Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 85-98

Gruppi di simmetria per sistemi di equazioni con un parametro

E. PUCCI

RIASSUNTO – *Si analizza la struttura dei gruppi di simmetria per sistemi di equazioni alle derivate parziali che contengono un parametro in forma lineare. Si propone un procedimento per la determinazione di quei gruppi di simmetria che sussistono per valori generici del parametro.*

ABSTRACT – *The symmetry-group feature is analyzed for P.D.E.-systems with a linear parameter. A method is proposed to determine the groups admitted for generic values of the parameter.*

KEY WORDS – *Symmetry groups - Partial differential equations.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 58G35

1 – Introduzione

Molte equazioni o sistemi di equazioni alle derivate parziali che caratterizzano problemi fisici contengono parametri nei quali sono sintetizzate proprietà fisiche del sistema. Basti pensare ad esempio all'equazione del calore che definisce la temperatura in funzione delle variabili spazio-temporali e contiene un parametro che è legato alle caratteristiche di conducibilità, densità, capacità termica del mezzo.

L'introduzione di questi parametri avviene sistematicamente quando si generalizza un modello per tenere conto di ulteriori aspetti: per ottenere le equazioni fluidodinamiche di un liquido viscoso da quelle di un liquido ideale si introducono termini di viscosità contenenti un parametro di viscosità, che nelle equazioni compare linearmente. Si passa così dal sistema di Eulero a quello di Navier-Stokes.

L'introduzione di termini aggiuntivi, specialmente se questi introducono derivate di ordine superiore, rende più laboriosa la determinazione dei gruppi di simmetria puntuale ammessi dalla equazione o dal sistema.

In questa nota si propone una metodologia per il calcolo dei gruppi di simmetria puntuale per sistemi di equazioni alle derivate parziali contenenti un parametro in forma lineare, simmetrie che sussistano per valori generici del parametro. Questi gruppi possono essere indipendenti dal parametro, nel qual caso sono gli stessi per ogni valore del parametro, ovvero possono dipendere dal parametro, nel qual caso la loro determinazione varierà in relazione al valore del parametro.

La metodologia proposta non consente di individuare eventuali valori "risonanti" del parametro, intesi come valori particolari (finiti e non nulli) in corrispondenza ai quali esistono ulteriori simmetrie oltre a quelle valide per valori generici del parametro.

Valori risonanti del parametro si riscontrano talvolta in sistemi che definiscono modelli di significato fisico. Per esempio nel sistema di Navier della elastostatica lineare se il parametro $h = (\lambda + \mu)/\mu$ assume il valore -4/3 (e quindi tra i moduli di Lamè λ e μ sussiste la relazione $3\lambda + 7\mu = 0$) esistono, oltre alle simmmetrie valide per valori generici di h, le simmetrie di "inversione" [1] . Il valore di risonanza suddetto corrisponde comunque a casi in cui il tensore di elasticità non è strettamente ellittico.

Altro esempio di valore "risonante" del parametro si ha nel sistema di equazioni che caratterizzano il moto adiabatico di un gas perfetto: il parametro $\gamma = C_p/C_V$ (rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante) ha il valore risonante $(n+2)/2$ dove $n = 1, 2, 3$ secondo che si consideri un flusso mono, bi ,tri-dimensionale [2],[3].

Considerazioni di tipo dimensionale portano ad escludere in molti problemi fisici l'esistenza di valori "risonanti". Se un fenomeno fisico è governato da un sistema di equazioni che contiene un parametro e questo parametro non è adimensionale, al mutare della unità di misura delle grandezze fondamentali muta il valore del parametro e in generale muta anche la famiglia delle soluzioni del sistema, essendo queste dipendenti dal parametro. Le diverse famiglie che si ottengono così sono però legate tra loro dalla corrispondenza biunivoca che associa ad ogni descrizione del fenomeno con le misure delle grandezze valutate secondo un sistema di unità, l'analoga descrizione con le misure rispetto ad una altra scelta delle unità.

Questa corrispondenza trasporta da una famiglia di soluzioni ad ogni altra le trasformazioni, che, operando all'interno della famiglia, portano ogni soluzione in una altra soluzione della stessa famiglia.

In altre parole se l'insieme E_λ delle soluzioni del sistema corrispondenti ad un valore λ del parametro è mutato in sé da un gruppo di simmetria, questo gruppo di simmetria è trasportato sull'insieme $E_{\lambda'}$ delle soluzioni corrispondenti ad un altro valore λ' del parametro mediante la trasformazione corrispondente al cambio di unità di misura.

Se il parametro non è adimensionale non possono esserci quindi valori speciali che si distinguono dagli altri perché in corrispondenza ad essi sussistono proprietà di simmmetria diverse, non possono cioè esserci valori "risonanti".

Se il parametro non è adimensionale la metodologia proposta consente perciò di trovare tutte le simmetrie puntuali del sistema.

A titolo esemplificativo si propongono alcune applicazioni del procedimento a casi significativi.

2 – Caratterizzazione dei gruppi di simmetria

Sia

$$\Delta_s(x,u,u^{(r)}) + \lambda\Omega_s(x,u,u^{(r)}) = 0 \qquad s = 1,2,\dots,m \tag{2.1}$$

un sistema di m equazioni differenziali alle derivate parziali contenenti un parametro λ in forma lineare, nelle m incognite $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$ delle p variabili $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in X \subset \mathbb{R}^p$. Si indicano con $u^{(r)} \in U^{(r)}$ l'insieme delle derivate parziali fino all'ordine r delle funzioni incognite. L'ordine massimo delle derivate argomento di Δ_s e di Ω_s non è necessariamente lo stesso: se gli ordini sono diversi r indica il massimo di questi.

Si assume il sistema localmente risolubile e Δ_s e Ω_s funzioni definite in $M^r \subset X \times U \times U^{(r)}$ polinomiali nelle $u^{(r)}$ con coefficienti dipendenti dalle x ed u. Per ogni $(x,u) \in X \times U$ e per ogni λ, il sistema sia tale da definire implicitamente una varietà regolare in $U^{(r)}$; saranno perciò esplicitabili algebricamente sia dal sistema (2.1) sia dal sistema $\Delta_s = 0$, m delle $u^{(r)}$ in funzione delle altre nonché di x, u, λ. È dunque valida l'ipotesi di rango massimale per il sistema (2.1) e per il sistema delle $\Delta_s = 0$ [4].

Un gruppo continuo di trasformazioni puntuali agente su $M \in X \times U$ con campo vettoriale $\vec{v}$ $(\Xi_i(x,u,\lambda),\ H_j(x,u,\lambda))$, $i = 1,\dots,p$, $j = 1,\dots,m$, e operatore associato

$$pr_{\vec{v}}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \Xi_i(x,u,\lambda)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} H_j(x,u,\lambda)\frac{\partial}{\partial u_j} \tag{2.2}$$

è gruppo di simmetria per (2.1) se e solo se esiste una famiglia di m^2 funzioni analitiche $R_{sh}(x,u,u^{(r)},\lambda)$ tali che sia identicamente

$$pr_{\vec{v}}^{(r)}(\Delta_s + \lambda\Omega_s) = \sum_{h=1}^{m}(\Delta_h + \lambda\Omega_h)R_{sh}\,, \qquad s = 1,\dots,m\,. \tag{2.3}$$

In (2.3) $pr_{\vec{v}}^{(r)}$ indica l'operatore indotto da $\vec{v}$ su $M^{(r)}$

$$pr_{\vec{v}}^{(r)} \equiv pr_{\vec{v}}^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{J} \Phi_\alpha^J(x,u,u^{(r)},\lambda)\frac{\partial}{\partial \overset{\alpha}{u}_J}\,, \tag{2.4}$$

con la seconda sommatoria estesa a tutti i multiindici $J = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ con $1 \le j_l \le p$, $1 \le l \le r$ e

$$\Phi_\alpha^J(x,u,u^{(r)},\lambda) = D_J\Big(H_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\Xi_i\overset{\alpha}{u}_i\Big) + \sum_{i=1}^{p}\Xi_i\overset{\alpha}{u}_{J,i}\,, \tag{2.5}$$

dove $\overset{\alpha}{u}_i = \partial u_\alpha/\partial x_i$, $\overset{\alpha}{u}_{J,i} = \partial u^\alpha{}_J/\partial x_i$ e $D_J \equiv D_{j_1}D_{j_2}\dots D_{j_l}$ con D_{j_i} operatore di derivata totale rispetto x_{j_i}, che tiene conto oltre che della dipendenza esplicita rispetto a x_{j_i}, della dipendenza implicita per il tramite delle u^α e delle loro derivate.

Le funzioni Ξ_i ed H_j sono state assunte in tutta generalità dipendenti da λ e ciò comporta una dipendenza da λ anche delle Φ_α^J nonché dei moltiplicatori R_{hs}.

La condizione (2.3) esprime l'annullarsi identico di:

$$pr_{\vec{v}}^{(r)}\Delta_s + \lambda pr_{\vec{v}}^{(r)}\Omega_s\,, \qquad s=1,\ldots,m\,,$$

sulla varietà (2.1). Si ricava da ciò l'algoritmo per il calcolo di $\vec{v}$. Costruito infatti l'operatore $pr_{\vec{v}}^{(r)}$, lo si applica alle (2.1) e si riporta il sistema ottenuto sulla varietà mediante la sostituzione di m delle $u^{(r)}$ ricavate da (2.1) in funzione delle altre e delle x, u, λ. L'annullarsi identico delle equazioni nelle restanti $u^{(r)}$ si traduce nel sistema differenziale lineare omogeneo che definisce le Ξ_i, H_j.

Le soluzioni del sistema lineare omogeneo sono determinate a meno di costanti arbitrarie moltiplicative; ciò permette, anche nel caso che le funzioni Ξ_i e H_j abbiano poli in corrispondenza di $\lambda = 0$, in tutta generalità, di assumere una forma del tipo

$$\Xi(x,u,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overset{k}{\xi}_i(x,u)\,; \qquad H_j(x,u,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overset{k}{\eta}_j(x,u)\,. \tag{2.6}$$

Di conseguenza il campo $\vec{v}$ associato al gruppo ammette una decomposizione del tipo:

$$\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \vec{v}_k\,, \tag{2.7}$$

dove $\vec{v}_k \equiv (\overset{k}{\xi}_i, \overset{k}{\eta}_j)$ sono campi vettoriali con operatori associati

$$pr_{\vec{v}_k}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \overset{k}{\xi}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \overset{k}{\eta}_j \frac{\partial}{\partial u_j}\,. \tag{2.8}$$

Anche l'operatore indotto da $\vec{v}$ su $M^{(r)}$ ammette una decomposizione del tipo

$$pr_{\vec{v}}^{(r)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k pr_{\vec{v}_k}^{(r)} \tag{2.9}$$

dove

$$pr_{\vec{v}_k}^{(r)} \equiv pr_{\vec{v}_k}^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{J} \overset{k}{\Phi}{}_{\alpha}^{J}(x,u,u^{(r)}) \frac{\partial}{\partial \overset{\alpha}{u}_J} \tag{2.10}$$

e

$$\overset{k}{\Phi}{}^J_\alpha = D_J\Big(\overset{k}{\eta}_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \overset{k}{\xi}_i \overset{\alpha}{u}_i\Big) + \sum_{i=1}^{p} \overset{k}{\xi} \overset{\alpha}{u}_{J,i}\,. \tag{2.11}$$

Analoghe considerazioni sulle R_{hs} portano ad assumere

$$R_{sh} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overset{k}{\rho}_{sh}(x, u, u^{(r)})\,. \tag{2.12}$$

Sostituendo (2.9) e (2.12) in (2.3) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\lambda^k pr^{(r)}_{\vec{v}_k}\Delta_s + \lambda^{k+1} pr^{(r)}_{\vec{v}_k}\Omega_s\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{m}\Big(\lambda^k \overset{k}{\rho}_{sh}\Delta_h + \lambda^{k+1}\overset{k}{\rho}_{sh}\Omega_h\Big)\,, \qquad s = 1, \dots, m\,. \tag{2.13}$$

Se si assume per il parametro il valore $\lambda = 0$ i gruppi di simmetria sono quelli ammessi dal sistema $\Delta_s = 0$. I gruppi della forma (2.6) sono i gruppi che estendono quelli esistenti per $\lambda = 0$.

Per valori del parametro arbitrari in un intervallo I, si ottiene che la (2.13) è verificata se e solo se

$$pr^{(r)}_{\vec{v}_0}\Delta_s = \sum_{h=1}^{m} \overset{0}{\rho}_{sh}\Delta_h \tag{2.14}$$

e

$$pr^{(r)}_{\vec{v}_k}\Delta_s + pr^{(r)}_{\vec{v}_{k-1}}\Omega_s = \sum_{h=1}^{m}\Big(\overset{k}{\rho}_{sh}\Delta_h + \overset{k-1}{\rho}_{sh}\Omega_h\Big)\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{2.15}$$

La (2.14) esprime una condizione sufficiente affinché $\vec{v}_0$ generi un gruppo di simmetrie per $\Delta_s = 0$.

Si ha dunque che condizione necessaria affinché, per generici valori di λ, $\vec{v}$ data da (2.7) generi un gruppo di simmetria per (2.1) è che $\vec{v}_0$ generi un gruppo di simmetria per $\Delta_s = 0$.

Si può quindi come primo passo imporre la condizione (2.14) che esprime l' annullarsi del primo membro sulla varietà definita dal sistema $\Delta_s = 0$, e cioè

$$pr^{(r)}_{\vec{v}_0}\Delta_s = 0$$

quando $\Delta_s = 0$ e determinare le soluzioni $\overset{0}{\xi}_i$, $\overset{0}{\eta}_j$ del sistema lineare omogeneo

$$S(\vec{v}_0) = 0, \tag{2.16}$$

delle equazioni che caratterizzano $\vec{v}_0$ e, in corrispondenza, i moltiplicatori $\overset{0}{\rho}_{sh}$.

Le (2.15) per $k = 1$ hanno la forma:

$$pr_{\vec{v}_1}\Delta_s + pr_{\vec{v}_0}\Omega_s - \sum_{h=1}^{m} \overset{0}{\rho}_{sh}\Omega_h = \sum_{h=1}^{m} \overset{1}{\rho}_{sh}\Delta_h, \tag{2.17}$$

ed esprimono quindi ancora l'annullarsi del primo membro sulla varietà definita dal sistema $\Delta_s = 0$. Imponendo questa condizione si ottiene un sistema

$$S(\vec{v}_1) - T_1(\vec{v}_0) = 0, \tag{2.18}$$

lineare nei generatori $\overset{1}{\xi}_i$ ed $\overset{1}{\eta}_j$ di $\vec{v}_1$ in cui i termini noti $T_1(\vec{v}_0)$ sono ottenuti da:

$$pr_{\vec{v}_0}\Omega_s - \sum_{h=1}^{m} \overset{0}{\rho}_{sh}\Omega_h, \tag{2,19}$$

valutati sulla varietà definita da $\Delta_s = 0$ e sono quindi definiti tramite i generatori di $\vec{v}_0$. Si noti che il sistema omogeneo associato è lo stesso (2.16), naturalmente con funzioni incognite $\overset{1}{\xi}_i$ ed $\overset{1}{\eta}_j$.

Per la risolubilità di questo sistema (in generale sovrabbondante) possono essere necessarie restrizioni sui termini noti e quindi particolarizzazioni delle $\overset{0}{\xi}_i$ ed $\overset{0}{\eta}_j$ determinate come soluzioni del sistema (2.16); subordinatamente a queste restrizioni le soluzioni (2.18) saranno ottenute sommando una soluzione particolare alle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Ora, stante la forma (2.7) di $\vec{v}$ si riconosce che, senza ledere la generalità, basta considerare solo una soluzione particolare e quindi i generatori

$\overset{1}{\xi}_i$ ed $\overset{1}{\eta}_j$ di $\vec{v}_1$ vengono ad essere definiti senza l'introduzione di nuovi parametri o funzioni che non siano legati alle funzioni che intervengono in $\vec{v}_0$.

Noti $\overset{1}{\xi}_i$ ed $\overset{1}{\eta}_j$ è possibile calcolare i moltiplicatori $\overset{1}{p}_{sh}$ e procedere ordinatamente alla determinazione dei successivi $\vec{v}_i$ $i \geq 2$ tramite le (2.15) per successivi $k \geq 2$.

Ripetendo le considerazioni fatte per $i = 1$, ogni $\vec{v}_i$ sarà ottenuto prendendo una soluzione particolare del sistema

$$S(\vec{v}_i) - T_i(\vec{v}_{i-1}) = 0\,. \tag{2.20}$$

Restrizioni sui termini noti di questi sistemi, necessarie per la loro compatibilità, si traducono sempre su restrizioni da imporre su $\vec{v}_0$ definito da (2.16).

Lo spazio L_0 generato da $\vec{v}_0$ soluzione di (2.16) è in generale composto come somma diretta $L_0^{h_0} \oplus L^{\infty}{}_0$ di spazi vettoriali $L_0^{h_0}$ ed L_0^{∞} di dimensione finita h_0 e di dimensione infinita rispettivamente.

Si supponga $L_0^{\infty} = 0$, cioè L_0 abbia dimensione finita h_0. Il termine noto del sistema (2.20) per $i = 1$ è una espressione lineare omogenea negli h_0 parametri che definiscono il generico elemento di L_0 e la compatibilità si avrà su un sottospazio $L_0^{(1)} \subseteq L_0$ di dimensione $h_0^{(1)} \leq h_0$.

Lo spazio generato da $\vec{v}_1$ (che non sarà in generale un sottospazio di L_0^1) avrà dimensione $h_1 \leq h^{(1)}{}_0$, risultando $h_1 = h_0^{(1)} - \bar{h}$ dove $\bar{h}$ è il numero dei parametri di L_0^1 e che non compaiono in $T_1(\vec{v}_0)$.

La compatibilità dei sistemi (2.20) per un generico n si avrà su un sottospazio $L_0^{(n)} \subseteq L^{(n-1)}{}_0 \subseteq \ldots \subseteq L_0^{(1)} \subseteq L_0$ di dimensione $h_0^{(n)} \leq h_0^{(n-1)} \leq \ldots \leq h_0^{(1)} \leq h_0$ e la dimensione dello spazio generato da $\vec{v}_n$ sarà $h_n \leq h_0^{(n)}$.

Si riconosce in particolare che se il gruppo delle simmetrie di $\Delta_s = 0$ ha dimensione finita h_0 allora anche il gruppo delle simmetrie di (2.1) ha dimensione finita h e risulta $h \leq h_0$.

Se per un indice k si ottiene $T_k(\vec{v}_{k-1}) = 0$ allora $\vec{v}_k = 0$ e ciò comporta $\vec{v}_{k+n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Il gruppo delle simmetrie è allora polinomiale in λ.

Sia ora $L_0^{\infty} \neq 0$ cioè lo spazio L_0 abbia dimensione infinita. Si considerino le (2.20). Si possono avere due eventualità.

Esiste un indice i per cui la corrispondente (2.20) è compatibile su un sottospazio $L_0^{(1)} \subseteq L_0$ di dimensione finita: il gruppo delle simmetrie di (2.1) ha dimensione finita.

In corrispondenza ad ogni indice i le (2.20) sono compatibili su un sottospazio di L_0 di dimensione infinita: il gruppo delle simmetrie di (2.1) ha dimensione infinita.

Se $H_1(\vec{v}_0)$ non contiene le funzioni di L_0^{∞} e quindi lo spazio generato da $\vec{v}_1$ ha dimensione finita le funzioni di $\vec{v}$ risultano indipendenti dal parametro. In tutti gli altri casi le funzioni di $\vec{v}$ dipendono invece dal parametro. Comunque eventuali funzioni contenute in $\vec{v}_k$ sono definite tramite le funzioni di L_0.

La determinazione dei $\vec{v}_k$ è legata alla possibilità di stabilire una formula di ricorrenza; nelle applicazioni seguenti si vedranno esempi in cui questa è conseguenza del fatto che $T_i(\vec{v}_{i-1}) = T_k(\vec{v}_{k-1})$ per $k > i$. Si ottiene allora per $\vec{v}$ uno sviluppo in serie di potenze di λ che sarà comunque convergente in quanto definisce il gruppo che con un calcolo diretto si sarebbe ottenuto in forma chiusa. Come si vedrà il calcolo della somma della serie è facilmente ottenibile.

3 – Esempi

Si danno alcuni esempi dimostrativi della metodologia proposta. Per rendere più agevole il controllo dei risultati le variabili spazio-temporali sono indicate con x, y, z, t e i corrispondenti generatori con $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau$ omettendo l'indice quando si ha una sola variabile spaziale; per le funzioni incognite e i relativi generatori la simbologia risulta chiara dal contesto.

3.1 – Equazione del calore

$$u_t - \lambda u_{xx} = 0\,. \tag{3.1}$$

Il gruppo delle simmetrie di $u_t = 0$ è definito dal campo vettoriale $\vec{v}_0$:

$$\overset{0}{\tau} = \overset{0}{\tau}(t, x, u) \quad ; \quad \overset{0}{\xi} = \overset{0}{\xi}(x, u) \quad ; \quad \overset{0}{\eta} = \overset{0}{\eta}(x, u)\,.$$

Dalla compatibilità dei sistemi (2.20) per $k \geq 1$ con semplici calcoli si trovano le restrizioni su queste funzioni ed i campi vettoriali $\vec{v}_k$ per $k \geq 1$ nella seguente forma:

$$\overset{0}{\tau} = \gamma_2 + 2\gamma_4 t\,, \quad \overset{0}{\xi} = \gamma_1 + \gamma_4 x\,, \qquad \overset{0}{\eta} = (\gamma_3 - \gamma_5 x - \gamma_6 x^2)u + \alpha(x)\,,$$

$$\overset{1}{\tau} = 4\gamma_6 t^2\,, \qquad \overset{1}{\xi} = 2\gamma_5 t + 4\gamma_6 t x\,, \quad \overset{1}{\eta} = -2\gamma_6 u t + \alpha^{(2)}(x) t\,,$$

$$\overset{k}{\tau} = 0\,, \qquad \overset{k}{\xi} = 0\,, \qquad \overset{k}{\eta} = \alpha^{(2k)}(x)\frac{t^k}{k!}\,, \quad k > 1\,,$$

dove $\alpha(x)$ è una funziome arbitraria e $\alpha^{(2k)} = d^{2k}\alpha/dx^{2k}$.

Si osservi che risulta:

$$\overset{k}{\eta}_t = \overset{k-1}{\eta}_{xx}\,,$$

questa è la formula di ricorrenza legata al fatto che $T_i(\vec{v}_{k-1}) = T_k(\vec{v}_{k-1})$, $k > i$.

Il campo vettoriale $\vec{v}$ è dato da:

$$\tau = \gamma_2 + 2\gamma_4 t + \lambda(4\gamma_6 t^2)\,, \tag{3.2}$$

$$\xi = \gamma_1 + \gamma_4 x + \lambda(2\gamma_5 t + 4\gamma_6 t x)\,, \tag{3.3}$$

$$\eta = (\gamma_3 - \gamma_5 x - \gamma_6 x^2)u + \lambda(-2\gamma_6 t u) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \alpha^{(2k)}(x)\frac{t^k}{k!}\,. \tag{3.4}$$

Poiché la serie nella espressione (3.4) non è altro che lo sviluppo in serie di λ di una qualunque soluzione dell'equazione:

$$f_t - \lambda f_{xx} = 0\,, \tag{3.5}$$

si riconosce che la forma chiusa di (3.4) è:

$$\eta = (\gamma_3 - \gamma_5 x - \gamma_6 x^2)u + \lambda(-2\gamma_6 t u) + f_\lambda(x,t)\,, \tag{3.4'}$$

con $f_\lambda(x,t)$ soluzione di (3.5) ritrovando i risultati ben noti [2], [4].

3.2 – Sistema di Navier-Stokes per fluidi viscosi incomprimibili

Con usuale simbologia il sistema è:

$$
\begin{aligned}
&\rho\Big(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\Big) = -\nabla p + \nu\Delta\vec{u}\,,\\
&\nabla\cdot\vec{u} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Il parametro è il parametro ν di viscosità; in riferimento alla simbologia del paragrafo precedente il sistema $\Delta_s = 0$ è il sistema di Eulero, $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \equiv \Delta\vec{u}$, $\Omega_4 \equiv 0$.

Il campo $\vec{v}_0$ che definisce le simmetrie del sistema di Eulero è

$$
\begin{aligned}
\overset{0}{\xi}_1 &= c_5 x + c_1 y - c_2 z + \alpha(t)\,,\\
\overset{0}{\xi}_2 &= -c_1 x + c_5 y + c_3 z + \beta(t)\,,\\
\overset{0}{\xi}_3 &= c_2 x - c_3 y + c_5 z + \gamma(t)\,,\\
\overset{0}{\tau} &= c_5 t + c_0 t + c_4\,,\\
\overset{0}{\eta}_1 &= -c_0 u + c_1 v - c_2 w + \alpha'(t)\,,\\
\overset{0}{\eta}_2 &= -c_1 u - c_0 v + c_3 w + \beta'(t)\,,\\
\overset{0}{\eta}_3 &= c_2 u - c_3 v - c_0 w + \gamma'(t)\,,\\
\overset{0}{\Pi} &= -2c_0 p - \alpha''(t)x - \beta''(t)y - \gamma''(t)z + \theta(t)\,.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

In corrispondenza i moltiplicatori sono:

$$
\overset{0}{\rho}_{sh} = \begin{bmatrix}
-2c_0 - c_5 & c_1 & -c_2 & 0\\
-c_1 & -2c_0 - c_5 & c_3 & 0\\
c_2 & -c_3 & -2c_0 - c_5 & 0\\
0 & 0 & 0 & c_0 - 3c_5
\end{bmatrix}
\tag{3.8}
$$

Da (3.7) e (3.8) si riconosce che le $H_1(\vec{v}_0)$ sono costituite da espressioni lineari omogenee nelle derivate seconde delle funzioni incognite, mentre $S(\vec{v}_1)$ non contiene termini di derivata seconda. Le restrizioni su $\vec{v}_0$ necessarie per la compatibilità del sistema (2.18) sono quindi ottenute semplicemente annullando (2.19); in questo caso ciò equivale a porre identicamente:

$$H_1(\vec{v}_0) \equiv pr_{\vec{v}_0}\Omega_s - \sum_{h=1}^{4} \overset{0}{\rho}_{sh}\Omega_h = 0\,. \tag{3.9}$$

È del tutto generale quindi assumere $v_i = 0\ \forall i \geq 1$.

Si riconosce in maniera banale che il campo $\vec{v}$ che genera i gruppi di simmetria delle equazioni di Navier-Stokes è quello definito in (3.7) in cui si sia posto $c_0 = c_5$ che è la condizione che rende verificate le (3.9).

I gruppi legati ai parametri $c_1, \ldots, c_4$ e alle funzioni $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\theta(t)$ sono dunque di simmetria sia per il sistema di Eulero che per quello di Navier-Stokes. I gruppi legati ai parametri c_0 e c_5 che definiscono due variazioni di scala indipendenti:

$$(\vec{x}, t, \vec{u}, p) \longrightarrow (a\vec{x}, at, \vec{u}, p)\,,$$

$$(\vec{x}, t, \vec{u}, p) \longrightarrow (\vec{x}, t, b^{-1}\vec{u}, b^{-2}p)\,,$$

per il sistema di Eulero, si riducono ad un unico gruppo che definisce le variazioni di scala:

$$(\vec{x}, t, \vec{u}, p) \longrightarrow (a\vec{x}, at, a^{-1}\vec{u}, a^{-2}p)\,,$$

ammesse dal sistema di Navier-Stokes. Questo risultato, già noto [5], corregge quanto asserito in [4] a pag. 181.

3.3 – Equazione di Korteweg-De Vries-Burgers

$$u_t + u_{xxx} + uu_{xx} + \mu u_{xx} = 0\,. \tag{3.10}$$

$\vec{v}_0$ è il campo vettoriale delle simmetrie della KdV [4]:

$$\overset{0}{\xi} = c_4 x + c_3 t + c_1 \quad , \quad \overset{0}{\tau} = 3c_4 t + c_2 \quad , \quad \overset{0}{\eta} = -2c_4 u + c_3\,, \tag{3.11}$$

ed in corrispondenza è $\overset{0}{\rho} = -5c_4$ ed $H_1(\vec{v}_0) = c_4 u_{xx}$. Da (2.18) si ottiene:

$$\overset{1}{\xi} = \overset{1}{\tau} = 0 \quad ; \quad \overset{1}{\eta} = -\frac{c_4}{3} ux\,.$$

Si riconosce banalmente che la (2.20) per $i = 2$ è compatibile solo se è $c_4 = 0$ con il che risulta $H_1(\vec{v}_0) = 0$ e quindi $\overset{k}{\xi} = \overset{k}{\tau} = \overset{k}{\eta} = 0$, $\forall k \geq 1$. Lo spazio generato da $\vec{v}$ è dunque in questo caso un sottospazio proprio dello spazio generato da $\vec{v}_0$, essendo definito da (3.11) per $c_4 = 0$.

3.4 – Equazione di Burgers in forma potenziale

$$u_t - u_{xx} - \mu u_x^2 = 0\,. \tag{3.12}$$

$\vec{v}_0$ è il campo vettoriale delle simmetrie dell'equazione del calore definite da (3.2), (3.3), (3.4') per $\lambda = 1$.

In corrispondenza è $\overset{0}{\rho} = \gamma_3 - 2\gamma_4 - \gamma_5 x - \gamma_6 x^2 - 10\gamma_6 t$.

La (2.18) dà allora:

$$\overset{1}{\xi} = \overset{1}{\tau} = 0 \quad ; \quad \overset{1}{\eta} = P\frac{u^2}{2} - f(x,t)u\,,$$

con $P = -\gamma_3 + \gamma_5 x + \gamma_6 x^2 + 2\gamma_6 t$ e $f(x,t)$ soluzione di $f_{xx} - f_t = 0$.

Dalle (2.20) si riconosce ancora che $\overset{k}{\xi} = \overset{k}{\tau} = 0$, $\forall\, k \geq 1$ ed inoltre:

$$\overset{k}{\eta}_u = \overset{k-1}{\eta},$$

per cui $\vec{v}$ risulta definito da

$$\tau = \gamma_2 + 2\gamma_4 t + 4\gamma_6 t^2\,, \tag{3.13}$$

$$\xi = \gamma_1 + \gamma_4 x + 2\gamma_5 t + 4\gamma_6 tx\,, \tag{3.14}$$

$$\eta = (\gamma_3 - \gamma_5 x - \gamma_6 x^2 - 2\gamma_6 t)\sum_{k=0}^{\infty}(-\mu)^k \frac{u^{k+1}}{(k+1)!} + f(x,t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu u)^k}{k!} \tag{3.15}$$

il terzo dei quali, essendo $P_t - P_{xx} = 0$ può essere scritto nella forma:

$$\eta = g(x,t)e^{(-\mu u)} + (\gamma_3 - \gamma_5 x - \gamma_6 x^2 - 2\gamma_6 t)\mu^{-1}\,, \tag{3.16}$$

con $g_{xx} - g_t = 0$. Per $\mu = 1$ si hanno i risultati esposti in [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] P.J. Olver: Arch. Rational Mech. Anal. 85,2 (1984), 131-160.

[2] L.V. Ovsiannikov: *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press New York (1982).

[3] N.H. Ibragiminov: *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Dordrecht, The Netherlands (1985).

[4] P.J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer Verlag New York (1986).

[5] R.E. Boisvert - W.F. Ames - U.N. Srivastava: J. Engn. Math. 17 (1983), 203-211.

Lavoro pervenuto alla redazione il 20 febbraio 1991
ed accettato per la pubblicazione il 10 maggio 1991
su parere favorevole di P. Benevnuti e di R. Balli

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Edvige Pucci - Istituto di Energetica - Università degli Studi di Perugia - 06100 Perugia.