

## Sulla parallelizzazione esplicita dei prodotti di sfere

M. BRUNI<sup>(\*)</sup>

**RIASSUNTO** – *Si dà una parallelizzazione esplicita dei fibrati tangenti  $\tau(S^a \times S^b \times \dots)$  nei casi  $a = 1, 3, 5, 7$ .*

**ABSTRACT** – *Explicit parallelization of the tangent bundles  $\tau(S^a \times S^b \times \dots)$  in the cases  $a = 1, 3, 5, 7$  are given.*

**KEY WORDS** – *Fibrato tangente - Varietà parallelizzabili.*

**A.M.S. CLASSIFICATION:** 57R15 - 58A30

### 1 – Premessa

È ben noto che la sfera  $S^n$  è parallelizzabile solo se  $n = 1, 3, 7$ .

Più favorevole è la situazione per un prodotto di sfere, che infatti è parallelizzabile non appena uno dei fattori abbia dimensione dispari<sup>(1)</sup>. Si pone allora il problema, che ha anche interesse applicativo, di ottenere una parallelizzazione in forma esplicita per i prodotti indicati<sup>(2)</sup>.

La presente nota fornisce la risposta nel caso che una delle sfere abbia dimensione dispari inferiore a 9.

---

<sup>(\*)</sup>Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

<sup>(1)</sup>KERVAIRE, [3], Th. 12, pag. 247.

<sup>(2)</sup>Limitatamente ai casi  $S^1 \times S^2$ ,  $S^1 \times S^4$  e  $S^5 \times S^2$ , il problema è proposto in [1], pag. 98.

Nei nn. 3,4 e 5 si considera un tipo particolare di campi di vettori su  $S^n$ , dotati di due singolarità, e se ne dà una rappresentazione analitica. Nei nn. 6 e 7 l'uso di tali campi fornisce una parallelizzazione dei prodotti  $S^m \times S^n$  con  $m = 1, 3, 7$  e  $n \in \mathbb{N}$ , realizzati in  $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  come intersezione di due cilindri.

Nel n. 8 si osserva che questo procedimento non è più applicabile alla varietà  $\mathcal{M} = S^5 \times S^2 \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^3$ , perché si presenta un inatteso fenomeno di ostruzione. Si considera allora (n. 9) una diversa realizzazione di  $S^5 \times S^2$  costituita da un'ipersuperficie di rotazione  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^8$ , così da utilizzare l'immagine sferica  $\mathcal{N} \rightarrow S^7$ . Il differenziale di essa induce un'isometria fra gli spazi tangenti in punti che si corrispondono ed è quindi possibile valersi della parallelizzazione di  $S^7$  per ottenere (n. 10) quella di  $\mathcal{N}$ . Un calcolo lungo ma senza difficoltà conduce poi alla parallelizzazione di  $\mathcal{M}$  (nn. 11, 12).

Successivamente (n. 13) un'opportuna rielaborazione delle formule trovate consente di risolvere il problema anche per il prodotto  $S^5 \times S^n$ . Nel n. 14 si tratta infine il caso di tre o più sfere.

## 2 – Preliminari

Sia  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  una varietà differenziabile e siano  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  due sezioni del fibrato tangente  $\tau(M)$ . Indicheremo con  $\mathbf{x}_P, \mathbf{y}_P$  i vettori di  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  in  $P \in M$ . Diremo  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  *ortogonali* e scriveremo  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$  se  $\forall P$  il prodotto scalare  $\langle \mathbf{x}_P, \mathbf{y}_P \rangle$  risulta nullo; le diremo *unitarie* se  $\text{mis } \mathbf{x}_P = \text{mis } \mathbf{y}_P = 1^{(3)}$ .

Se  $M^m$  è parallelizzabile, chiameremo *parallelizzazione standard* (brevemente p. s.) di  $M$ , ogni insieme costituito da  $m$  sezioni di  $\tau(M)$ , tutte unitarie ed a due a due ortogonali.

Nel caso che  $M^m$  sia la sfera  $S^m$  si indicherà con  $\rho(m)$  il massimo numero di sezioni indipendenti di  $\tau(S^m)$ . È ben noto che:

$$(2.1) \quad \rho(m) = m \iff m = 1, 3, 7 \quad (\text{sfere parallelizzabili});$$

$$(2.2) \quad \rho(m) = 1 \iff m = 1, 5, 9, 13, \dots$$

<sup>(3)</sup>Prodotti scalari e misure si valutano mediante la metrica euclidea standard di  $\mathbb{R}^n$ .

Indicheremo con  $S^{n-1}(K, R)$  la sfera di centro  $K$  e raggio  $R$ :

$$(2.3) \quad S^{n-1}(K, R) = \{P \in \mathbb{R}^n : \text{mis KP} = R, R \in \mathbb{R}^+\}.$$

Se  $K$  è l'origine, se  $R = 1$  o infine se accadono le due cose insieme useremo, nell'ordine, i simboli abbreviati  $S^{n-1}(R)$ ,  $S^{n-1}(K)$  e  $S^{n-1}$ ; nell'ultimo caso parleremo di *sfera standard* di  $\mathbb{R}^n$ .

### 3 - Una particolare famiglia di matrici simmetriche

Introduciamo una famiglia di matrici simmetriche che sarà utile, nel n. 5, per esaminare certi campi di vettori sulle sfere.

Sia  $n \in \{2, 3, \dots\}$ ; a ciascun punto  $P(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  associamo la matrice

$$(3.1) \quad A_P = \begin{pmatrix} 1 - (x^1)^2 & -x^1 x^2 & \dots & -x^1 x^n \\ -x^2 x^1 & 1 - (x^2)^2 & \dots & -x^2 x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x^n x^1 & -x^n x^2 & \dots & 1 - (x^n)^2 \end{pmatrix}.$$

Proviamo anzitutto che

$$(3.2) \quad \det A_P = 1 - \text{mis}^2 OP.$$

Il rango di  $A_P$  è perciò uguale a  $n$  se, e solo se,  $\text{mis OP} \neq 1$ . Si ha inoltre

$$(3.3) \quad \text{mis OP} = 1 \iff \text{rg } A_P = n - 1.$$

**DIM. 3.2** - Posto  $-x^h x^k = 0 - x^h x^k$ , si può calcolare  $\det A_P$  come somma dei determinanti di  $2^n$  matrici una delle quali è la matrice unità, altre  $n$  hanno determinanti uguali a  $-(x^1)^2, \dots, -(x^n)^2$  e tutte le rimanenti sono singolari. Dunque  $\det A_P = 1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 = 1 - \text{mis}^2(OP)$ .

DIM. 3.3 - ( $\implies$ ) Per ogni  $h \in \{1, \dots, n\}$  sia  $\mathbf{v}_h$  il vettore le cui coordinate sono gli elementi della  $h$ -ma colonna di  $A_P$ . È immediato che  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_h \rangle = 0$ , onde  $\mathbf{v}_h$  è un elemento dello spazio tangente  $\tau_P(S^{n-1})$ . Sia ora  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$  un altro elemento di  $\tau_P(S^{n-1})$ ; è facile vedere che  $\mathbf{y} = \sum_k y^k \mathbf{v}_k$ ; infatti, con riferimento alla  $h$ -ma coordinata, è  $y^h[1 - (x^h)^2] + \sum_{k \neq h} y^k (-x^k x^h) = y^h - x^h \sum_k y^k x^k = y^h$ , ecc.. Si conclude che l'involuppo lineare dei vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  coincide con  $\tau_P(S^{n-1})$  e quindi  $\text{rg } A_P = n - 1$ .

( $\impliedby$ ) Immediato, per assurdo.  $\square$

Associamo ora ad ogni punto  $P$  di  $\mathbb{R}^n$  la matrice simmetrica d'ordine  $n + 1$  espressa da

$$(3.4) \quad \hat{A}_P = \begin{pmatrix} | & - & - & - & | & x^1 \\ | & & A_P & & | & \vdots \\ | & - & - & - & | & x^n \\ x^1 & \dots & x^n & & 0 & \end{pmatrix}.$$

Passiamo a dimostrare che

(3.5). *Se  $P$  appartiene a  $S^{n-1}$ , la matrice  $\hat{A}_P$  è ortogonale<sup>(4)</sup>.*

DIM. Sia  $F$  il prodotto righe per righe di  $\hat{A}_P$  per se stessa.

Bisogna provare che  $F$  è la matrice unità.

È intanto ovvio che  $f_{hh} = 1$  se  $h = n + 1$ . Ma anche se  $h \leq n$  risulta  $f_{hh} = 1$ . Infatti è  $f_{hh} = (1 - (x^h)^2)^2 + \sum_{k \neq h} (x^k x^h)^2 + (x^h)^2 = 1 - 2(x^h)^2 + (x^h)^4 + (x^h)^2(2 - (x^h)^2) = 1$ .

Si ha poi  $f_{h,n+1} = \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{x} \rangle = 0$ ; infine, per  $h, k \leq n$  è  $f_{hk} = \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_k \rangle = -x^h x^k (-(x^h)^2 + 1 - (x^k)^2) + \sum_{r \neq k} x^h x^k (x^r)^2 + x^h x^k = -2x^h x^k + (x^h)^3 x^k + (x^k)^3 x^h + x^h x^k (1 - (x^h)^2 - (x^k)^2) + x^h x^k = 0$ .  $\square$

<sup>(4)</sup> Si ha così un procedimento rapido per costruire matrici ortogonali, anche se di tipo particolare.

#### 4 – Campi meridiani

Consideriamo un particolare tipo di campi di vettori su  $S^{n-1}(K, R)$  provvisti di due punti singolari antipodali  $S, N$ . Li indicheremo con  $M_{S,N}$  e, per le ragioni che appariranno tra poco, li diremo *campi meridiani* su  $S^{n-1}$ .

Essi sono così definiti (figg. 1,2):

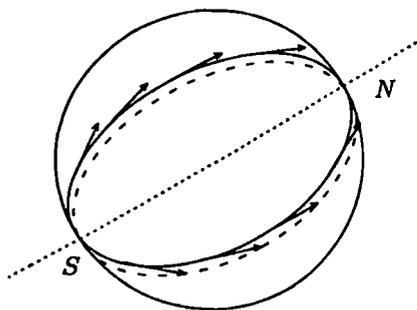


Fig. 1

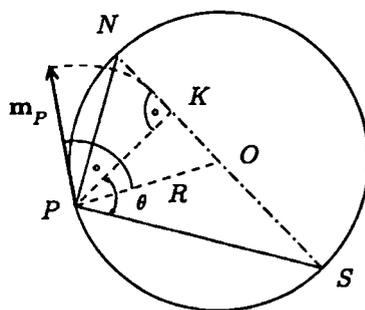


Fig. 2

(4.1)

- (i) il vettore  $\mathbf{m}_P \in M_{S,N}$  appartiene al piano  $SPN$ ;
- (ii) la misura di  $\mathbf{m}_P$  è uguale alla distanza di  $P$  dal diametro  $SN$
- (iii)  $\mathbf{m}_P$  è tangente al semicerchio orientato  $SPN$  ed ha la stessa orientazione di esso.

Le linee integrali del campo  $M_{S,N}$  sono perciò i meridiani di  $S^{n-1}$  relativamente ai punti  $S$  e  $N$  assunti come poli.

Proviamo che  $M_{S,N}$  ha la seguente semplice rappresentazione analitica:

$$(4.2) \quad \mathbf{m}_P = (\langle PK, PN \rangle SP + \langle PK, PS \rangle PN) / (2R)^2.$$

DIM. Esprimiamo anzitutto il versore (o vettore unitario) vers  $\mathbf{m}_P$  e lo scalare mis  $\mathbf{m}_P$  mediante i punti  $P, S, N$ .

Posto  $\vartheta = \widehat{SPK}$ , poiché  $\mathbf{m}_P \perp \mathbf{PO}$ , dall'equazione parametrica vettoriale del cerchio si ricava  $\text{vers } \mathbf{m}_P = (\cos(90^\circ + \vartheta)) \text{vers } \mathbf{PS} + (\sin(90^\circ + \vartheta)) \text{vers } \mathbf{PN}$  e quindi

$$(4.3) \quad \text{vers } \mathbf{m}_P = (\sin \vartheta)(\text{vers } \mathbf{SP}) + (\cos \vartheta)(\text{vers } \mathbf{PN}).$$

Si ha inoltre, ovviamente,

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{\langle \mathbf{PK}, \mathbf{PS} \rangle}{(\text{mis } \mathbf{PK})(\text{mis } \mathbf{PS})} \\ \sin \vartheta &= \frac{\langle \mathbf{PK}, \mathbf{PN} \rangle}{(\text{mis } \mathbf{PK})(\text{mis } \mathbf{PN})} \end{aligned}$$

d'altra parte, dal triangolo rettangolo  $SPN$ , in base a (iii), si ha

$$(4.5) \quad \text{mis } \mathbf{m}_P = \frac{(\text{mis } \mathbf{PS})(\text{mis } \mathbf{PN})}{2R}.$$

Finalmente, da  $\mathbf{m}_P = (\text{mis } \mathbf{m}_P)(\text{vers } \mathbf{m}_P)$ , tenuto conto delle (4.5), (4.3) e (4.4), si conclude.  $\square$

## 5 - Campi meridiani coordinati

Sulla sfera  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  introduciamo  $n$  particolari campi meridiani, caratterizzati dall'aver i punti singolari rispettivamente sul primo, secondo, ..., ultimo asse coordinato. Li chiameremo campi meridiani *coordinati* e li indicheremo con  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ .

Dimostriamo che

(5.1). *Le coordinate dei vettori del campo  $\mathbf{X}_h$  sono espresse dagli elementi della riga  $h$ -ma della matrice (3.1).*

DIM. Riferiamoci, per maggior chiarezza, al campo  $\mathbf{X}_1$ . È perciò  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ ,  $N = (1, 0, \dots, 0)$ , per cui  $\mathbf{PN} = (1 - x^1, -x^2, \dots, -x^n)$ ,  $\mathbf{PS} = (-1 - x^1, -x^2, \dots, -x^n)$ . Inoltre il centro  $K$  della sfera coincide con l'origine  $O$  e quindi

$$\begin{aligned} (\mathbf{PO}, \mathbf{PN})\mathbf{SP} &= (1 - (x^1)^2, x^2(1 - x^1), \dots, x^n(1 - x^1)) \quad \text{e} \\ (\mathbf{PO}, \mathbf{PS})\mathbf{PN} &= (1 - (x^1)^2, -x^2(1 - x^1), \dots, -x^n(1 - x^1)). \end{aligned}$$

Dalla (4.2), tenuto conto che  $R = 1$ , si ha in conclusione

$$(5.2) \quad \mathbf{X}_1 = (1 - (x^1)^2, -x^1x^2, \dots, -x^1x^n). \quad \square$$

Nel seguito useremo le relazioni, valide per  $h, k \in \{1, \dots, n\}$  e  $h \neq k$ :

$$(5.3) \quad \text{mis}^2 \mathbf{X}_h = 1 - (x^h)^2, \quad \langle \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_k \rangle = -x^h x^k$$

con ovvio significato dei simboli.

DIM. Per le (5.1) è  $\text{mis}^2 \mathbf{X}_h = (1 - (x^h)^2)^2 + (x^h)^2 \sum_{k \neq h} (x^k)^2$ ; poiché  $\sum_{k \neq h} (x^k)^2 = 1 - (x^h)^2$  si ottiene subito la (5.3)<sub>1</sub>.

Passiamo alla (5.3)<sub>2</sub>. Posto  $A = \{1, \dots, n\} \setminus \{h, k\}$  si ha

$$\langle \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_k \rangle = (1 - (x^h)^2 + 1 - (x^k)^2)(-x^h x^k) + x^h x^k \sum_{i \in A} (x^i)^2.$$

Ma l'ultimo addendo è uguale a  $x^h x^k (1 - (x^h)^2 - (x^k)^2)$ ; perciò sviluppando si ha  $\langle \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_k \rangle = -2x^h x^k + x^h x^k ((x^h)^2 + (x^k)^2) + x^h x^k (1 - (x^h)^2 - (x^k)^2) = -x^h x^k$  e si conclude.  $\square$

## 6 - Prodotto di una varietà parallelizzabile per una sfera

Consideriamo una varietà parallelizzabile  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}(x^1, \dots, x^{m+1})$  e la sfera  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(y^1, \dots, y^{n+1})$ . È ben noto che la varietà prodotto

$$(6.1) \quad M' = M^m \times S^n \subset \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

risulta parallelizzabile. È poi semplice ottenere una p. s. di essa.

Sia infatti  $\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m\}$  una p. s. di  $M$  e siano  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n+1}$  i campi meridiani coordinati relativi a  $S^n$ . Ebbene:

$$(6.2). \quad \text{Una p. s. di } M' \text{ è fornita dai seguenti campi}^{(5)}:$$

<sup>(5)</sup>Indichiamo con  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  il campo su  $M'$  che ha  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  come rispettive proiezioni su  $\mathbb{R}^{m+1}$  e  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ovvio il senso nel quale bisogna intendere il simbolo  $\langle \mathbf{W}_h, \mathbf{Z}_k \rangle$ .

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= (\mathbf{V}_1, \mathbf{O}), \dots, \mathbf{W}_{m-1} = (\mathbf{V}_{m-1}, \mathbf{O}), \\ \mathbf{Z}_1 &= (y^1 \mathbf{V}_m, \mathbf{Y}_1), \dots, \mathbf{Z}_{n+1} = (y^{n+1} \mathbf{V}_m, \mathbf{Y}_{n+1}). \end{aligned}$$

DIM. Poiché  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m$  sono unitari e ortogonali, sono tali anche  $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{m-1}$ ; è inoltre evidente che  $\langle \mathbf{W}_h, \mathbf{Z}_k \rangle = 0$ . Si ha poi  $\text{mis}^2 \mathbf{Z}_k = (y^k)^2 \text{mis}^2 \mathbf{V}_m + \text{mis}^2 \mathbf{Y}_k = (y^k)^2 + \text{mis}^2 \mathbf{Y}_k$  e quindi  $\text{mis}^2 \mathbf{Z}_k = 1$ , per la (5.3)<sub>1</sub>. È infine  $\langle \mathbf{Z}_h, \mathbf{Z}_k \rangle = y^h y^k \text{mis}^2 \mathbf{V}_m + \langle \mathbf{Y}_h, \mathbf{Y}_k \rangle$  e per (5.3)<sub>2</sub> si conclude.  $\square$

### 7 - Parallelizzazione di $S^m \times S^n$ ( $n = 1, 3, 7$ )

Ricordiamo le formule che danno una p. s. della sfera  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  nei casi  $m = 1$ ,  $m = 3$ ,  $m = 7$ .

Per  $m = 1$  si ha il campo

$$(7.1) \quad \mathbf{T} = (-x^2, x^1).$$

Per  $m = 3$  si hanno i campi

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= (-x^2, x^1, -x^4, x^3), \\ \mathbf{T}_2 &= (-x^3, x^4, x^1, -x^2), \\ \mathbf{T}_3 &= (-x^4, -x^3, x^2, x^1). \end{aligned}$$

Infine, se  $m = 7$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= (x^2, -x^1, x^4, -x^3, x^6, -x^5, x^8, -x^7), \\ \mathbf{T}_2 &= (x^3, -x^4, -x^1, x^2, -x^7, x^8, x^5, -x^6), \\ \mathbf{T}_3 &= (x^5, -x^6, x^7, -x^8, -x^1, x^2, -x^3, x^4), \\ \mathbf{T}_4 &= (x^8, x^7, x^6, x^5, -x^4, -x^3, -x^2, -x^1), \\ \mathbf{T}_5 &= (x^6, x^5, -x^8, -x^7, -x^2, -x^1, x^4, x^3), \\ \mathbf{T}_6 &= (x^7, -x^8, -x^5, x^6, x^3, -x^4, -x^1, x^2), \\ \mathbf{T}_7 &= (x^4, x^3, -x^2, -x^1, x^8, x^7, -x^6, -x^5). \end{aligned}$$

Premesso ciò, se  $m \in \{1, 3, 7\}$  le (6.3), posto  $V_h = T_h$  (oppure  $V_h = T$  se  $m = 1$ ) danno una p. s. di  $S^m \times S^n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

### 8 - Immersione $\mathcal{M}$ di $S^5 \times S^2$ in $\mathbb{R}^9$ . Un fenomeno di ostruzione

La più semplice immersione di  $S^5 \times S^2$  è data da un sottoinsieme  $\mathcal{M}$  di  $\mathbb{R}^9$  intersezione di due opportuni cilindri rotondi. Indicate con  $x^1, \dots, x^6, y^1, y^2, y^3$  coordinate cartesiane in  $\mathbb{R}^9$  è, per es.

$$(8.1) \quad \mathcal{M} = \{(x^1)^2 + \dots + (x^6)^2 = 1, (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\}.$$

Ebbene, tre sezioni indipendenti del fibrato  $\tau(\mathcal{M})$  si ottengono nel seguente modo. Nello spazio coordinato degli assi  $x^1, \dots, x^6$  si considera la sezione  $\mathbf{H}$  del fibrato  $\tau(S^5)$  così definita:

$$(8.2) \quad \mathbf{H} = \{(x^2, -x^1, x^6, x^5, -x^4, -x^3)\}.$$

Si hanno allora, utilizzando le (6.3)<sub>2</sub>, le seguenti sezioni, tra loro ortogonali, di  $\tau(\mathcal{M})$ :

$$\mathbf{K}_1 = (y^1 \mathbf{H}, Y_1) \quad , \quad \mathbf{K}_2 = (y^2 \mathbf{H}, Y_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_3 = (y^3 \mathbf{H}, Y_3).$$

Si può ora considerare un sottofibrato  $\alpha$  di  $\tau(\mathcal{M})$  tale che risulti  $\alpha \oplus \mathbf{K}_1 \oplus \mathbf{K}_2 \oplus \mathbf{K}_3 = \tau(\mathcal{M})$ , e cercare sezioni  $\mathbf{K}_4, \dots, \mathbf{K}_7$  di  $\alpha$  tali che  $\{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_7\}$  risulti una p. s. di  $\mathcal{M}$ .

Ma ciò non è possibile. Nonostante  $\mathcal{M}$  sia parallelizzabile, l'insieme  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$  costituisce una ostruzione, nel senso che in nessuna p. s. della varietà possono figurare simultaneamente le tre sezioni indicate.

Dimostriamo un'affermazione equivalente e cioè che

$$(8.3). \quad \textit{Il fibrato } \alpha \textit{ non ammette sezioni (ovunque non nulle).}$$

DIM. Per assurdo. Sia  $\mathbf{J} = \{\mathbf{j}\}$  una sezione di  $\alpha$  e supponiamo che il vettore  $\mathbf{j}(j^1, j^2, \dots, j^9)$  sia ortogonale a quelli di  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  e  $\mathbf{K}_3$ . Esplicitiamo le relazioni  $\langle \mathbf{J}, \mathbf{K}_m \rangle = 0$ ; tenute presenti le (6.3), (5.1) e posto

$l = x^2 j^1 - x^1 j^2 + x^6 j^3 - x^3 j^6 + x^5 j^4 - x^4 j^5$  si ha

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{J}, \mathbf{K}_1 \rangle &= j^7 [1 - (y^1)^2] - j^8 y^1 y^2 - j^9 y^1 y^3 + l y^1 = 0, \\ \langle \mathbf{J}, \mathbf{K}_2 \rangle &= -j^7 y^2 y^1 + j^8 [1 - (y^2)^2] - j^9 y^2 y^3 + l y^2 = 0, \\ \langle \mathbf{J}, \mathbf{K}_3 \rangle &= -j^7 y^3 y^1 - j^8 y^3 y^2 + j^9 [1 - (y^3)^2] + l y^3 = 0. \end{aligned}$$

Le (8.4) costituiscono un sistema omogeneo in  $j^7, j^8, j^9, l$ . La matrice di esso si può ottenere sopprimendo l'ultima riga della  $\hat{A}_P$  di (3.4) (scritta nel caso  $n = 3$ ) e con  $y^1, y^2, y^3$  in luogo di  $x^1, x^2, x^3$ ; i suoi minori del terz'ordine sono perciò  $y^1, y^2, y^3, 0$  (non tutti nulli perché  $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1$ ) e tutte le soluzioni di (8.4) sono fornite da

$$(8.5) \quad j^7 = \rho y^1, \quad j^8 = \rho y^2, \quad j^9 = \rho y^3, \quad l = 0 \quad (\rho \in \mathbb{R}).$$

Ora, è  $\text{pr}_2 \mathbf{j} = (j^7, j^8, j^9)$  e tale vettore è tangente alla sfera  $S^2$  e perciò perpendicolare a  $\mathbf{OP} = (y^1, y^2, y^3)$ . Dalle (8.5) risulta invece  $\text{pr}_2 \mathbf{j} = \rho \mathbf{OP}$ ; ne segue  $\rho \equiv 0$ . Ma allora  $\text{pr}_2 \mathbf{j} \equiv 0$  e perciò  $\mathbf{j} = \text{pr}_1 \mathbf{j}$ .

In conclusione si avrebbe in  $\tau(S^5)$  una seconda sezione non nulla e ortogonale alla (8.2). Questo è impossibile, per (2.2)<sub>2</sub>; dunque  $\mathbf{J}$  non esiste.  $\square$

### 9 - Immersione $\mathcal{N}$ di $S^5 \times S^2$ in $\mathbb{R}^8$

Il procedimento seguito per ottenere una parallelizzazione dei prodotti  $S^1 \times S^n, S^3 \times S^n$  e  $S^7 \times S^n$  non ha dunque successo nel caso  $S^5 \times S^2$ . È perciò necessario seguire una diversa strada.

Consideriamo un'immersione  $\mathcal{N}$  di  $S^5 \times S^2$  in  $\mathbb{R}^8(u^1, \dots, u^8)$ , costituita da una particolare ipersuperficie rotonda. La varietà  $\mathcal{N}$  è precisamente ottenuta dalla rotazione della 2-sfera

$$(9.1) \quad S = \{(u^1 - 2)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 1, u^4 = u^5 = u^6 = u^7 = u^8 = 0\}$$

attorno al piano  $\pi$  degli assi coordinati  $u^2, u^3$ . La sezione di gola di  $\mathcal{N}$  è la 5-sfera

$$(9.2) \quad S' = \{(u^1)^2 + (u^4)^2 + (u^5)^2 + (u^6)^2 + (u^7)^2 + (u^8)^2 = 1, u^2 = u^3 = 0\}$$

ed è dunque

$$(9.3) \quad \mathcal{N} = S \times S'.$$

È poi elementare riconoscere che l'equazione di  $\mathcal{N}$  può scriversi nella forma

$$(9.4) \quad A^2 = 16B,$$

avendo posto

$$(9.5) \quad \begin{aligned} A &= (u^1)^2 + \dots + (u^8)^2 + 3, \\ B &= (u^1)^2 + (u^4)^2 + (u^5)^2 + \dots + (u^8)^2. \end{aligned}$$

Introduciamo l'immagine sferica di  $\mathcal{N}$

$$(9.6) \quad sf: \mathcal{N} \rightarrow S^7, \quad sf: P \mapsto Q = O + \mathbf{n}$$

in cui  $\mathbf{n}$ , al variare di  $P$ , descrive una delle due sezioni unitarie del fibrato normale  $\nu(\mathcal{N})$ .

Dalle (9.4) e (9.2) discende intanto che il vettore  $\mathbf{l} = (\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^8)$  con

$$(9.7) \quad \ell^h = u^h A \text{ per } h = 2, 3 \text{ e } \ell^h = u^h (A - 8) \text{ per } h = 1, 4, 5, 6, 7, 8,$$

risulta ortogonale a  $\mathcal{N}$  in  $P(u^1, \dots, u^8)$ . Inoltre per (9.7) è  $\text{mis } \mathbf{l} = A$ . Perciò si ha, per esempio,

$$(9.8) \quad \mathbf{n} = (1/A)\mathbf{l}.$$

Sempre dalla (9.7), posto

$$(9.9) \quad t = (A - 8)/A,$$

si ottiene  $\mathbf{n} = (tu^1, u^2, u^3, tu^4, tu^5, tu^6, tu^7, tu^8)$ .

Risulta infine

$$(9.10) \quad sf: P(u^1, \dots, u^8) \mapsto Q(tu^1, u^2, u^3, tu^4, tu^5, tu^6, tu^7, tu^8).$$

## 10 – Parallelizzazione di $\mathcal{N}$

Il differenziale dell'immagine sferica  $sf: \mathcal{N} \rightarrow S^7$  dà luogo ad un'isometria tra gli spazi vettoriali tangenti nei punti corrispondenti  $P, Q$ . Alle sette sezioni di  $\tau(S^7)$  indicate in (7.3) corrispondono così altrettante sezioni di  $\tau(\mathcal{N})$ , che costituiscono la parallelizzazione standard cercata.

Tenuto conto di (9.10) e (7.3), tali sezioni risultano:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}'_1 &= (u^2, -tu^1, tu^4, -u^3, tu^6, -tu^5, tu^8, -tu^7), \\
 \mathbf{T}'_2 &= (u^3, -tu^4, -tu^1, u^2, -tu^7, tu^8, tu^5, -tu^6), \\
 \mathbf{T}'_3 &= (tu^5, -tu^6, tu^7, -tu^8, -tu^1, u^2, -u^3, tu^4), \\
 (10.1) \quad \mathbf{T}'_4 &= (tu^8, tu^7, tu^6, tu^5, -tu^4, -u^3, -u^2, -tu^1), \\
 \mathbf{T}'_5 &= (tu^6, tu^5, -tu^8, -tu^7, -u^2, -tu^1, tu^4, u^3), \\
 \mathbf{T}'_6 &= (tu^7, -tu^8, -tu^5, tu^6, u^3, -tu^4, -tu^1, u^2), \\
 \mathbf{T}'_7 &= (tu^4, u^3, -u^2, -tu^1, tu^8, tu^7, -tu^6, -tu^5).
 \end{aligned}$$

## 11 – Parallelizzazione di $\mathcal{M}$

Utilizziamo la p.s. di  $\mathcal{N}$  ora ottenuta per acquisire una p.s. della varietà  $\mathcal{M}$  che in  $\mathbb{R}^9$  è immagine del prodotto  $S^5 \times S^2$ .

Il problema si risolve passando dalle coordinate (sovrabbondanti)  $u^1, \dots, u^8$  su  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^8$  alle coordinate  $x^1, \dots, x^6, y^1, y^2, y^3$ , opportunamente introdotte, in  $\mathbb{R}^9$ . Con riferimento alla 9.5, consideriamo anzitutto le proiezioni canoniche

$$(11.1) \quad \text{pr}_1: \mathcal{N} \rightarrow S', \quad \text{pr}_2: \mathcal{N} \rightarrow S.$$

Per ottenere un'espressione analitica per  $\text{pr}_1$  e  $\text{pr}_2$  è opportuno rappresentare i punti delle sfere  $S'$  e  $S$  mediante due nuovi sistemi di coordinate cartesiane, con origini nei rispettivi centri; gli assi  $x^1, x^2, \dots, x^6$  del primo sistema sono orientati come gli assi  $u^1, u^4, u^5, \dots, u^8$ , mentre gli assi  $y^1, y^2$

e  $y^3$  del secondo sono orientati come gli assi  $u^1, u^2, u^3$ .

Premesso questo, con elementare calcolo si ottiene

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \text{pr}_1 : P(u^1, \dots, u^8) \mapsto P_1(u^1/\sqrt{B}, u^4/\sqrt{B}, u^5/\sqrt{B}, \\ u^6/\sqrt{B}, u^7/\sqrt{B}, u^8/\sqrt{B}); \end{aligned}$$

$$\text{pr}_2 : P(u^1, \dots, u^8) \mapsto P_2(\sqrt{B} - 2, u^2, u^3)$$

ossia

$$(11.3) \quad \begin{aligned} x^1 &= u^1/\sqrt{B}, \quad x^2 = u^4/\sqrt{B}, \quad x^3 = u^5/\sqrt{B}, \\ x^4 &= u^6/\sqrt{B}, \quad x^5 = u^7/\sqrt{B}, \quad x^6 = u^8/\sqrt{B}; \end{aligned}$$

$$(11.4) \quad y^1 = \sqrt{B} - 2, \quad y^2 = u^2, \quad y^3 = u^3.$$

È ora necessario rappresentare di nuovo le sezioni  $\mathbf{T}'_1, \dots, \mathbf{T}'_7$  facendo però uso delle coordinate  $x^h, y^k$ . Occorre anzitutto procurarsi la rappresentazione analitica dei differenziali

$$(11.5) \quad d\text{pr}_1 : \tau(\mathcal{N}) \rightarrow \tau(S'), \quad d\text{pr}_2 : \tau(\mathcal{N}) \rightarrow \tau(S).$$

Osserviamo in primo luogo che dalla (9.5)<sub>2</sub>, per le (11.3) e (11.4)<sub>1</sub> si ha

$$(11.6) \quad \begin{aligned} d\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) &= -\frac{x^1 du^1 + x^2 du^4 + x^3 du^5 + x^4 du^6 + x^5 du^7 + x^6 du^8}{(y^1 + 2)^2}, \\ d\sqrt{B} &= x^1 du^1 + x^2 du^4 + x^3 du^5 + x^4 du^6 + x^5 du^7 + x^6 du^8. \end{aligned}$$

Differenziando le (11.3), (11.4) e tenendo conto delle (11.6), si ha

$$\begin{aligned}
 dx^1 &= \left( [1 - (x^1)^2] du^1 - x^1 x^2 du^4 - x^1 x^3 du^5 + \right. \\
 &\quad \left. - x^1 x^4 du^6 - x^1 x^5 du^7 - x^1 x^6 du^8 \right) / (y^1 + 2), \\
 dx^2 &= \left( -x^2 x^1 du^1 + [1 - (x^2)^2] du^4 - x^2 x^3 du^5 + \right. \\
 &\quad \left. - x^2 x^4 du^6 - x^2 x^5 du^7 - x^2 x^6 du^8 \right) / (y^1 + 2), \\
 dx^3 &= \left( -x^3 x^1 du^1 - x^3 x^2 du^4 + [1 - (x^3)^2] du^5 + \right. \\
 &\quad \left. - x^3 x^4 du^6 - x^3 x^5 du^7 - x^3 x^6 du^8 \right) / (y^1 + 2), \\
 dx^4 &= \left( -x^4 x^1 du^1 - x^4 x^2 du^4 - x^4 x^3 du^5 + [1 - (x^4)^2] du^6 + \right. \\
 &\quad \left. - x^4 x^5 du^7 - x^4 x^6 du^8 \right) / (y^1 + 2), \\
 dx^5 &= \left( -x^5 x^1 du^1 - x^5 x^2 du^4 - x^5 x^3 du^5 - x^5 x^4 du^6 + \right. \\
 &\quad \left. + [1 - (x^5)^2] du^7 - x^5 x^6 du^8 \right) / (y^1 + 2), \\
 dx^6 &= \left( -x^6 x^1 du^1 - x^6 x^2 du^4 - x^6 x^3 du^5 - x^6 x^4 du^6 + \right. \\
 &\quad \left. - x^6 x^5 du^7 + [1 - (x^6)^2] du^8 \right) / (y^1 + 2);
 \end{aligned}
 \tag{11.7}$$

$$\begin{aligned}
 dy^1 &= x^1 du^1 + x^2 du^4 + x^3 du^5 + x^4 du^6 + x^5 du^7 + x^6 du^8, \\
 dy^2 &= du^2, \\
 dy^3 &= du^3.
 \end{aligned}
 \tag{11.8}$$

Inoltre da (9.9) e (9.4) discende  $t = 1 - 2/\sqrt{B}$  e, in base a (11.4)<sub>1</sub>

$$t = y^1 / (y^1 + 2).
 \tag{11.9}$$

Da (11.3) e ancora (11.4)<sub>1</sub> segue

$$(11.10) \quad tu^1 = x^1y^1, \quad tu^h = x^{h-2}y^1 \quad \text{per } h = 4, 5, 6, 7, 8.$$

Si conclude perciò che risulta

$$\mathbf{T}'_1 = (y^2, -x^1y^1, x^2y^1, -y^3, x^4y^1, -x^3y^1, x^6y^1, -x^5y^1),$$

$$\mathbf{T}'_2 = (y^3, -x^2y^1, -x^1y^1, y^2, -x^5y^1, x^6y^1, x^3y^1, -x^4y^1),$$

$$\mathbf{T}'_3 = (x^3y^1, -x^4y^1, x^5y^1, -x^6y^1, -x^1y^1, y^2, -y^3, x^2y^1),$$

$$\mathbf{T}'_4 = (x^6y^1, x^5y^1, x^4y^1, x^3y^1, -x^2y^1, -y^3, -y^2, -x^1y^1),$$

$$\mathbf{T}'_5 = (x^4y^1, x^3y^1, -x^6y^1, -x^5y^1, -y^2, -x^1y^1, x^2y^1, y^3),$$

$$\mathbf{T}'_6 = (x^5y^1, -x^6y^1, -x^3y^1, x^4y^1, y^3, -x^2y^1, -x^1y^1, y^2),$$

$$\mathbf{T}'_7 = (x^2y^1, y^3, -y^2, -x^1y^1, x^6y^1, x^5y^1, -x^4y^1, -x^3y^1).$$

## 12 – Continuazione

Siamo ora in grado di indicare una p.s. della varietà  $\mathcal{M}$  introdotta in 8.1. È opportuno indicare separatamente prima e seconda proiezione dei campi  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_7$  che la costituiscono; utilizziamo anche la sezione  $\mathbf{H}$  di  $\tau(S^5)$  già considerata ed i campi meridiani coordinati  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  su  $S^2$ . Poniamo infine

$$(12.1) \quad \begin{aligned} l_1 &= x^3y^3 - x^1y^2, & l_2 &= -(x^1y^3 + x^2y^2), & l_3 &= x^5y^3 - x^4y^2, \\ l_4 &= x^4y^3 + x^5y^2, & l_5 &= x^3y^2 - x^6y^3, & l_6 &= -(x^3y^3 + x^6y^2). \end{aligned}$$

Premesso ciò, i campi  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_7$  sono così individuati:

$$\begin{aligned}
 \text{pr}_1 \mathbf{Z}_1 &= \left( y^2 + x^1 l_1, -y^3 + x^2 l_1, x^4 y^1 + x^3 l_1, \right. \\
 &\quad \left. -x^3 y^1 + x^4 l_1, x^6 y^1 + x^5 l_1, -x^5 y^1 + x^6 l_1 \right); \\
 \text{pr}_1 \mathbf{Z}_2 &= \left( y^3 + x^1 l_2, y^2 + x^2 l_2, -x^5 y^1 + x^3 l_2, \right. \\
 &\quad \left. x^6 y^1 + x^4 l_2, x^3 y^1 + x^5 l_2, -x^4 y^1 + x^6 l_2 \right); \\
 \text{pr}_1 \mathbf{Z}_3 &= \left( x^3 y^1 + x^1 l_3, -x^6 y^1 + x^2 l_3, -x^1 y^1 + x^3 l_3, \right. \\
 &\quad \left. y^2 + x^4 l_3, -y^3 + x^5 l_3, x^2 y^1 + x^6 l_3 \right); \\
 \text{(12.2)} \quad \text{pr}_1 \mathbf{Z}_4 &= \left( x^6 y^1 + x^1 l_4, x^3 y^1 + x^2 l_4, x^2 y^1 + x^3 l_4, \right. \\
 &\quad \left. -y^3 + x^4 l_4, -y^2 + x^5 l_4, -x^1 y^1 + x^6 l_4 \right); \\
 \text{pr}_1 \mathbf{Z}_5 &= \left( x^4 y^1 + x^1 l_5, -x^5 y^1 + x^2 l_5, -y^2 + x^3 l_5, \right. \\
 &\quad \left. -x^1 y^1 + x^4 l_5, x^2 y^1 + x^5 l_5, y^3 + x^6 l_5 \right); \\
 \text{pr}_1 \mathbf{Z}_6 &= \left( x^5 y^1 + x^1 l_6, x^4 y^1 + x^2 l_6, y^3 + x^3 l_6, \right. \\
 &\quad \left. -x^2 y^1 + x^4 l_6, -x^1 y^1 + x^5 l_6, y^2 + x^6 l_6 \right); \\
 \text{pr}_1 \mathbf{Z}_7 &= \left( x^2 y^1, -x^1 y^1, x^6 y^1, x^5 y^1, -x^4 y^1, -x^3 y^1 \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(12.3)} \quad \text{pr}_2 \mathbf{Z}_1 &= x^2 \mathbf{Y}_2 + x^1 \mathbf{Y}_3, & \text{pr}_2 \mathbf{Z}_2 &= -x^1 \mathbf{Y}_2 + x^2 \mathbf{Y}_3, \\
 \text{pr}_2 \mathbf{Z}_3 &= x^5 \mathbf{Y}_2 + x^4 \mathbf{Y}_3, & \text{pr}_2 \mathbf{Z}_4 &= x^4 \mathbf{Y}_2 - x^5 \mathbf{Y}_3, \\
 \text{pr}_2 \mathbf{Z}_5 &= -x^6 \mathbf{Y}_2 - x^3 \mathbf{Y}_3, & \text{pr}_2 \mathbf{Z}_6 &= -x^3 \mathbf{Y}_2 + x^6 \mathbf{Y}_3, \\
 \text{pr}_2 \mathbf{Z}_7 &= \mathbf{Y}_1.
 \end{aligned}$$

DIM. Si considerano le sezioni  $\mathbf{T}'_1, \dots, \mathbf{T}'_7$  date in (11.11), che costituiscono una p.s. della varietà  $\mathcal{N}$ . Mediante le (11.7) applicate ai campi di vettori suddetti e utilizzando le (12.1) si ottengono le (12.2). Per le (12.3) ci si basa in modo analogo sulle (11.8).  $\square$

(12.4) OSSERVAZIONE. Eseguendo i prodotti scalari tra  $\mathbf{H}$  e i campi  $\text{pr}_1 \mathbf{Z}_h$  per  $h = 1, 2, \dots, 6$  e ricordando le (12.1) si ha

$$(12.5) \quad \begin{aligned} \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}_1, \mathbf{H} \rangle &= -l_2, & \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}_2, \mathbf{H} \rangle &= l_1, & \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}_3, \mathbf{H} \rangle &= l_4, \\ \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}_4, \mathbf{H} \rangle &= -l_3, & \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}_5, \mathbf{H} \rangle &= l_6, & \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}_6, \mathbf{H} \rangle &= -l_5. \end{aligned}$$

(12.6) OSSERVAZIONE. Dalle (12.2) e (12.3) si rileva che una delle sette sezioni di  $\tau(\mathcal{M})$ , cioè  $\mathbf{Z}_7$ , è direttamente collegata alla sezione  $\mathbf{H}$  ed al campo meridiano  $\mathbf{Y}_1$ . Per le altre sei, le seconde proiezioni riconducono ai campi meridiani  $\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ , mentre le prime appaiono come somma di tre vettori uno dei quali appartiene ad un piano coordinato e gli altri<sup>(6)</sup> sono rispettivamente tangente e normale a  $S^5$ .

### 13 – Parallelizzazione di $S^5 \times S^n$

Passiamo ai prodotti  $S^5 \times S^n$  con  $n$  diverso da 1, 2, 3, 7. Sia la varietà

$$(13.1) \quad \mathcal{M}' = \left\{ P \in \mathbb{R}^{n+7} (x^1, \dots, x^6, y^1, \dots, y^{n+1}) : (x^1)^2 + \dots + (x^6)^2 = 1, \right. \\ \left. (y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2 = 1 \right\}.$$

Indichiamo con  $F_1$  la matrice  $6 \times 6$  costituita dalle coordinate dei primi sei vettori in (12.2) e sia  $F_2$  la matrice  $6 \times (n+1)$  ottenuta in modo analogo dalle (12.3). Ebbene:

**TEOREMA 13.2.** *Si ha una p.s. di  $\mathcal{M}'$  mediante i campi  $\mathbf{Z}'_1, \dots, \mathbf{Z}'_{n+5}$  indicati dallo schema seguente nel quale la seconda e la terza colonna indicano le proiezioni dei campi rispettivamente su  $\tau(S^5)$  e su  $\tau(S^n)$ .*

<sup>(6)</sup>Riferendosi a  $\text{pr}_1 \mathbf{Z}_1$ , i tre vettori indicati sono rispettivamente  $(y^2, -y^3, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, y^1 x^4, -y^1 x^3, y^1 x^6, -y^1 x^5)$  e  $(x^1 l_1, x^2 l_1, \dots, x^6 l_1)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \left. \begin{array}{c} \mathbf{Z}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}'_6 \end{array} \right\} & \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{array} \\
 \mathbf{Z}'_7 & y^1 \mathbf{H} & \mathbf{Y}_1 \\
 \mathbf{Z}'_8 & y^4 \mathbf{H} & \mathbf{Y}_4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mathbf{Z}'_{n+5} & y^{n+1} \mathbf{H} & \mathbf{Y}_{n+1} .
 \end{array}$$

DIM. Bisogna provare che: (i) i campi  $\mathbf{Z}'_r$  sono unitari; (ii) i campi  $\mathbf{Z}'_r, \mathbf{Z}'_s$  sono ortogonali (con  $r, s = 1, \dots, n+5$ ).

(i). Se  $r \in \{1, \dots, 6\}$  risulta  $\text{mis}^2 \mathbf{Z}'_r = \text{mis}^2 \text{pr}_1 \mathbf{Z}'_r + \text{mis}^2 \text{pr}_2 \mathbf{Z}'_r$ ; d'altra parte è  $\text{pr}_1 \mathbf{Z}'_r = \text{pr}_1 \mathbf{Z}_r$  mentre risulta  $\text{mis}^2 \text{pr}_2 \mathbf{Z}'_r = \text{mis}^2 \text{pr}_2 \mathbf{Z}_r$ , tenuto conto delle (12.3) e delle (5.3). È perciò  $\text{mis}^2 \mathbf{Z}'_r = \text{mis}^2 \mathbf{Z}_r = 1$ .

Se invece  $r \in \{7, \dots, n+5\}$ , dalle (13.3), ricordando (5.3)<sub>1</sub> e il fatto che  $\text{mis} \mathbf{H} = l$ , si ha direttamente  $\text{mis}^2 \mathbf{Z}_r = (y^t)^2 + 1 - (y^t)^2 = 1$ , ove  $t = 1$  se  $r = 7$ , altrimenti  $t = r - 4$ .

(ii). Se  $r, s \in \{1, \dots, 6\}$  ci si riconduce come sopra ai campi  $\mathbf{Z}_r, \mathbf{Z}_s$  e ci si basa sulle (5.3). Se  $r, s \in \{7, \dots, n+5\}$ , tenendo conto di (5.3)<sub>2</sub> con ovvio significato di  $t$  e  $t'$  si ha subito  $\langle \mathbf{Z}'_r, \mathbf{Z}'_s \rangle = y^t y^{t'} - y^{t'} y^t = 0$ . Restano i casi  $r \in \{1, \dots, 6\}, s \in \{7, \dots, n+5\}$  che esemplifichiamo ponendo  $r = 1, s = 8$ . È  $\langle \mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_8 \rangle = \langle \text{pr}_1 \mathbf{Z}'_1, y^4 \mathbf{H} \rangle + \langle x^2 \mathbf{Y}_2 + x^1 \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4 \rangle$ . Facendo uso delle (12.5) e (5.3)<sub>2</sub> si ha  $\langle \mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_8 \rangle = -l_2 y^4 - x^2 y^2 y^4 - x^1 y^3 y^4$  che è uguale a zero per la seconda delle (12.1).

#### 14 - Parallelizzazione dei prodotti di tre o più sfere

Consideriamo infine il prodotto  $S^p \times S^{q_1} \times S^{q_2} \times \dots \times S^{q_r}$  con  $p$  dispari e  $r \geq 2$ . Una p.s. di esso si ottiene subito, per ricorrenza, mediante (6.2) e utilizzando (7.1), (7.2), (13.3) e (7.3) a seconda che sia, rispettivamente,  $p = 1, p = 3, p = 5, p = 7$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M.W. HIRSCH: *Differential Topology*, Springer, New York, 1976.
- [2] D. HUSEMOLLER: *Fibre Bundles*, Springer, New York, 1966.
- [3] M.A. KERVAIRE: *Courbure intégrale généralisée et homotopie*, *Math. Ann.*, 131 (1956), 219-252.
- [4] H. OSBORN: *Vector Bundles*, Academic Press, New York, 1982.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 16 maggio 1991  
ed accettato per la pubblicazione il 2 settembre 1991  
su parere favorevole di I. Cattaneo Gasparini e di P. Maroscia*

## INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Marcello Bruni - Università di Roma "La Sapienza" - Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate - Via A. Scarpa, 10 - 00161 Roma - Italia