Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 273-284

Su alcune proprietà funzionali dell'indicatore di Stevens

B. RIZZI

RIASSUNTO – *In questo lavoro mi occupo del cosiddetto indicatore di Stevens (che generalizza la funzione di Eulero). Questo indicatore è connesso con alcune generalizzazioni della somma di Ramanujan. Vengono messe in luce alcune proprietà funzionali e interpretazioni di tipo combinatorio.*

ABSTRACT – *In this paper we deal with the so-called Stevens totient (which generalizes the Eulero totient). This totient is connected with some generalizations of Ramanujan sum. We present some functional properties and combinatorial interpretations.*

KEY WORDS – *Indicatore di Eulero - Algebra di Dirichlet.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 11A

1 – Introduzione

Indichiamo con I la sottoalgebra di Dirichlet ([11] Esempio 4.7) della algebra di incidenza a valori complessi costruita sul reticolo $(\mathbb{N}_1, 1, \wedge, \vee)$[1] dei naturali. Tale algebra è integra ed è a fattorizzazione unica [9]. Il sostegno di I, costituito dalle funzioni aritmetiche definite in $\mathbb{N}_1$ a valori nel campo complesso $\mathbb{C}$, è strutturato con l'ordinaria addizione e con la

[1] Con $\mathbb{N}_k$ indichiamo i naturali $\geq k$; $\wedge, \vee$ indicano rispettivamente il M.C.D. ed il m.c.m. e si accettano le convenzioni $0 \wedge n = n$, $(-m) \wedge n = (-m) \wedge (-n) = m \wedge n \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}_1$.

convoluzione di Dirichlet definita ponendo

$$(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad \forall\, f, g \in I, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_1 .$$

L'elemento neutro moltiplicativo di I è la funzione δ detta di Kronecker, definita ponendo:

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il gruppo U degli elementi invertibili di I è costituito da tutte e sole le funzioni $f \in I$ per le quali $f(1) \neq 0$. Un sottogruppo notevole di U è il sottogruppo $\mathcal{M}$ delle funzioni moltiplicative cioè delle funzioni aritmetiche f, non identicamente nulle, per le quali si ha:

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{con } m \wedge n = 1 . \tag{1.1}$$

Un sottoinsieme di $\mathcal{M}$ è costituito dalle funzioni f dette completamente moltiplicative, per le quali la (1.1) è valida per ogni naturale $m, n \in \mathbb{N}_1$. Tale sottoinsieme, indicato con $\mathcal{C}$, non è stabile rispetto alla convoluzione.

Una delle più interessanti funzioni moltiplicative è la funzione φ di Eulero-Gauss, della quale sono state date molteplici generalizzazioni. Tali generalizzazioni si possono suddividere in due tipi: quelle che considerano la funzione φ dal punto di vista combinatorio e la estendono in tal senso e quelle che sono invece generalizzazioni formali (quale ad esempio quella data da BELL [4] per l'algebra di Dirichlet e ripresa successivamente da SMITH [17] per le algebre di incidenza). In questa nota mi occupo soltanto delle prime.

Una di tali generalizzazioni, nella quale rientrano molte altre come casi particolari, è stata data da STEVENS [18]. Mi occupo di questa nel secondo paragrafo, dandone una reinterpretazione funzionale che permetterà di metterne in luce numerose proprietà funzionali e di inquadrare nel contesto anche l'indicatore di CASHWELL-EVERETT [9] e di trovare alcune proprietà di tipo combinatorio che non mi pare siano state notate da altri.

L'interesse per l'indicatore di Stevens, di cui, assieme a L. BERARDI cfr. [8], mi sono occupato qualche anno fa, è principalmente legato alle generalizzazioni della Somma di Ramanujan. Recentemente (cfr. [14]) è apparso un ampio ed interessante lavoro di Haukkanen dal quale bene si evince la storia, lo stato dell'arte e le prospettive di ricerca nell'ambito di queste generalizzazioni delle identità che si presentano nella Teoria delle Funzioni Aritmetiche.

2 – Proprietà funzionali dell'indicatore di Stevens

Come noto, Stevens ha dato del suo indicatore la seguente

DEFINIZIONE 2.1. *Sia* $H = \{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ *un insieme di* m, $m \geq 1$, *polinomi a coefficienti interi in una indeterminata* x *e sia* $\mathcal{A} = \{(a_1, \ldots, a_m), \ldots\}$ *l'insieme di tutte le* m*-ple ordinate di interi tali che sia* $0 \leq a_i < n$. *Allora l'indicatore di Stevens, che si denota con* $\varphi(H, n)$, *è il numero di elementi di* $\mathcal{A}$ *tali che risulti*

$$\text{M.C.D.}(f_1(a_1) \wedge \ldots \wedge f_m(a_m) \wedge n) = 1\,.$$

Tale indicatore $\varphi(H, n)$ può essere definito da un punto di vista funzionale nel seguente modo:
sia $H = \{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ un insieme di m ($m \geq 1$) polinomi a coefficienti interi in una indeterminata x. Se $\forall\, p \in \mathcal{P}$ (p primo) indichiamo con $\rho(p, k)$ il numero delle soluzioni (incongrue rispetto a p) della

$$f_k(x) \equiv 0 \bmod p \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

posto:

$$R(p) = \rho(p, 1)\rho(p, 2) \cdots \rho(p, m)\,,$$

è possibile definire con Stevens l'elemento completamente moltiplicativo $\Omega_H \in \mathcal{C}$, per determinare il quale è sufficiente assegnare i valori

$$\Omega_H(p^h) = (R(p))^h\,, \qquad \forall\, p \in \mathcal{P},\ \forall\, h \geq 1\,.$$

Considerato l'elemento $\nu_m \in C$ tale che $\nu_m(n) = n^m$, $\forall\ n, m \geq 1$, risulta:

$$\varphi_{H,m} = \nu_m \times \mu\Omega_H\,, \tag{2.1}$$

essendo μ la funzione di Möbius e $\mu\Omega_H$ l'inversa, rispetto alla convoluzione, dell'elemento Ω_H (cfr. [6]).

Alla funzione $\varphi_{H,m} \in \mathcal{M}$ diamo il nome di *indicatore di Stevens*[(2)] di indice m. Un'espressione esplicita della $\varphi_{H,m}$ è data (cfr. [18]) dalla

$$\varphi_{H,m}(n) = n^m \prod_{p|n} \left(1 - \frac{R(p)}{p^m}\right).$$

Tale presentazione dell'indicatore di Stevens è nuova, essa permette di caratterizzare alcune classi di indicatori sia operando nell'insieme C delle funzioni completamente moltiplicative che nell'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni fortemente moltiplicative, cfr. [8].

Ricordiamo che una funzione f è fortemente moltiplicativa quando

$$f(p^h) = f(p) \qquad \forall\, p \in \mathcal{P}, \quad \forall\, h \geq 1.$$

Tali elementi soddisfano allo schema di derivazione, introdotto in [6], [7]:

$$\begin{tikzcd} F \in C \arrow[rr] \arrow[d, leftrightarrow] & & \partial F \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mu F & & f \in \mathcal{F} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

In tali schemi la freccia semplice indica il passaggio alla derivata numerica e la doppia il passaggio all'inverso.

Premettiamo un lemma, che costituisce una generalizzazione della Prop. 2.7 di [6], a questo lavoro rimandiamo per la nozione di funzione indicatrice.

LEMMA 2.1. *Sia $\mathcal{I}$ l'insieme delle funzioni indicatrici di un insieme. Due funzioni f, g con $f \in \mathcal{F}$, $g \in C$, hanno il loro prodotto integrale $f \times g$ appartenente a C se e solo se $fg = \delta$ e $f \in \mathcal{I}$.*

---

(2) Stevens in [18] indica con $\varphi(H, n)$ il valore in n di tale funzione. Preferiamo questa diversa notazione più adatta in questo contesto.

DIM. Se $f \in \mathcal{F}$, $g \in C$ ed $f \times g \in C$ si ha

$$(f \times g)(p^2) = g(p^2) + f(p)g(p) + f(p^2) =$$
$$= g^2(p) + f(p)g(p) + f^2(p) = [(f \times g)(p)]^2 =$$
$$= [f(p) + g(p)]^2 = f^2(p) + 2f(p)g(p) + g^2(p).$$

Per confronto segue:

$$f^2(p) + f(p)g(p) = f(p)$$

da cui

$$f(p)[f(p) + g(p) - 1] = 0$$

dunque risulta $f(p) = 0$ oppure $f(p) = 1 - g(p)$.

Inoltre si ha:

$$[f(p) + g(p)]^3 = f^3(p) + 3f(p)g(p)[f(p) + g(p)] + g^3(p) =$$
$$= (f \times g)(p^3) = f(p) + f(p)g(p) + f(p)g^2(p) + g^3(p),$$

da cui per confronto segue:

$$f^3(p) + 3f^2(p)g(p) + 2f(p)g^2(p) - f(p) = 0,$$

dunque risulta $f(p) = 0$ oppure

$$f^3(p) + 3f^2(p)(1 - f(p)) + 2f(p)(1 - f(p))^2 - f(p) = 0$$

dalla quale si ha:

$$f(p) - f^2(p) = 0$$

e quindi $f(p) = 0$ oppure $f(p) = 1$.

La funzione f è dunque una funzione indicatrice e risultando $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{I}$ segue $f \in C$ (cfr. Prop. 2.4, [6]) ed allora (cfr. [6]) necessariamente $fg = \delta$.

Inversamente se $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{I}$, $g \in C$ ed $fg = \delta$ allora $f \times g \in C$ per essere $f \in C$.

PROPOSIZIONE 2.2. *Un indicatore di Stevens avente integrale numerico in C è l'indicatore di Eulero-Jordan.*

DIM. Se $\varphi_{H,m}$ è un indicatore di Stevens, si ha

$$\varphi_{H,m} \times u = \nu_m \times \mu\Omega_H \times u = \nu \times \Omega_H^*,$$

essendo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_H & \longrightarrow & \partial\Omega_H \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mu\Omega_H & \longleftarrow & \Omega_H^* \,. \end{array}$$

Ed essendo $\nu_m \in C$ ed $\Omega_H^* \in \mathcal{F}$, risulta $\nu_m \times \Omega_H^* \in C$ se e solo se

$$\Omega_H^* \in \mathcal{I}, \qquad \Omega_H^* \nu_m = \delta$$

ma allora necessariamente $\Omega_H^* = \delta$ e $\Omega_H = u$. Pertanto indicando con φ_m l'indicatore di Eulero-Jordan risulta $\varphi_{H,m} = \varphi_m$.

Consideriamo ora un indicatore di Stevens determinato dall'insieme H costituito dagli m polinomi $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

Sia A un insieme di naturali tali che:

i) $p \in A$, se e solo se le congruenze

$$f_i(x) \equiv 0 \bmod p$$

hanno ciascuna almeno una soluzione mod$p$;

ii) la funzione indicatrice F_A di A è completamente moltiplicativa.

Osserviamo che la condizione ii) determina tutti gli interi di A a partire dai primi che vi appartengono. Si ha allora

PROPOSIZIONE 2.3. *Un indicatore di Stevens è un elemento completamente moltiplicativo se e solo se*

$$\Omega_H = F_A \nu_m ,$$

essendo A definito dalle i) *ed* ii).

DIM. Si può scrivere:

$$\varphi_{H,m} \times \Omega_H = \nu_m .$$

Essendo $\Omega_H, \nu_m \in \mathcal{C}$, risulta (cfr. [3]) $\varphi_{H,m} \in \mathcal{C}$ se e solo se $\varphi_{H,m}\Omega_H = \delta$. Di conseguenza $\forall\, p \in \mathcal{P}$ si ha

$$(\varphi_{H,m}\Omega_H)(p) = \Omega_H(p)[\nu_m(p) + \mu(p)\Omega_H(p)] = \Omega_H(p)[p^m - \Omega_H(p)] = 0\,,$$

da cui

$$\Omega_H(p) = \begin{cases} 0 \\ p^m . \end{cases}$$

Di conseguenza risulta

$$\Omega_H = F_A\nu_m .$$

Viceversa se $\Omega_H = F_A\nu_m$ con $F_A \in \mathcal{C}$ risulta (cfr. Prop. 2.4 di [6]) $F_A^* \in \mathcal{C}$. Dunque avendosi:

$$\varphi_{H,m} = \nu_m \times \mu F_A\nu_m = \nu_m(u \times \mu F_A) = \nu_m F_A^*\,,$$

l'asserto è provato.

Associamo ora all'insieme H che genera l'indicatore di Stevens un secondo insieme B di numeri naturali, tale che

iii) $p \notin B$ se e solo se le congruenze $f_i(x) \equiv 0 \bmod p$ hanno ciascuna una ed una sola soluzione mod$p$;
iv) la funzione indicatrice F_B di B è una funzione completamente moltiplicativa.

Si ha allora:

PROPOSIZIONE 2.4. *Un indicatore di Stevens ha inverso in $\mathcal{F}$ se e solo se:*

$$\Omega_H = \nu_m^{F_B}\,,$$

essendo B definito dalle iii) *ed* iv).

Dim. Dalla (2.1) si ha:

$$\varphi'_{H,m} = \mu\nu_m \times \Omega_H ,$$

e $\forall\, p \in \mathcal{P}$, $\forall\, \ell \in \mathbb{N}_1$ risulta:

$$\varphi'_{H,m}(p^\ell) = \begin{cases} \Omega_H^\ell(p) - p^m \Omega_H^{\ell-1}(p) & \text{se } \Omega_H(p) \neq 0 \\ \left.\begin{array}{ll} -p^m & \text{se } \ell = 1 \\ 0 & \text{se } \ell > 1 \end{array}\right\} & \text{se } \Omega_H(p) = 0 \end{cases}$$

Quindi se $\varphi'_{H,m} \in \mathcal{F}$, necessariamente $\Omega_H(p) \neq 0$, ed inoltre

$$\Omega_H(p) - p^m = \Omega_H^2(p) - p^m \Omega_H(p) = \dots$$

di conseguenza si ha:

$$\Omega_H(p) = \begin{cases} p^m \\ 1 , \end{cases}$$

e quindi

$$\Omega_H = \nu_m^{F_B} .$$

Viceversa se $\Omega_H = \nu_m^{F_B}$ con $F_B \in C$ risulta

$$\Omega_H(p) = \begin{cases} p^m \\ 1 , \end{cases}$$

per cui

$$\varphi'_{H,m} = \begin{cases} \mu\nu_m \times \nu_m & \text{se } \Omega_H = \nu_m \\ \mu\nu_m \times u & \text{se } \Omega_H = u. \end{cases}$$

In entrambi i casi da un calcolo diretto risultando

$$\varphi'_{H,m}(p^\ell) = \varphi'_{H,m}(p) ,$$

l'asserto rimane provato.

3 – Un legame con l'indicatore di Cashwell-Everett

La presentazione dell'indicatore di Stevens dal punto di vista funzionale tramite la (2.1) suggerisce un confronto con quello, che chiamiamo indicatore di Cashwell-Everett, introdotto formalmente dalla

$$\varphi_{\ell,m} = \nu_m \times \mu\nu_\ell \qquad \forall\, m, \ell \in \mathbb{N}_0\,, \tag{3.1}$$

e del quale non ci è nota in generale un'interpretazione combinatoria (si noti che, in particolare, per $\ell = 0$ la (3.1) fornisce l'indicatore di Eulero-Jordan).

A tale riguardo si hanno le seguenti proposizioni

LEMMA 3.1. *Se $a \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_1$, posto $a \wedge n = \delta$ si ha*

$$(a + kn) \wedge n = \delta \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Tale lemma si prova mediante l'algoritmo di Euclide.

PROPOSIZIONE 3.2. *Il numero $\varphi_{H,m}(n)$ $(n, m \in \mathbb{N}_1)$ è anche il numero delle m-ple ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ di $\mathbb{N}_1$ con $1 \le a_i \le n$ e tali che sia $f_1(a_1) \wedge f_2(a_2) \wedge \ldots \wedge f_m(a_m) = 1$.*

DIM. Sia $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ una m-pla con qualche elemento nullo. Applicando la formula di Taylor al polinomio $f_k(x)$ si ha

$$\forall\, b_k \qquad f_k(b_k + n) = f_k(b_k) + nP_k(n)\,,$$

essendo $P_k(n)$ un opportuno polinomio in n.

Per il lemma 3.1 si ha:

$$f_k(b_k + n) \wedge n = f_k(b_k) \wedge n\,,$$

quindi ad ogni m-pla con qualche b_k nullo può sostituirsi biiettivamente una m-pla $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ con

$$a_k = \begin{cases} b_k & \text{se } b_k \neq 0 \\ n & \text{se } b_k = 0\,, \end{cases}$$

e l'asserto è completamente provato.

Per l'indicatore di Cashwell-Everett si ha:

PROPOSIZIONE 3.3. *Il numero* $\varphi_{\ell,m}(n)$ *con* $\ell, m, n \in \mathbb{N}_1$, *se* $\ell < m$ *è il numero delle m-ple ordinate* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *con* $\ell \leq a_k \leq n$ *(ovvero* $0 \leq a_k < n$*) e tali che:*

$$a_{\ell+1} \wedge a_{\ell+2} \wedge \ldots \wedge a_m \wedge n = 1 .$$

DIM. Dalla (3.1) si ha:

$$\varphi_{\ell,m}(n) = n^m \prod_{p|n} \left(1 - \frac{p^\ell}{p^m}\right) .$$

Consideriamo ora, $\forall\, n \in \mathbb{N}_1$, l'insieme F costituito dai polinomi:

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_m(x) = nx$$

$$f_{\ell+1}(x) = f_{\ell+2}(x) = \ldots = f_m(x) = x .$$

La congruenza $f_k(x) \equiv 0 \bmod p, \forall\, p \in \mathcal{P}$, ha p soluzioni per $1 \leq k \leq \ell$ ed una soluzione per $\ell + 1 \leq k \leq m$, di conseguenza risulta $R(p) = p^\ell$, dunque

$$\varphi_{\ell,m} = \varphi_{F,m} .$$

Osserviamo che se $\varphi_{\ell,m}$ è tale che esiste $q \in \mathbb{N}_1$ per il quale:

$$\ell = (k-1)q , \qquad m = kq , \qquad k \in \mathbb{N}_1$$

dalla (3.1) si ha

$$\varphi_{(k-1)q,kq}(n) = n^{kq} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{p^{(k-1)q}}{p^{kq}}\right) = \varphi_q(n^k) ,$$

formula di riduzione che conduce alla seguente

PROPOSIZIONE 3.4. *Il numero delle q-ple ordinate di naturali non superiori ad* n^k $(n, k \in \mathbb{N}_1)$ *e primi con n è pari al numero delle kq-ple ordinate di naturali non superiori ad n e tali che gli ultimi q elementi di ciascuna kq-pla siano primi con n.*

Osserviamo ora che, se δ è l'elemento neutro rispetto alla convoluzione, sussistono le seguenti relazioni:

$$\varphi_{\ell,\ell} = \delta \qquad \forall\, \ell \in \mathbb{N}_o$$

$$\varphi_{\ell,m} \times \varphi_{m,\ell} = \delta\,, \quad \varphi_{0,m} = \varphi_m\,, \quad \varphi_{\ell,0} = \varphi'_m\,,$$

che sono proprietà formali caratterizzanti la generalizzazione di Cashwell-Everett.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. AIGNER: *Combinatorial theory*, Springer Verlag, Berlin (1979).

[2] D.R. ANDERSON - T.M. APOSTOL: *The evaluation of Ramanujan's sum and generalizations*, Duke Math. J., **20**, (1953), 211-216.

[3] T.M. APOSTOL: *Introduction to analytic number theory*, Springer Verlag, Berlin (1976).

[4] E.T. BELL: *Functional equations for totients*, Bull. Amer. Math. Soc., **37**, (1931), 85-90.

[5] L. BERARDI - M. CERASOLI - F. EUGENI: *(E,k)-reduced residue s-system* (mod r^k) *and a generalization of Ramanujan sum*, La Ricerca, Napoli, (1) 34, (1983), 78-91.

[6] L. BERARDI - F. EUGENI: *Funzioni indicatrici e applicazioni*, Per. di Mat., **3-4**, (1980), 51-59.

[7] L. BERARDI - F. EUGENI: *La derivata numerica e applicazioni*, Per. di Math., **2-3**, (1979).

[8] L. BERARDI - B. RIZZI: *Somma generalizzata di Ramanujan per l'indicatore di Stevens*, La Ricerca, Napoli, **31**, (1980), 29-35.

[9] E.D. CASHWELL - C.J. EVERETT: *The ring of number theoretic functions*, Pacific J. Math., **9**, (1959), 975-985.

[10] E. COHEN: *An extension of Ramanujan's sum*, Duke Math. J., **16**, (1949), 85-90.

[11] P. DOUBILET - G.C. ROTA - R.P. STANLEY: *On the foundation of combinatorial theory VI: the idea of generating function*, Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. vol. II; Probability theory, Univ. Calif., (1972), 267-318.

[12] T. ESTERMANN: *On the representations of a number as the sum of three or more products*, Proc. London Math. Soc., (2), **34**, (1932), 190-195.

[13] F. EUGENI: *Numeri primitivi ed indicatori generalizzati*, Rend. di Mat. **6**, (1), (1973), 97-130.

[14] P. HAUKKANEN: *Classical arithmetical identities involving a generalization of Ramanujan's sum*, Annales Ac. Sci. Fennicae **68**, (1988), 1-69.

[15] S. RAMANUJAN: *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers*, Trans. Cambridge Philos. Soc., **22**, (1918), 259-276.

[16] R. SIVARAMAKRISHAN: *Square-reduced residue system (*mod r*) and related arithmetical functions*, Can. Math. Bull., **22**, (1979), 207-220.

[17] D. SMITH: *Generalized arithmetic function algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, **251**, (1971), 205-245.

[18] H. STEVENS: *Generalizations of the Euler-function*, Duke Math. J., **38**, (1971), 181-186.

[19] M.V. SUBBARAO - V.C. HARRIS: *A new generalization of Ramanujan's sum*, J. London Math. Soc. **41**, (1966), 595-604.

[20] M. SUGUNAMMA: *Eckford Cohen's generalization's of Ramanujan trigonometrical sum* $C(n,r)$, Duke Math. J., **27**, (1960), 323-330.

[21] D. SURYANARAYANA: *Generalization of two identities of Ramanujan and Eckford Cohen*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **15-A**, (1978), 424-430.

[22] E.C. TITCHMARSH: *The theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford, (1951).

Lavoro pervenuto alla redazione il 15 maggio 1989
ed accettato per la pubblicazione il 29 settembre 1989
su parere favorevole di F. Eugeni e di F. Succi

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Bruno Rizzi - Dipartimento di Matematica e Statistica - Facoltà di Economia e Commercio - Napoli - Italia