Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 69-83

Recenti risultati sui q-archi completi nei piani di ordine pari q $\geq$ 16

R. STANGARONE - A. TERRUSI

RIASSUNTO – *Uno dei teoremi fondamentali sui k-archi dei piani desarguesiani di ordine q asserisce che i q-archi non sono completi* (SEGRE *[6]*, TALLINI *[9]*). BARLOTTI, *[1]*, DENNISTON, *[4]*, *e* MENICHETTI, *[5]*, *hanno dimostrato che tale teorema non si estende a tutti i piani finiti di ordine q. In quest'ambito, proseguendo la ricerca avviata da Tallini sui q-archi completi di un piano non desarguesiano di ordine q pari, [10], gli autori hanno esaminato quelli che ammettono un punto di indice* $q-4$, *[7], [8]. In questa Nota si completa tale studio, provando la non esistenza di siffatti q-archi in piani di ordine pari* $q > 44$.

ABSTRACT – *A fundamental theorem due to* B. SEGRE, *[4], and* G. TALLINI, *[6], states that a desarguesian plane of order q does not admit complete q-arcs.* BARLOTTI, *[1]*, DENNISTON, *[4]*, *and* MENICHETTI, *[5]*, *prove that this result can not be extended to any finite plane of order q. In this paper we prove that a plane of even order* $q > 44$ *does not admit a complete q-arc with a point of index* $q-4$.

KEY WORDS – *Complete arcs - Non desarguesian planes.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 51E

1 – Introduzione

Si denota con K un q-arco completo di un piano proiettivo non desarguesiano π_q di ordine pari $q \geq 16$ e si dice indice di un punto P del piano il numero delle tangenti a K passanti per P.

Se con $t_{2j}(j = 0, \dots, q/2)$ si indica il numero dei punti del piano di indice $2j$, essendo K completo, risulta $t_q = 0$; inoltre gli interi t_{2j} soddisfano alle ben note equazioni dei caratteri, [10].

Recentemente TALLINI, [10], e ZANELLA, [11], hanno provato la non esistenza in π_q di punti di indice $q-2$ e l'esistenza di al più un punto di indice $q-4$.

Gli autori hanno ritenuto interessante approfondire tale problematica ed hanno studiato i q-archi completi con un punto di indice $q-4$ in π_q, ottenendo i seguenti risultati, [7], [8]:

$$t_{2j} = 0 \qquad \text{per } j = 5, \dots (q-6)/2 \tag{1}$$

onde i soli caratteri dell'arco sono t_0, t_2, t_4, t_6, t_8, e $t_{q-4} = 1$.

$$t_6 = 0 \Longrightarrow t_8 \leq 2 \quad \text{e} \quad q \leq 20\,. \tag{2}$$

$$t_8 = 0 \Longrightarrow q \leq 34\,. \tag{3}$$

Nella presente Nota si prosegue lo studio nell'ipotesi che $t_8 \geq 1$ e $t_6 \geq 1$ e si dimostra tra l'altro la non esistenza di siffatti q-archi in piani di ordine pari $q > 44$ (cfr. prop. 2.16). Questo risultato e quelli ottenuti in [7] e [8] provano, quindi, che l'esistenza di un punto di indice $q-4$ implica che l'ordine del piano sia $q \leq 44$.

2 – Sui q-archi completi con un punto di indice $q-4$ in π_q

Siano P_{q-4} l'unico punto di π_q di indice $q-4$ e u una retta tangente K non passante per P_{q-4}.

Denoteremo con Δ l'insieme dei punti R di indice 2 appartenenti ad u tali che la retta congiungente R con P_{q-4} sia una tangente a K.

Supposto che il punto improprio U_∞ della retta u appartenga a Δ, definiamo l'insieme di rette

$$L = A \cup B \cup C$$

dove A è l'insieme delle rette per P_{q-4} non tangenti K, B l'insieme delle rette tangenti non passanti per P_{q-4} distinte da u e C l'insieme delle rette congiungenti P_{q-4} con $R \in \Delta$, $R \neq U_\infty$.

Se $|\Delta| = d$, allora

$$|L| = q + d + 7. \tag{4}$$

Proviamo il seguente:

LEMMA 2.1. *L'insieme L è un blocking set nel piano affine dedotto dal piano duale di π_q privato della retta corrispondente nella dualità al punto U_∞.*

DIM. Proviamo che per ogni punto $X \in \pi_q$, $X \neq U_\infty$ passa una retta di L. Infatti, denotata con x la retta congiungente X con P_{q-4}, se tale retta è non tangente appartiene ad A e quindi ad L. Se x è tangente e se $X \in u$ e X è di indice 2, allora tale retta appartiene a C e quindi a L. Se la retta x è tangente e se $X \in u$ e X è di indice maggiore di 2, allora per X passa un'altra tangente distinta da u che non contiene P_{q-4} e cioè passa una retta di B e quindi di L. Se x è tangente e $X \notin u$, essendo X di indice almeno 2, per X passa una tangente distinta da u che non contiene P_{q-4} e cioè ancora una retta di B e quindi di L.

Osservato inoltre che per ogni punto $X \in \pi_q$, $X \neq U_\infty$, passa una retta non appartenente ad L, si ha l'asserto.

Supposto ora che la retta u contenga un punto P_6 di indice 6 e che la retta congiungente P_6 con P_{q-4} è non tangente K, proviamo la seguente

PROPOSIZIONE 2.2. *Se t è una tangente passante per il punto di indice $q-4$, le intersezioni di t con le tangenti per P_6 non sono tutte di indice 2.*

DIM. Siano $u_1 = u, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ le tangenti per P_6 e si supponga che le intersezioni di t con tali tangenti siano tutte di indice 2. Proviamo che

$$\overline{L} = (L - \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}) \cup \overline{t}$$

dove $\overline{t}$ è la retta congiungente P_{q-4} con U_∞, è un blocking set nel piano proiettivo duale di π_q. In virtù del lemma 2.1 è sufficiente mostrare che per ogni punto $X \in u_i (i = 2, \dots 6)$ passa una retta di $\overline{L}$ e una non appartenente ad $\overline{L}$.

Se X è distinto dai punti di intersezione di u_i con le tangenti per P_{q-4}, essendo X di indice almeno 2, per X passa almeno una retta di B distinta dalle u_i e quindi una retta di $\overline{L}$; per X passa inoltre una retta non appartenente ad L e quindi non appartenente ad $\overline{L}$. Se invece X coincide con uno dei punti di indice 2 intersezione di u_i con una tangente per P_{q-4}, allora la retta congiungente X con P_{q-4} appartiene a C ed è distinta dalle u_i, onde per X passa una retta di $\overline{L}$ ed inoltre passa $u_i \notin \overline{L}$.

Si osservi ora che la cardinalità di $\overline{L}$, tenuto conto della (4), è

$$|\overline{L}| = q + d + 3 = q + \lambda$$

ove $\lambda = d + 3$.

D'altra parte le rette passanti per P_{q-4} sono $\bar{t}$ e le rette appartenenti ad A e C per cui sono in numero di

$$d + 5 > \lambda$$

in contraddizione con un risultato di Bruen per il quale nessuna retta di π_q contiene più di λ punti di $\overline{L}$ (cfr. lemma 2.1 di [3]).

In maniera analoga si prova che:

PROPOSIZIONE 2.3. *Le intersezioni delle tangenti per un punto P_8 di indice 8 con una tangente t per P_{q-4} non sono tutte di indice 2. Di conseguenza le rette congiungenti P_8 con l'unico punto di indice 6 apprtenente a t o con ciascuno dei 2 punti di indice 4 appartenenti a t sono rette tangenti K.*

Si denoti d'ora in poi con u_{2j} il numero dei punti di indice $2j$ appartenenti ad una retta u tangente K non passante per P_{q-4}.

Con procedimento analogo a quello seguito per provare la 2.2 si può dimostrare quanto segue:

PROPOSIZIONE 2.4. *Se la retta u contiene un punto P_6 di indice 6 e la retta congiungente P_6 con P_{q-4} è non tangente K, allora le intersezioni di u con le tangenti per P_{q-4} non sono tutte di indice 2, per cui risulta*

$$u_6 \geq 2 \quad \textit{oppure} \quad u_4 \geq 1. \tag{5}$$

PROPOSIZIONE 2.5. *Se la retta u contiene un punto di indice 8, le intersezioni di u con le tangenti per P_{q-4} non sono tutte di indice 2, cioè*

$$u_8 \geq 1 \Longrightarrow u_6 \geq 1 \quad \textit{oppure} \quad u_4 \geq 1. \tag{6}$$

Dalle equazioni dei caratteri della retta u, [10], in virtù della 2.5, si deduce inoltre che:

PROPOSIZIONE 2.6.
Il numero dei punti di indice 8 appartenenti alla retta u è

$$u_8 \leq 5 \tag{7}$$

ed in particolare

$$u_8 \leq (q-4)/6 \quad \textit{per} \quad q \leq 34. \tag{8}$$

In relazione alle rette non tangenti K, utilizzando le equazioni dei caratteri, [10], si provano facilmente le seguenti proprietà.

PROPOSIZIONE 2.7. *Se v è una retta passante per P_{q-4} esterna o secante K e se v_{2j} è il numero dei punti di indice $2j$ appartenenti a v, allora*

$$v_0 \geq 1 \tag{9}$$

$$v_8 \leq 1 \tag{10}$$

ed in particolare

$$v_8 = 1 \Longrightarrow v_6 = v_4 = 0, \quad v_2 = q-4, \quad v_0 = 4. \tag{11}$$

Dalla prop. 2.7 si deduce che:

a) Le rette congiungenti due punti di indice 8 sono rette non tangenti per P_{q-4} o rette tangenti non passanti per P_{q-4}.

b) Le rette non passanti per P_{q-4} che congiungono un punto di indice 8 ed un punto di indice 6 o 4 sono rette tangenti K.

c) Se $v_6 \geq 1$ oppure $v_4 \geq 1$ allora $v_8 = 0$, onde per le rette non passanti per P_{q-4} esterne o secanti K che contengono un punto di indice 6 o 4 valgono le proprietà provate in [8].

d) Una retta secante o esterna a K non passante per P_{q-4} interseca le non tangenti per P_{q-4} in al più 1 punto di indice 6 o in al più 2 punti di indice 4.

PROPOSIZIONE 2.8. *Siano P_8 un punto di indice 8, b una retta per P_{q-4} non tangente K distinta dalla congiungente P_8 con P_{q-4} e b_{2j} il numero dei punti di indice $2j$ appartenenti alla retta b. Si prova facilmente che*

$$b_0 = q - 8. \tag{12}$$

$$b_8 \leq (q-12)/6. \tag{13}$$

$$b_6 \leq (q-12)/4. \tag{14}$$

PROPOSIZIONE 2.9. *Se i punti di indice 8 appartengono tutti ad una stessa retta c per P_{q-4} non tangente K, detto c_{2j} il numero dei punti di indice $2j$ appartenenti alla retta c, risulta che*

$$c_0 \geq (q+2)/2. \tag{15}$$

In particolare, se vale l'uguaglianza, sulla retta c c'è esattamente un punto di indice 8 e non vi sono punti di indice 6 e 4. Se $c_0 = ((q+2)/2) + 1$ la retta c contiene ancora un solo punto di indice 8, nessun punto di indice 6 e uno di indice 4.

Proviamo che,

PROPOSIZIONE 2.10. *I punti di indice 8 e 6 appartengono tutti ad una stessa retta c per P_{q-4} non tangente K se e solo se $q = 18$ e $t_8 = t_6 = 1$.*

DIM. Si osservi anzitutto che nelle ipotesi considerate il sistema dei caratteri dell'arco è

$$\begin{aligned} & t_0 + t_2 + t_4 + t_6 + t_8 + 1 = q^2 + q + 1 \\ (16) \qquad & 2t_2 + 4t_4 + 6t_6 + 8t_8 + q - 4 = 2q(q+1) \\ & 2t_2 + 12t_4 + 30t_6 + 56t_8 + (q-4)(q-5) = 2q(2q-1) \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} & t_0 = (q^2 + 10q - 40 - 8t_6 - 24t_8)/8 \\ (17) \qquad & t_2 = (3q^2 - 4q + 32 + 12t_6 + 32t_8)/4 \\ & t_4 = (q^2 + 6q - 24 - 24t_6 - 48t_8)/8. \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $t_8 = c_8$ e $t_6 = c_6$, su ciascuna delle rette b per P_{q-4} non tangenti distinte da c, essendo $b_8 = b_6 = 0$, si verifica che (cfr. prop. 4 di [7])

$$(18) \qquad b_4 = (q-12)/2$$

e su ciascuna delle tangenti per P_{q-4} ci sono 2 punti di indice 4. Ne segue che

$$(19) \qquad t_4 = (q^2 + 6q - 24 - 24c_6 - 48c_8)/8 \geq 4(q-8)$$

onde

$$(20) \qquad c_6 + 2c_8 \leq (q^2 - 26q + 232)/24\,.$$

Inoltre, tenuto conto della (12) e della prop. 6 di [7], si ha che

$$(21) \qquad t_0 = (q^2 + 10q - 40 - 8c_6 - 24c_8)/8 \leq 5q - 36$$

da cui

$$c_6 + 3c_8 \geq (q^2 - 30q + 248)/8 . \tag{22}$$

Dalla (20), essendo $c_6 \geq 1$, segue che

$$c_8 \leq (q^2 - 26q + 208)/48 \tag{23}$$

e dalle (20) e (22) si ottiene anche

$$c_8 \geq (q^2 - 32q + 256)/12 \tag{24}$$

per cui

$$q^2 - 34q + 272 \leq 0$$

e quindi

$$q \leq 20 .$$

Dalla (23) si ottiene allora che $c_8 \leq 1$, ed essendo $c_8 = t_8 \geq 1$, segue che

$$t_8 = c_8 = 1. \tag{25}$$

Dalle (20) e (22), tenuto conto della (25), segue che

$$q^2 - 32q + 244 \leq 0$$

da cui

$$q \leq 18 . \tag{26}$$

Dalla (20), tenuto conto della (25) e (26), si ha che $c_6 \leq 1$, ed essendo $c_6 = t_6 \geq 1$, risulta che

$$t_6 = c_6 = 1 . \tag{27}$$

Se $q = 16$ su ciascuna delle 4 rette b per P_{12} non tangenti K distinte da c, per la (18), si verifica che

$$b_4 = 2 ,$$

mentre su ciascuna tangente u per P_6, dalle equazioni dei caratteri sulla retta u, essendo $u_8 = 0$ e $u_6 = 1$, si ha che

$$u_4 = 5. \tag{28}$$

In particolare se la tangente u è la congiungente P_6 con un punto P_4 di indice 4 appartenente ad una retta b, si prova che P_4 è l'unico punto di indice 4 intersezione di u con le non tangenti per P_{12}. Infatti almeno 4 tangenti per P_8 intersecano la retta u nei punti comuni ad u e alle tangenti per P_{12}; essendo questi punti necessariamente di indice 4, ne segue che uno solo dei 5 punti di u di indice 4 appartiene ad una retta per P_{12} non tangente K. Di conseguenza congiungendo P_6 con ciascuno degli 8 punti di indice 4 appartenenti alle rette per P_{12} non tangenti K si ottengono 8 tangenti distinte e questo non è possibile, essendo P_6 di indice 6. Dalle (25), (26) e (27) segue allora che necessariamente

$$q = 18 \quad \text{e} \quad t_8 = t_6 = 1. \tag{29}$$

Viceversa, se si verifica la (29), dalle (17) si ha che

$$t_0 = 54,$$

ed essendo $t_0 = 4b_0 + c_0 = 4(q-8) + c_0$, segue che

$$c_0 = 14. \tag{30}$$

D'altra parte, se l'unico punto P_6 di indice 6 non appartenesse alla retta c congiungente P_{14} con P_8, le tangenti per P_6 incontrerebbero la retta c in almeno 5 punti di indice ≥ 2 distinti da P_{14} per cui

$$c_0 \leq 13$$

in contrasto con la (30). Si ha così l'asserto.

Proviamo ora che:

PROPOSIZIONE 2.11. *Se i punti di indice 8 appartengono tutti ad una stessa retta c per P_{q-4} non tangente K, escluso il caso in cui $q = 18$ e $t_8 = t_6 = 1$, si verifica che*

$$c_0 \leq q - 5 \tag{31}$$

$$c_8 \leq (q-6)/6 \quad \textit{per} \quad q \leq 36 \tag{32}$$

$$c_8 \leq (q+4)/8 \quad \textit{per} \quad q \geq 40. \tag{33}$$

DIM. In virtù della proposizione precedente si ha che nelle ipotesi suddette esiste almeno un punto P_6 di indice 6 non appartenente alla retta c. Le tangenti per P_6 intersecano la retta c in almeno 5 punti di indice maggiore di zero, distinti da P_{q-4} per cui resta verificata la (31).

Dalle equazioni dei caratteri sulla retta c

$$\begin{aligned} &c_0 + c_2 + c_4 + c_6 + c_8 = q \\ &c_2 + 2c_4 + 3c_6 + 4c_8 + (q-4)/2 = q \end{aligned} \tag{34}$$

si ha che

$$c_0 = c_4 + 2c_6 + 3c_8 + (q-4)/2, \tag{35}$$

e tenendo conto della (31), si ottiene

$$c_4 + 2c_6 + 3c_8 \leq (q-6)/2$$

e quindi la (32).

Per provare la (33) si osservi che dalla seconda relazione delle (34) si ha che

$$4c_8 = q - ((q-4)/2) - c_2 - 2c_4 - 3c_6 \leq (q+4)/2$$

da cui, osservato che

$$(q-6)/6 \leq (q+4)/8 \iff q \leq 36,$$

segue l'asserto.

PROPOSIZIONE 2.12. *Se esiste una retta c non tangente per P_{q-4} che contiene tutti i punti di indice 8, si verifica che*

$$t_6 \leq (q^2 - 26q + 232 - 48t_8)/8 \tag{36}$$

$$c_8 = t_8 \leq (q^2 - 26q + 224)/48 \tag{37}$$

che migliora la (32) *per* $q \leq 20$.

DIM. Poiché $t_0 = 4b_0 + c_0$, dalle (17), tenendo conto delle (12) e (35), si ha che

$$(q^2 + 10q - 40 - 8t_6 - 24t_8)/8 \geq 4(q-8) + (q-4)/2 + 3t_8$$

da cui si ottiene facilmente la (36).

La (37) segue dalla (36), essendo $t_6 \geq 1$ ed inoltre $(q^2 - 26q+$ $+224)/48 \leq (q-6)/6$ per $q \leq 20$, onde l'asserto.

PROPOSIZIONE 2.13. *Se K è un 16-arco completo di π_{16} tale che $t_{12} = 1$, $t_8 \geq 1$ e $t_6 \geq 1$, allora*

$$t_8 = 1 \tag{38}$$

$$t_6 \leq 3. \tag{39}$$

DIM. Dalla (13) per $q = 16$, si deduce che se esiste un punto P_8 di indice 8, le rette per P_{12} non tangenti K distinte dalla congiungente P_{12} con P_8 non contengono punti di indice 8. Sussiste allora la (37) per cui $t_8 \leq 1$, ed essendo per ipotesi $t_8 \geq 1$, segue che $c_8 = t_8 = 1$. La (39) si ottiene poi dalla (36) per $q = 16$ e $t_8 = 1$. Si ha così l'asserto.

Sia d'ora in poi K un q-arco completo di π_q con q pari, $q \geq 18$, tale che $t_{q-4} = 1$, $t_6 \geq 1$ e ci siano almeno 2 punti di indice 8 non appartenenti ad una stessa retta per P_{q-4}. Allora su ciascuna delle 5 non tangenti per P_{q-4} si verifica la (12) per cui, tenuto conto del sistema (16), si ha il seguente:

LEMMA 2.14.

$$t_0 = 5q - 40 \tag{40}$$

$$t_2 = (9q^2 - 98q + 904 - 8t_8)/8 \tag{41}$$

$$t_4 = (-q^2 + 48q - 432 + 12t_8)/4 \tag{42}$$

$$t_6 = (q^2 - 30q + 280 - 24t_8)/8. \tag{43}$$

Proviamo inoltre che:

LEMMA 2.15.

$$2 \leq t_8 \leq (q^2 - 30q + 272)/24 \quad per \quad q \leq 32 \tag{44}$$

$$2 \leq t_8 \leq 15 \quad per \quad q = 34 \ o \ 36 \tag{45}$$

$$(q^2 - 48q + 432)/12 \leq t_8 \leq (q^2 - 38q + 312)/24 \quad per \quad q \geq 40. \tag{46}$$

DIM. Essendo $t_4 \geq 0$, dalla (42) si ottiene

$$(t_8 \geq (q^2 - 48q + 432)/12 \geq 2) \iff q \geq 40.$$

Inoltre, dalla (43), poiché $t_6 \geq 1$, si ha che

$$t_8 \leq (q^2 - 30q + 272)/24. \tag{47}$$

D'altra parte se almeno una tangente per P_{q-4} contiene punti di indice 4, allora

$$t_8 \leq 15. \tag{48}$$

Infatti, considerato un punto P_4 di indice 4 appartenente ad una tangente per P_{q-4}, per la proprietà b) dedotta dalla prop. 2.7, i punti di indice 8 sono contenuti nelle 3 rette per P_4 tangenti K non passanti per P_{q-4}. Su ciascuna di tali rette sussiste la (7), onde vale la (48).

Se invece le tangenti per P_{q-4} contengono ciascuna un punto di indice 6, allora $t_6 \geq q-4$ e dalla (43) si ottiene che

$$t_8 \leq (q^2-38q+312)/24. \tag{49}$$

Tenuto conto delle (47), (48) e (49) ed osservato che

$$\begin{array}{lll} (q^2-38q+312)/24 \leq (q^2-30q+272)/24 \leq 15 & \text{se} & q \leq 32 \\ (q^2-38q+312)/24 \leq 15 \leq (q^2-30q+272)/24 & \text{se} & q = 34 \text{ o } 36 \\ 15 \leq (q^2-38q+312)/24 \leq (q^2-30q+272)/24 & \text{se} & q \geq 40 \end{array}$$

si prova facilmente l'asserto.

Dimostriamo infine che:

PROPOSIZIONE 2.16. *In un piano proiettivo π_q di ordine pari $q > 44$ non esistono q-archi completi che ammettono in π_q un punto di indice $q-4$.*

DIM. Se in π_q esiste un punto di indice $q-4$ e non esistono punti di indice 6 o 8 l'asserto è già provato in virtù delle (2) e (3).

Se invece $t_{q-4}=1$, $t_8 \geq 1$ e $t_6 \geq 1$, dalle (17), tenuto conto che (cfr. prop. 2.13 di [8])

$$t_2 \geq (q-2)(q-4)+4 = q^2-6q+12,$$

si ha

$$3t_6+8t_8 \geq (q^2-20q+16)/4, \tag{50}$$

ed essendo $t_4 \geq 0$, risulta anche

$$3t_6+6t_8 \leq (q^2+6q-24)/8. \tag{51}$$

Pertanto dalle (50) e (51) si deduce che

$$t_8 \geq (q^2 - 46q + 56)/16. \tag{52}$$

Se i punti di indice 8 appartengono tutti ad una stessa retta c per P_{q-4} non tangente K, dalle (52) e (33) si ha che $q \leq 46$, e non esistendo piani di ordine 46, si ha che $q \leq 44$.

Se invece i punti di indice 8 non appartengono tutti ad una stessa retta per P_{q-4}, l'asserto segue dalla (46).

Riassumendo si elencano i casi possibili di q-archi completi che ammettono un punto di indice $q - 4$ in un piano proiettivo di ordine pari $q \geq 18$:

q	punti di indice 8 appartenenti ad una stessa retta per P_{q-4}	punti di indice 8 appartenenti ad almeno due rette per P_{q-4}
18	1	2
20	$1 \leq t_8 \leq 2$	$2 \leq t_8 \leq 3$
24	$1 \leq t_8 \leq 3$	$2 \leq t_8 \leq 5$
26	$1 \leq t_8 \leq 3$	$2 \leq t_8 \leq 7$
28	$1 \leq t_8 \leq 3$	$2 \leq t_8 \leq 9$
32	$1 \leq t_8 \leq 4$	$2 \leq t_8 \leq 14$
34	$1 \leq t_8 \leq 4$	$2 \leq t_8 \leq 15$
36	$1 \leq t_8 \leq 5$	$2 \leq t_8 \leq 15$
40	$1 \leq t_8 \leq 5$	$9 \leq t_8 \leq 16$
42	$1 \leq t_8 \leq 5$	$15 \leq t_8 \leq 20$
44	$1 \leq t_8 \leq 6$	$21 \leq t_8 \leq 24$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Barlotti: *Un'osservazione intorno a un teorema di B. Segre sui q-archi*, Matematiche, 21, (1966), 23-29.

[2] A.A. Bruen: *Arcs in planes of even order*, Europ. J. Combinatorics, 3, (1982), 17-18.

[3] A.A. Bruen - Silverman: *Arcs and blockingsets II*, Europ. J. Combinatorics, 8, (1987), 351-356.

[4] R.H.F. Denniston: *On arcs in projective plane of order 9*, Manuscripta Math. 4, (1971), 61-89.

[5] G. Menichetti: *q-Archi completi nei piani di Hall di ordine $q = 2^k$*, Rend. Acc. Lincei, LVI (1974), 518-525.

[6] B. Segre: *Le geometrie di Galois*, Ann. Mat. Pura Appl. 48, (1959), 1-96.

[7] R. Stangarone - A. Terrusi: *Alcuni risultati sui q-archi completi di un piano proiettivo π_q, q pari, $q \geq 16$*, Proceeding "Combinatorics '88", I, (1990), 388-397.

[8] R. Stangarone - A. Terrusi: *Sui q-archi completi di un piano non desarguesiano di ordine q pari*, "Le Matematiche" XLIV, 1, Catania, 1989.

[9] G. Tallini: *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $q = 2$*, Rend. Acc. Lincei, 8, 23 (1957), 242-245.

[10] G. Tallini: *Sui q-archi completi di un piano proiettivo non desarguesiano di ordine q pari*, Quad. Sem. Geom. Comb. 54, (1985), Univ. "La Sapienza" Roma.

[11] C. Zanella: *On complete 12-arcs in projective planes of order 12*, Ann. of Disc. Math., 37, (1988), 485-492.

Lavoro pervenuto alla redazione il 13 febbraio 1991
ed accettato per la pubblicazione il 24 giugno 1991
su parere favorevole di A. Cossu e di D. Olanda

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Bari - Trav. 200 Re David,4 - 70125 Bari