Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 399-403

Polinomi di Jacobi s-ortogonali

A. OSSICINI - F. ROSATI

RIASSUNTO – *Si caratterizzano i polinomi di Tchebychef di prima specie come gli unici polinomi di Jacobi ortogonali ed s-ortogonali.*

ABSTRACT – *Tchebychef polynomials of first kind are characterized as the unique orthogonal and s-orthogonal Jacobi polinomials.*

KEY WORDS – *Orthogonal polynomials.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 33A65

1 – Posizione del problema

In varie questioni di approssimazione (vedi ad es. [4], [6]), si è manifestata l'opportunità di disporre di sistemi $\{w_m(x)\}$ di *polinomi ortogonali* (rispetto ad un assegnato peso) che risultassero al tempo stesso sistemi s-ortogonali per *ogni* intero $s \geq 0$, nel senso che, indicato con $w_m(x)$ il polinomio di grado m, indipendente da s, valessero le

$$\int_{-1}^{1} x^k \left[w_m(x)\right]^{2s+1} d\lambda(x) = 0\,, \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots, m-1\,. \tag{1.1}$$

Nel caso particolare

$$d\lambda(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2} dx\,,$$

BERNSTEIN [1], fin dal 1930 segnalò il sistema dei polinomi di Tchebychef di prima specie $\{T_m(x)\}^{(1)}$ come un esempio di soluzione del problema. Tale semplice proprietà, successivamente consentì a KIS [3], ROSATI [8], RIESS [7], di fornire espressioni esplicite dei coefficienti di Christoffel delle formule di quadratura ipergaussiane relative alla funzione peso $(1-x^2)^{-1/2}dx$.

Con lo studio della convergenza di funzionali ipergaussiani [4], è emersa la necessità di indagare se nell'ambito dei sistemi di polinomi di Jacobi $\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, di indici α, β, con $\alpha > -1$, $\beta > -1$, cioè ortogonali rispetto al peso

$$d\lambda(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\,, \tag{1.2}$$

fosse possibile scegliere α e β in modo da ottenere sistemi *s-ortogonali* $\forall\, s \geq 0$, intero.

In questa nota, con tecnica elementare, si dimostra che un tale sistema può esistere solo per $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, è unico e si riduce a quello segnalato da Bernstein.

Pertanto, tale sistema appare come il privilegiato nei problemi di approssimazione, ove fissato il numero dei nodi, è necessario aumentare indefinitamente ($s \to \infty$) la molteplicità.

Tenuto conto che il sistema $\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ è costituito da polinomi di grado m verificanti le relazioni di ortogonalità ($s = 0$)

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta x^k P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1\,, \tag{1.3}$$

si chiede di scegliere, se possibile, α e β in modo che risulti anche $\forall\, s$,

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta x^k \left[P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^{2s+1}dx = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1\,. \tag{1.4}$$

La questione posta è risolta dal teorema seguente.

---

(1) I cui elementi, definiti a meno di una costante moltiplicativa, sono univocamente individuati dalle $T_0 = 1$, $T_1 = x$, ecc.

TEOREMA I. *Tra tutti i sistemi di polinomi di Jacobi* $\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, *al variare di* $\alpha > -1$, $\beta > -1$, *ne esiste uno solo che sia in pari tempo ortogonale ed s-ortogonale,* $s = 0, 1, 2, \ldots$, *rispetto al peso* (1.2); *esso sussiste solo per* $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ *ed è quello dei polinomi di Tchebychef di I specie* $\{T_m(x)\}$.

L'esistenza di un siffatto sistema è già affermata in premessa; basta pertanto provare l'unicità.

2 – Il teorema di unicità

Ricordiamo anzitutto che il sistema dei polinomi di Jacobi $\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ ortogonali rispetto al peso (1.2) ha i primi elementi così fatti:

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1\,, \quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}[(\alpha+1)(1+x) - (\beta+1)(1-x)]\,. \tag{2.1}$$

Esaminiamo la condizione per α e β espressa da (1.4) *nel caso* $s = 1$ (per $s = 0$ essa è verificata per definizione).

Limitiamoci per $s = 1$ allo studio dei due casi

$$m = 1\,, \quad k = 0\,; \qquad m = 2\,, \quad k = 0\,. \tag{2.2}$$

Nel *primo caso*, la condizione (1.4) per α e β si riduce alla

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [(\alpha+1)(1+x) - (\beta+1)(1-x)]^3 dx = 0\,, \tag{2.3}$$

cioè, eseguita la sostituzione $x = 2t - 1$, alla

$$\int_0^1 t^\beta (1-t)^\alpha [(\alpha+1)t - (\beta+1)(1-t)]^3 dt = 0\,. \tag{2.4}$$

Da questa, eseguiti i calcoli ricorrendo alla *beta* ed alla *gamma euleriane* si perviene (a meno di un fattore non nullo) alla $\alpha - \beta = 0$, cioè alla *prima condizione necessaria*

$$\alpha = \beta\,. \tag{2.5}$$

Restringiamo perciò l'esame di (1.4) al caso $\alpha = \beta > -1$ ed andiamo ad esaminare, sempre per $s = 1$, il *secondo* dei casi (2.2), cioè $m = 2$, $k = 0$ espresso per la (1.4) da

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\alpha} [(2\alpha + 3)x^2 - 1]^3 dx = 0\,, \tag{2.6}$$

avendo tenuto conto che

$$P_2^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\alpha + 2}{4} [(2\alpha + 3)x^2 - 1]\,. \tag{2.7}$$

Eseguita nella (2.6) la sostituzione $x = \sqrt{t}$, tale condizione per α si muta nella

$$\int_{0}^{1} (1-t)^{\alpha} [(2\alpha+3)^3 t^{5/2} - 3(2\alpha+3)^2 t^{3/2} + 3(2\alpha+3)t^{1/2} - t^{-1/2}] dt = 0\,. \tag{2.8}$$

Ricorrendo anche in questo caso alle funzioni beta e gamma euleriane, a meno di un fattore non nullo, si perviene alla condizione

$$2\alpha + 1 = 0\,,$$

cioè alla

$$\alpha = -1/2\,. \tag{2.9}$$

Pertanto, la sola limitazione ai casi (2.2) porta alla condizione *necessaria* per l'esistenza di un sistema ortogonale che sia anche s-ortogonale $\forall s$ e cioè

$$\alpha = \beta = -1/2\,. \tag{2.10}$$

Ma sotto tale condizione esiste il sistema dei polinomi di *Tchebychef di I specie* che verifica le (1.4), $\forall s$, e pertanto esso è anche l'unico possibile, onde il *Teorema I* è completamente provato.

Ricordiamo infine che esempi di sistemi di polinomi s-ortogonali rispetto ad opportuni *pesi* sono indicati in [5, 6], ma per essi non vale la proprietà di invarianza rispetto ad s, valida invece nel caso (2.10).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Bernstein: *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini*, J. Math. Pures Appl., (9) 9, (1930).

[2] A. Ghizzetti - F. Mazzarella - A. Ossicini: *Lezioni di Complementi di Matematica*, ed. Veschi - Milano, (1988).

[3] O. Kis: *Remark on mechanical quadrature*, (russian), Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 8, (1957).

[4] M.R. Martinelli - A. Ossicini - F. Rosati: *Funzionali ipergaussiani trigonometrici nel campo analitico*, Le Matematiche, Catania, XXXIX, 1,2, (1984).

[5] A. Ossicini - F. Rosati: *Funzioni caratteristiche nelle formule di quadratura gaussiane con modi multipli*, Bollettino U.M.I., 4, 11 (1975).

[6] A. Ossicini - F. Rosati: *Sulla convergenza dei funzionali ipergaussiani*, Rend. Mat. e Appl., S. VI, Vol. 11, (1978).

[7] R.D. Riess: *On the determination of quadrature formulae of highest degree of precision for approximating Fourier coefficients*, J. Inst. Math. Appl., 13, (1974).

[8] F. Rosati: *Problemi di Gauss e Tchebychef relativi a formule di quadratura esatte per polinomi trigonometrici*, Le Matematiche, Catania, Vol. XXIII, 1, (1968).

Lavoro pervenuto alla redazione il 7 maggio 1991
ed accettato per la pubblicazione il 5 luglio 1991
su parere favorevole di L. Gori e di P.E. Ricci

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Alessandro Ossicini - Francesco Rosati - Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate - Università degli Studi di Roma "La Sapienza" - Via A. Scarpa, 10 - 00161 Roma - Italia