA III. *Nel caso $s \geq 1$, per i numeri di Christoffel vale la maggiorazione*

$$A_{2s,k} \leq \frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} (x-x_k)^{2s} \left[\Pi_{m-1}(x, x_k)\right]^{2s+2} d\alpha(x), \tag{2.12}$$

ove $\Pi_{m-1}(x, x_k)$ *è un qualsiasi polinomio di grado* $\leq m-1$ *verificante* (2.4)*; avendosi in particolare, stante* (2.5), (2.6)

$$A_{2s,k} = \frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} (x - x_k)^{2s} \left[\tilde{\Pi}_{m-1}(x, x_k)\right]^{2s+2} d\alpha(x) . \tag{2.13}$$

Si può osservare che (2.12) e (2.13) valgono anche nel caso $s = 0$.

3 – Formule di maggiorazione per polinomi

Indicato con $T_m(x)$ il polinomio di Tchebychef di *prima specie* [3, 9] ed ordine $m \geq 1$ ed introdotto il polinomio

$$\omega_m(x, y) = T_m(x)T_{m-1}(y) - T_{m-1}(x)T_m(y) \tag{3.1}$$

si consideri il polinomio

$$\Pi_{m-1}(x, y) = \frac{\omega_m(x, y)}{(x - y)\omega'_m(y, y)} \tag{3.2}$$

ove, qui e nel seguito, la derivazione va intesa rispetto alla variabile x, per $x = y$.

Detto I l'intervallo $[-1, 1]$, in virtù delle proprietà dei polinomi di Tchebycheff di prima specie si ha

$$|\omega_m(x, y)| \leq 2 , \qquad \forall\, (x, y) \in I \times I . \tag{3.3}$$

Introdotti i polinomi di Tchebycheff di *seconda specie* $V_m(x)$, legati a quelli di prima specie dalla

$$T'_m(x) = mV_{m-1}(x) \tag{3.4}$$

e, soddisfacenti $\forall\, x \in I$ le relazioni

$$\begin{cases} V_{m-1}(x)T_{m-1}(x) - V_{m-2}(x)T_m(x) = 1 , \\ V_{2m-2}(x) - 2V_{m-2}(x)T_m(x) = 1 , \end{cases}$$

dalla

$$\omega'_m(y,y) = T'_m(y)T_{m-1}(y) - T'_{m-1}(y)T_m(y) \tag{3.5}$$

risulta

$$\omega'_m(y,y) = m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}V_{2m-2}(y), \qquad \forall\, y \in I. \tag{3.6}$$

Poichè si ha[1]

$$V_{2m-2}(y) \geq 1 - m, \qquad \forall\, y \in I,$$

ne segue

$$\omega'_m(y,y) \geq m/2, \qquad \forall\, y \in I. \tag{3.7}$$

Tenendo conto di (3.2) e (3.3) si ha allora questa *prima formula di maggiorazione*

$$|\Pi_{m-1}(x,y)| \leq \frac{4}{m|x-y|}, \qquad \forall\, (x,y) \in I \times I,\ \text{con}\ x \neq y. \tag{3.8}$$

Per la nota relazione di Christoffel-Darboux [9]

$$\frac{\omega_m(x,y)}{x-y} = 1 + 2\sum_{k=1}^{m-1} T_k(x)T_k(y),$$

---

[1] Vedi [2]. $V_{m-2}(y)$ è funzione pari di y; limitatamente a $y \in [0,1]$, posto $y = \cos\varphi$, $\varphi \in [0,\pi/2]$ vale la

$$V_{2m-2}(\cos\varphi) = \frac{\sin(2m-1)\varphi}{\sin\varphi} \geq 1 - m.$$

Tale relazione, ovvia per $m = 1,2$, nel caso $m \geq 3$ si verifica osservando che basta provarla per $\varphi \in [\pi/(2m-1), 3\pi/(4m-2)]$ ove

$$\sin\varphi \geq \sin[\pi/(2m-1)] > [2\sqrt{2}/\pi]\cdot[\pi/(2m-1)] = 2\sqrt{2}/(2m-1).$$

essendo $|T_k(y)| \leq 1$, $\forall\, y \in I$, risulta

$$(3.9) \qquad \left|\frac{\omega_m(x,y)}{x-y}\right| \leq 1 + 2(m-1) < 2m\,, \qquad \forall\,(x,y) \in I \times I\,.$$

Ricordando (3.2) e (3.7) si ha la *seconda formula di maggiorazione*

$$(3.10) \qquad |\Pi_{m-1}(x,y)| < \frac{2m}{m/2} = 4\,.$$

4 – Maggiorazione dei numeri di Christoffel

Con le notazioni del n.2, si vogliono stabilire limitazioni superiori per i numeri di Christoffel, nella *ulteriore* ipotesi che $\alpha(x)$ sia in $[-1,1]$ crescente, Hölderiana di esponente δ, $\delta \in (0,1]$ e coefficiente $N > 0$; sussiste cioè [introducendo l'insieme A di (1.3)] la

$$(4.1) \qquad \alpha(x) - \alpha(y) \leq N(x-y)^{\delta}\,, \qquad \forall\,(x,y) \in A\,.$$

Sussiste allora il seguente

TEOREMA IV. *Nell'ipotesi* (4.1), *per i numeri di Christoffel* $A_{2s,k} > 0$ *dati in* (2.13), *valgono le maggiorazioni*

$$(4.2) \qquad A_{2s,k} < \frac{D_{s,\delta}}{m^{2s+\delta}}\,, \qquad k = 1,2,\ldots,m\,,$$

avendo posto

$$(4.3) \qquad D_{s,k} = \frac{N}{2-\delta} \cdot \frac{2^{4s+6}}{(2s)!}\,.$$

DIM. Riferendosi alla (2.12), si assuma in *particolare* il polinomio $\Pi_{m-1}(x, x_k)$ nella forma (3.2), con $y = x_k$; porremo cioè, per ogni fissato k, seguendo (2.4),

$$\Pi_{m-1}(x, x_k) = \frac{\omega_m(x, x_k)}{(x - x_k)\omega'_m(x_k, x_k)}. \tag{4.4}$$

Rileviamo subito che per $m = 1$, essendo $\Pi_0(x, x_k) = 1$, da (2.13) segue immediatamente la (4.2).

Nel caso $m \geq 2$, in corrispondenza al fissato x_k possono presentarsi le tre eventualità

$$-1 < x_k - \frac{1}{m} < x_k + \frac{1}{m} < 1, \tag{4.5$'$}$$

$$-1 < x_k \leq -1 + \frac{1}{m}, \tag{4.5$''$}$$

$$1 - \frac{1}{m} \leq x_k < 1. \tag{4.5$'''$}$$

Esaminiamo in dettaglio il caso (4.5′), gli altri casi presentando minori difficoltà.

Nel caso (4.5′) da (2.12) si ha (con ovvio significato dei simboli)

$$\begin{aligned} A_{2s,k} &\leq \frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} (x - x_k)^{2s} \left[\frac{\omega_m(x, x_k)}{(x - x_k)\omega'_m(x_k, x_k)}\right]^{2s+2} d\alpha(x) = \\ &= \frac{1}{(2s)!} \left(\int_{-1}^{x_k - 1/m} \ldots + \int_{x_k - 1/m}^{x_k + 1/m} + \ldots + \int_{x_k + 1/m}^{1} \ldots \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Operando separatamente sui tre integrali, per la (3.10) si ha

$$\int_{x_k - 1/m}^{x_k + 1/m} \ldots \leq \frac{4^{2s+2}}{m^{2s}} \int_{x_k - 1/m}^{x_k + 1/m} d\alpha(x) = \frac{4^{2s+2}}{m^{2s}} \left[\alpha\left(x_k + \frac{1}{m}\right) - \alpha\left(x_k - \frac{1}{m}\right)\right], \tag{4.7}$$

avendo osservato che, in questo caso $(x - x_k)^{2s} \leq m^{-2s}$.

In modo analogo, stante (3.8), per il terzo integrale di (3.6) si ha, integrando per parti,

$$\int_{x_k+1/m}^{1} \cdots \leq \left(\frac{4}{m}\right)^{2s+2} \int_{x_k+1/m}^{1} \frac{d\alpha(x)}{(x-x_k)^2} =$$

$$(4.8) \qquad = \left(\frac{4}{m}\right)^{2s+2} \left\{ \left[\frac{\alpha(x)-\alpha(x_k)}{(x-x_k)^2} \right]_{x_k+1/m}^{1} + 2 \int_{x_k+1/m}^{1} \frac{\alpha(x)-\alpha(x_k)}{(x-x_k)^3} dx \right\} <$$

$$< \left(\frac{4}{m}\right)^{2s+2} \left\{ \frac{2N}{2-\delta} m^{2-\delta} - m^2 \left[\alpha\left(x_k + \frac{1}{m}\right) - \alpha(x_k) \right] \right\},$$

avendo tenuto conto di (4.1).

Parimenti, per il primo integrale di (4.6) risulta

$$(4.9) \qquad \int_{-1}^{x_k-1/m} \cdots < \left(\frac{4}{m}\right)^{2s+2} \cdot \left\{ \frac{2N}{2-\delta} m^{2-\delta} - m^2 \left[\alpha(x_k) - \alpha\left(x_k - \frac{1}{m}\right) \right] \right\}.$$

Da (4.6), tenendo conto di (4.7), (4.8), (4.9), si ha quindi

$$(4.10) \qquad A_{2s,k} < \frac{1}{m^{2s+\delta}} \cdot \frac{4^{2s+3} N}{(2-\delta)(2s)!}$$

e cioè la (4.2), *nel caso* (4.5′).

Nel caso (4.5″), spezzando l'integrale a secondo membro di (4.6) in

$$\int_{-1}^{x_k+1/m} \cdots + \int_{x_k+1/m}^{1} \cdots$$

e operando separatamente con la (3.10) sul primo e con la (3.8) sul secondo integrale, si perviene alla

$$A_{2s,k} < \frac{1}{m^{2s+\delta}} \cdot \frac{4^{2s+2} N(4-\delta)}{(2-\delta)(2s)!},$$

che essendo $4-\delta < 4$ fa ritrovare la (4.2).

A questa stessa relazione si perviene nel caso (4.5''') onde il teorema risulta completamente dimostrato.

5 – Minorazione dei numeri di Christoffel

In corrispondenza agli m zeri $x_1, \ldots, x_m$ del polinomio s-ortogonale $P_m(x)$ [vedi (2.1)] si introducano i polinomi fondamentali di interpolazione di Lagrange [10]

$$L_1(x), L_2(x), \ldots, L_m(x), \tag{5.1}$$

di grado $m-1$, individuati rispettivamente dalle

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } k \neq j\,, \\ 1\,, & \text{per } k = j\,; \quad k, j = 1, 2, \ldots, m\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

Ciò premesso la (2.13) assume la forma

$$A_{2s,k} = \frac{1}{(2s)!} \int_{-1}^{1} (x - x_k)^{2s} \Big[L_k(x)\Big]^{2s+2} d\alpha(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{5.3}$$

Attraverso talune proprietà dei polinomi $L_k(x)$, perverremo a limitazioni inferiori per $A_{2s,k}$.

Osservato che

$$L_m(x) \geq L_m(x_m) = 1\,, \quad \forall\, x \in [x_m, 1]\,, \tag{5.4}$$

da (5.3) si ha

$$\begin{aligned} A_{2s,m} &> \frac{1}{(2s)!} \int_{x_m + (1 - x_m)/3}^{1} (x - x_m)^{2s} d\alpha(x) > \\ &> \frac{1}{(2s)!} \Big(\frac{1 - x_m}{3}\Big)^{2s} \Big[\alpha(1) - \alpha\Big(x_m + \frac{1 - x_m}{3}\Big)\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

In modo analogo si ottiene

$$A_{2s,1} > \frac{1}{(2s)!}\Big(\frac{1+x_1}{3}\Big)^{2s}\Big[\alpha\Big(x_1 - \frac{1+x_1}{3}\Big) - \alpha(-1)\Big]. \tag{5.6}$$

Dalla (5.3) segue poi, per $1 < k < m$

$$A_{2s,k} > \frac{1}{(2s)!} \int\limits_{x_k+(x_{k+1}-x_k)/3}^{x_{k+1}-(x_{k+1}-x_k)/3} (x - x_k)^{2s} [L_k(x)]^{2s+2} d\alpha(x),$$

da cui si ottiene

$$A_{2s,k} > \frac{1}{(2s)!}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big)^{2s} \int\limits_{x_k+(x_{k+1}-x_k)/3}^{x_{k+1}-(x_{k+1}-x_k)/3} [L_k(x)]^{2s+2} d\alpha(x); \tag{5.7}$$

in modo analogo si stabilisce la

$$A_{2s,k+1} > \frac{1}{(2s)!}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big)^{2s} \int\limits_{x_k+(x_{k+1}-x_k)/3}^{x_{k+1}-(x_{k+1}-x_k)/3} [L_{k+1}(x)]^{2s+2} d\alpha(x). \tag{5.8}$$

Dalle note diseguaglianze [5]

$$[L_{k+1}(x)]^{2s+2} + [L_k(x)]^{2s+2} \geq 2^{-2s-1}[L_{k+1}(x) + L_k(x)]^{2s+2}, \tag{5.9}$$

dopo aver osservato che [1]

$$L_{k+1}(x) + L_k(x) \geq 1, \quad \forall\, x \in [x_k, x_{k+1}], \tag{5.10}$$

da (5.7), (5.8) si ottiene

$$\begin{aligned} A_{2s,k} + A_{2s,k+1} > \frac{2^{-2s-1}}{(2s)!}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big)^{2s}\Big[\alpha\Big(x_{k+1} - \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big) + \\ - \alpha\Big(x_k + \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Supposto ora che $\alpha(x)$ soddisfi una condizione del tipo (con A dato in (1.3); $M > 0$ e $\gamma \geq 1$ *costanti* assegnate)

$$M(x-y)^\gamma \leq \alpha(x) - \alpha(y)\,, \qquad \forall\,(x,y) \in A\,, \tag{5.12}$$

valgono le seguenti formule di minorazione

$$\begin{cases} A_{2s,1} > \dfrac{M}{(2s)!} 2^\gamma \Big(\dfrac{1+x_1}{3}\Big)^{2s+\gamma}, \\ A_{2s,m} > \dfrac{M}{(2s)!} 2^\gamma \Big(\dfrac{1-x_m}{3}\Big)^{2s+\gamma} \end{cases} \tag{5.13}$$

e parimenti

$$A_{2s,k} + A_{2s,k+1} > \frac{M \cdot 2^{-2s-1}}{(2s)!} \Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big)^{2s+\gamma}, \tag{5.14}$$

per $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

6 – Limitazioni degli zeri

Supponiamo ora che per $\alpha(x)$ valgano le condizioni (1.3), (1.4). È allora evidente che valgono simultaneamente i risultati del n. 4 e del n. 5.

Da (4.10) e (5.13) si ha allora

$$\left.\begin{matrix} 1+x_1 \\ 1-x_m \end{matrix}\right\} < C_{s;\gamma,\delta} \cdot 2^{-\gamma/(2s+\gamma)} \cdot m^{-(2s+\delta)/(2s+\gamma)} \tag{6.1}$$

e le analoghe

$$0 < x_{k+1} - x_k < C_{s;\gamma,\delta} \cdot 2^{(2s+2)/(2s+\gamma)} \cdot m^{-(2s+\delta)/(2s+\gamma)}\,, \tag{6.2}$$

$(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, avendo posto

$$C_{s;\gamma,\delta} = 3 \cdot \Big(\frac{N}{M} \cdot \frac{2^{4s+6}}{2-\delta}\Big)^{1/(2s+\gamma)}. \tag{6.3}$$

Ricorrendo alle notazione (1.2), (1.4), è allora evidente che per k $0,\dots,m-1$ risulta

$$\max_{k=0,1,\dots,m}\left(x_{m,k+1}-x_{m,k}\right)=0\left(m^{-(2s+\delta)/(2s+\gamma)}\right)\,,\quad m\to\infty\,,$$

ciò che prova la richiesta *densità degli zeri* del sistema introdotto al n.

Dimostriamo ora il Teorema I del n. 1.

Sia $[a,b]\subset[-1,1]$, con $b-a<2$ un intervallo tale che $\alpha(a)=\alpha(b$ Considerato il sistema $\{P_m(x)\}$ dei polinomi s-ortogonali introdotti al n. 1 ed individuato da (1.1), mostriamo che per $m\geq 2$, ciascun polinomio $P_m(x)$ di grado m ha al più uno zero in $[a,b]$.

Ricordato che gli m zeri di $P_m(x)$ sono tutti distinti ed interni a $[-1,1]$ *procediamo per assurdo*. Se in $[a,b]$ cadessero almeno 2 zeri di $P_m(x)$, indicati con λ_m e Λ_m il minimo ed il massimo di tali zeri ed introdotto il polinomio di grado $m-2$

$$\varphi_{m-2}(x)=\frac{P_m(x)}{(x-\lambda_m)(x-\Lambda_m)}\,,\tag{6.4}$$

stante la s-ortogonalità (1.1) si avrebbe

$$\int_{-1}^{1}\varphi_{m-2}(x)\left[P_m(x)\right]^{2s+1}d\alpha(x)=0\,.\tag{6.5}$$

D'altra parte risulta

$$\varphi_{m-2}(x)\left[P_m(x)\right]^{2s+1}=\frac{\left[P_m(x)\right]^{2s+2}}{(x-\lambda_m)(x-\Lambda_m)}\geq 0\,,\quad\forall\,x\notin[\lambda_m,\Lambda_m]\,,\tag{6.6}$$

quindi, essendo $\alpha(x)$ costante in $[a,b]$, si avrebbe

$$\int_{-1}^{1}\varphi_{m-2}(x)\left[P_m(x)\right]^{2s+1}d\alpha(x)=\int_{-1}^{a}\varphi_{m-2}(x)\left[P_m(x)\right]^{2s+1}d\alpha(x)+$$

$$+\int_{b}^{1}\varphi_{m-2}(x)\left[P_m(x)\right]^{2s+1}d\alpha(x)\,,$$

e da ciò seguirebbe l'assurdo: infatti il primo membro dovrebbe valere 0 per la (6.5), mentre gli integrali a secondo membro per la (6.6) dovrebbero essere non negativi ed uno almeno positivo; onde la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. ERDOS - P. TURAN: *On interpolation III*, (Interpolatory theory of polynomials) Ann. Math. 41, (1940).

[2] G. FREUD: *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, New York, (1977).

[3] L. GATTESCHI: *Funzioni speciali*, Utet, Torino (1973).

[4] A. GHIZZETTI - A. OSSICINI: *Sulla esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane*, Rend. Mat. e Appl. S. VI, Vol. 8, (1975).

[5] D.S. MITRINOVIC: *Inequalities*, Springer-Verlag, New York (1970).

[6] A. OSSICINI: *Costruzione di formule di quadratura di tipo gaussiano*, Ann. Mat. Pura Appl., LXXII (1960).

[7] A. OSSICINI - F. ROSATI: *Sulla convergenza di funzionali ipergaussiani*, Rend. Mat. e Appl., S. VI, Vol. 2, (1978).

[8] T. POPOVICIU: *Sur la Distribution des zeros de certains polynomes minimisants*, Acad. R.P. Romine, Bulletin de la Section Scientifique, (10), (1929).

[9] T.J. RIVLIN: *The Chebyshev Polynomials*, John Wiley-Sons, New York, (1974).

[10] F. ROSATI: *Fondamenti della Teoria dell'interpolazione lineare*, Publ. Ist. Mat. Appl., Università Roma, Facoltà d'Ingegnarie (75), (1971).

[11] D.D. STANCU: *Asupra unor formule generale de integrare numerica*, Acad. R.P. Romine Stud. Cerc. Mat. (9), (1958).

Lavoro pervenuto alla redazione il 7 maggio 1991
ed accettato per la pubblicazione il 16 luglio 1991
su parere favorevole di L. Gori e di P.E. Ricci

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Maria Renata Martinelli - Alessandro Ossicini - Francesco Rosati - Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate - Via Antonio Scarpa, 10 - 00161 Roma - Italia