Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 251-256

Sur une caracterisation des hypersurfaces totalement géodésiques des variétés a courbure constante

M.P. PIU[(*)]

RIASSUNTO – *Sia S una ipersuperficie di una varietà riemanniana (M, g) a curvatura costante. In questo lavoro si determinano le ipersuperfici S munite di una struttura di contatto, F, totalmente geodetica tali che ogni geodetica tangente a F in un punto è anche una geodetica di (M, g).*

ABSTRACT – *Let S be a hypersurface of a Riemannian manifold (M, g) of constant curvature. In this paper we determine the hypersurfaces S endowed with a totally geodesic contact structure F such that each geodesic tangent to F at one point is also a geodesic for (M, g).*

KEY WORDS – *Contact structure - Totally geodesic structure.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 53C15

1 – Introduction

Soit F une distribution régulière de dimension r définie sur une variété riemannienne (M, g). Pour étudier F, il peut être utile de construire une métrique riemannienne sur M adaptée à cette distribution.

Par exemple, on peut chercher une métrique g telle que F soit *totalement géodésique*, c'est-à-dire telle que toute géodésique de M tangente à F en un point soit tangente partout à la distribution.

[(*)] Travail réalisé à l'Université de Haute-Alsace, F.S.T., Mulhouse, dans le cadre d'une bourse du CNR d'Italie et du Ministero della Pubblica Istruzione Italiana.

Il est bien connu que la forme de Pfaff

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} [x_{2i-1}dx_{2i} - x_{2i}dx_{2i-1}]$$

induit sur une hypersurface S de $\mathbb{R}^{2n+2}$ une forme de contact si et seulement si, pour chaque $x \in S$, l'hyperplan tangent à S en x ne passe pas par l'origine de $\mathbb{R}^{2n+2}$ ([1]).

Si l'hypersurface S est un hyperplan $\mathbb{E}^{2n+1}$ qui ne passe pas par l'origine de $\mathbb{R}^{2n+2}$ alors la forme ω induit, sur $\mathbb{E}^{2n+1}$, une forme de contact; on note F la structure de contact associé à cette forme. La structure de contact F est, sur $\mathbb{E}^{2n+1}$, totalement géodésique [2], et l'hypersurface $\mathbb{E}^{2n+1}$ contient, $\forall\, p \in \mathbb{E}^{2n+1}$, l'espace F_p car toutes le géodésiques intégrales de F sont des droites.

Un problème lié à cette propriété de F est à l'origine de cette Note. Il s'agit de savoir dans quelle mesure l'existence sur une hypersurface de $\mathbb{R}^{2n+2}$ d'une distribution de contact, F, totalement géodésique dont les géodésiques intégrales sont aussi géodésiques de $(\mathbb{R}^{2n+2}, g_{\text{euc}})$ caractérise l'hyperplan $\mathbb{E}^{2n+1}$.

Nour avons démontré ([3] Annexe) que *les seules hypersurfaces S de $(\mathbb{R}^4, g_{\text{euc}})$ sur lesquelles les géodésiques intégrales de la distribution de contact totalement géodésique déterminée par ω sont des droites, sont localement les hyperplans.*

La dimension de l'espace euclidien n'est pas essentielle pour la démonstration qu'on pourrait reécrire sans peine pour les hypersurfaces de $(\mathbb{R}^{2n}, g_{\text{euc}})$.

Cependant dans cette Note nous nous intéressons de manière plus générale aux hypersurfaces connexes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n+2}$ ayant une distribution de contact, F, totalement géodésique telle que toute géodésique intégrale de F est une droite. Nous démontrerons que l'hyperplan $\mathbb{E}^{2n+1}$ est caractérisé par la propriété riemannienne suivante:

THEOREME 1.1. *Soit $S \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ une hypersurface connexe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n+2}$, et soit F une distribution de contact totalement géodésique définie sur S. Si les géodésiques intégrales de F sont des droites alors S est localement une hypersurface totalement géodésique (un hyperplan).*

Ce résultat est encore valable pour les hypersurfaces des espaces non-euclidiens à courbure constante (M, g), dim. $M = 2n+2$, car en raison du Théorème de Beltrami un tel espace M admet localement des applications géodésiques sur $\mathbb{R}^{2n+2}$. Ainsi le théorème 1.1 est un cas particulier du théorème suivant.

THEOREME 1.2. *Soit S une hypersurface connexe d'une variété riemannienne (M, g) de dimension $2n+2$ et à courbure constante K. Soit F une distribution de contact totalement géodésique définie sur S. Si les géodésiques intégrales de F sont aussi des géodésiques de (M, g) alors S est localement une hypersurface totalement géodésique.*

Nous démontrerons le théorème 1.2 après avoir donné quelques généralités.

2 – Notations

Soit $S \subset (M, g)$ une hypersurface connexe, soit $\{e_\alpha\}$; $\alpha = 1, .., 2n+2$; un champ (local) de repères orthonormaux de M tels que les champs vectoriels $\{e_i\}$; $i = 1, \dots, 2n+1$; soient tangents à S. Si on note par ω^α le champ des corepères duaux correspondant, les équations de Cartan sont

$$(2.1) \qquad d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta, \qquad \omega^\alpha_\beta = -\omega^\beta_\alpha$$

$$(2.2) \qquad d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \Omega^\alpha_\beta, \qquad \Omega^\alpha_\beta = -\Omega^\beta_\alpha .$$

Dans notre cas la variété M est à courbure constante K donc

$$(2.3) \qquad \Omega^\alpha_\beta = K\omega^\alpha \wedge \omega^\beta .$$

Si $i \colon S \longrightarrow M$ est l'inclusion canonique, alors nous avons

$$i^*(\omega^{2n+2}) = 0;$$

$$i^*(\omega^j) = \varpi^j, \qquad j \neq 2n+2 .$$

La deuxième forme fondamentale h de S, dans le repère choisi est déterminée par

$$(2.4)\qquad h(e_j, e_k) = b_{jk} e_{2n+2}\,; \qquad\qquad j,k = 1,\dots,2n+1\,,$$

où

$$(2.5)\qquad b_{jk} = i^*(\omega_j^{2n+2})(e_k)\,.$$

Par rapport à la connexion riemannienne induite et au champ de corepères induit, les équations de structures pour S peuvent s'écrire:

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &d\varpi^k = \varpi^j \wedge \varpi_j^k\,;\\ &d\varpi_j^k \varpi_j^p \wedge \varpi_p^k + i^*(\varpi_j^{2n+2} \wedge \varpi_{2n+2}^k) + K\varpi^k \wedge \varpi^j\,. \end{aligned}$$

Nous avons montrée dans [2] que si on suppose que la distribution totalement géodésique F soit définie par la 1-forme $i^*(\omega^{2n+1}) = \varpi^{2n+1}$ alors les 1-forme de connexion ϖ_j^{2n+1} ont l'expression

$$(2.7)\qquad \varpi_i^{2n+1} = c_{ik}\varpi^k + a_i\varpi^{2n+1}\,, \qquad\qquad c_{ij} + c_{ji} = 0\,.$$

3 – Demonstration du Théorème 1.2

Soit F une structure de contact totalement géogésique définie sur l'hypersurface S.

Supposons avoir attaché à chaque point $x \in S$ l'hyperplan F_x de la distribution F, nous choisirons alors le champ de repères $\{e_i\}$ de telle façon que le vecteur $e_{2n+1,x}$ soit normal à F_x et donc que $F = \ker\varpi^{2n+1}$. Sous ces hypothèses on a:

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &\varpi_i^{2n+1} = c_{ik}\varpi^k + a_i\varpi^{2n+1}\,, \qquad\qquad c_{ij} + c_{ji} = 0\,,\\ &i,j = 1,\dots,2n \end{aligned}$$

où les fonctions c_{ij} sont telles que pour chaque indice i_0 fixé il existe ou moins un indice j_0 tel que $c_{i_0 j_0} \neq 0$, (en effet ϖ^{2n+1} est de contact si et seulement si $\varpi^{2n+1} \wedge (d\varpi^{2n+1})^n \neq 0$).

Soit h la deuxième forme fondamentale de S. Si $\bar{\nabla}$ et ∇ désignent, respectivement, les connexions de Levi-Civita de S et M, on a:

$$\bar{\nabla}_X X = \nabla_X X - h(X,X) \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{X}(S)\,. \tag{3.1}$$

Par hypothèse toute géodésique intégrale de F est aussi une géodésique de (M,g), l'équation (3.1) devient alors

$$h(X,X) = 0 \qquad \text{pour chaque} \quad X \in C^\infty(F)\,. \tag{3.2}$$

Puisque les champs de vecteurs e_i et $e_i + e_j$; $i,j = 1,\ldots,2n$; sont dans le noyau de ϖ^{2n+1} des équations (3.2) et (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 0\,, \\ b_{ij} &= 0\,. \end{aligned} \qquad i,j = 1,\ldots,2n \tag{3.3}$$

Les formes $i^*(\omega_j^{2n+2})$ s'écrivent

$$i^*(\omega_j^{2n+2}) = b_{(2n+1)j}\varpi^{2n+1} \qquad j = 1,\ldots,2n \tag{3.4}$$

$$i^*(\omega_{2n+1}^{2n+2}) = \sum_{j=1}^{2n+1} b_{j(2n+1)}\varpi^j\,. \tag{3.5}$$

La différentiation extérieure des équations (3.4) en tenant compte des équations de structure (2.6), des équations (2.7) et ces équations ellesmêmes nous donne:

$$\Big(c_{jk}b_{i(2n+1)} + c_{ik}b_{j(2n+1)}\Big)\varpi^j \wedge \varpi^k = 0\,, \qquad (\operatorname{mod} \varpi^{2n+1})\,,$$
$$\forall\, i,j,k = 1,\ldots,2n\,.$$

l'indépendence linéaire des ϖ^i implique

$$c_{jk}b_{i(2n+1)} + c_{ik}b_{j(2n+1)} - c_{kj}b_{i(2n+1)} - c_{ij}b_{k(2n+1)} = 0$$
$$\forall\, i,j,k = 1,\ldots,2n\,,$$

pour $j = i$ on a donc:

$$3c_{ik}b_{i(2n+1)} = 0 \qquad \forall\, i,k = 1,\ldots,2n\,,$$

mais pour chaque indice i_0 fixé il existe un indice j_0 pour lequel $c_{j_0 i_0} \neq 0$ on a donc:

$$b_{i(2n+1)} = 0 \qquad \forall\, i = 1, \dots, 2n .$$

Un calcul analogue sur l'équation (3.5) nous donne

$$b_{(2n+1)(2n+1)} = 0 .$$

La deuxième forme fondamentale de S est alors identiquement nulle et donc S est une hypersurface totalement géodésique de M. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.W. GRAY: *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. 69,2, (1959), 421-450.

[2] M.P. PIU: *Sur certains types de distributions non-intégrables totalement géodésiques*, thèse de doctorat Mulhouse (1988).

[3] M.P. PIU: *Sur une caractérisation de la sphère S^3 en termes de géométrie riemannienne de contact*, Rendic. Semin. Matem. Univ. Politec. Torino, Vol. 44, 1, (1986).

Lavoro pervenuto alla redazione il 7 maggio 1991
ed accettato per la pubblicazione il 17 luglio 1991
su parere favorevole di D. Perrone e di V. Dicuonzo

INDIRIZZO DELL'AUTORE:
M. Paola Piu - Dipartimento di Matematica - Via Ospedale 72 - 09124 Cagliari - Italia