

Sulla stabilità totale condizionata nella meccanica dei sistemi olonomi

L. SALVADORI - F. VISENTIN^(*)

In memoria di Maria Adelaide Sneider

RIASSUNTO – *In connessione con la questione dell'osservabilità di processi evolutivi, si fornisce un'analisi di concetti di stabilità totale condizionata, di stabilità totale, cioè, ristretta a classi di perturbazioni della legge di evoluzione. Proprietà di stabilità totale condizionata vengono in particolare discusse per l'equilibrio e per i moti merostatici nella meccanica dei sistemi olonomi.*

ABSTRACT – *In connection with the problem of observability, properties of total stability restricted to classes of perturbations of the governing equation are analyzed. In particular, these properties are discussed for the equilibrium as well as the merostatic motions of mechanical holonomic systems.*

KEY WORDS – *Total stability, observability, holonomic systems.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 34D20 - 70F20

1 – Introduzione

La nozione di stabilità totale uniforme, secondo la classica definizione di G.N. DUBOSIN [2], ha un ruolo fondamentale nello studio del

^(*)Lavoro svolto nell'ambito della ricerca finanziata dal MURST (40%) e dal GNFM del CNR.

moto di un sistema meccanico. Infatti, nella schematizzazione della legge che governa il moto di un tale sistema, vengono necessariamente trascurate piccole perturbazioni, dato che, per quanto accurati siano i mezzi di misura, le costanti meccaniche strutturali e le forze agenti sono determinabili solo a meno di piccoli errori o incertezze. Analoghe considerazioni possono naturalmente essere svolte per la legge di evoluzione di un qualunque sistema fisico. Si pone allora il problema di determinare sotto quali condizioni queste perturbazioni, nonché le perturbazioni dei dati iniziali, non provochino forti deviazioni rispetto al tipo di evoluzione previsto per il sistema. Questioni varie di stabilità totale di natura sia teorica che applicativa hanno incontrato un notevole interesse particolarmente nell'ambito della scuola sovietica (cfr. ad es. [3], [5], [6], [12], [16]). I.G. MALKIN [6] ha mostrato che, sotto opportune ipotesi di regolarità, la stabilità asintotica uniforme implica la stabilità totale uniforme, fornendo così un interessante legame tra un tipo di stabilità rispetto alle sole condizioni iniziali e la stabilità totale. Tale risultato è stato poi generalizzato in vari modi al caso di fenomeni evolutivi rappresentabili tramite sistemi dinamici ordinari o generali (cfr. ad es. [8], [15], [17]).

Il problema della stabilità totale appare connesso a quello della osservabilità stessa del processo evolutivo ([1], [9]). In certi casi, peraltro di grande interesse, la mancanza di stabilità totale uniforme pone seri problemi sulla osservabilità o quanto meno sulla compatibilità tra tale osservabilità e lo schema adottato. È ad esempio noto che una posizione di equilibrio di un sistema olonomo conservativo non è mai uniformemente totalmente stabile. È però anche noto che, nelle stesse ipotesi del teorema di Lagrange-Dirichlet, una posizione di equilibrio isolato è uniformemente asintoticamente stabile, e quindi uniformemente totalmente stabile, quando si abbandoni lo schema conservativo e si prendano in considerazione le piccole perturbazioni strettamente dissipative trascurate nella prima approssimazione.

Una ragionevole spiegazione dell'osservabilità, anche senza modificazioni dello schema adottato, può essere ottenuta rinunciando alla richiesta molto rigida di un comportamento stabile rispetto ad ogni tipo di perturbazione, e richiedendo invece che tale comportamento sussista rispetto a classi di perturbazioni che nel problema in esame appaiono di interesse preminente. Ad esempio nella meccanica celeste assumono importanza fondamentale concetti di stabilità totale rispetto a perturbazioni conser-

vative, cioè a perturbazioni che portano da un sistema conservativo ad un altro sistema conservativo.

Nel modo più naturale nasce così l'esigenza di studiare l'esistenza di una proprietà di stabilità totale rispetto a perturbazioni verificanti appropriate condizioni (stabilità totale condizionata). Una formulazione generale del problema della stabilità totale condizionata del moto viene fornita nella Sezione 3 per un generico sistema di equazioni differenziali ordinarie, evidenziando, in particolare, alcune relazioni che la nozione di stabilità totale ha con la stabilità (alla Liapunov), nel caso in cui le perturbazioni della legge di evoluzione siano nulle in corrispondenza del moto predetto. In tal caso la stabilità totale condizionata non sempre coincide con la stabilità secolare del moto rispetto alle perturbazioni in esame, cioè con la proprietà che il moto sia stabile e che la stabilità si preservi per effetto delle anzidette perturbazioni.

Nella Sezione 4 viene discussa la stabilità totale condizionata dell'equilibrio considerando un sistema olonomo soggetto a forze posizionali conservative ed a forze dissipative, in senso lato, comprendendo cioè anche le perturbazioni di potenza nulla. Le perturbazioni rispetto a cui viene analizzata la stabilità del comportamento sono tutte e sole quelle che si ottengono modificando l'energia cinetica, il potenziale della sollecitazione conservativa e la sollecitazione dissipativa, senza alterare lo schema lagrangiano.

Estensioni al problema della stabilità totale condizionata dei moti merostatici di un sistema olonomo a coordinate ignorabili vengono infine fornite nella Sezione 5.

2 – Stabilità alla Liapunov e stabilità totale per equazioni differenziali ordinarie

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non limitato superiormente e sia $D \subseteq \mathbb{R}^s$ un aperto contenente l'origine 0 di \mathbb{R}^s . Consideriamo l'equazione differenziale

$$(2.1) \quad \dot{x} = f(t, x),$$

con $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^s)$, $f(t, 0) \equiv 0$. Per $(t_0, x_0) \in I \times D$ sia $F(t_0, x_0)$ l'insieme delle soluzioni non prolungabili di (2.1) soddisfacenti il sistema

di condizioni iniziali (t_0, x_0) . Per $x \in F(t_0, x_0)$ siano $J(x)$ l'intervallo di esistenza di x e $J^+(x) = \{t \in J(x), t \geq t_0\}$. Denotiamo con $\|\cdot\|$ la norma euclidea in \mathbb{R}^s e con $S(\gamma)$, $\gamma > 0$, la sfera $\{x \in \mathbb{R}^s: \|x\| < \gamma\}$. Sia $\chi = \sup \{\gamma > 0: S(\gamma) \subseteq D\}$. Richiamiamo alcuni concetti di stabilità alla Liapunov. La soluzione $x \equiv 0$ di (2.1) si dice: (i) stabile se per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che l'essere $\|x_0\| < \delta$, $x \in F(t_0, x_0)$, implichi $\|x(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$; (ii) uniformemente stabile se è stabile e δ può essere scelto indipendentemente da t_0 , cioè se per ogni $\varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che l'essere $t_0 \in I$, $\|x_0\| < \delta$, $x \in F(t_0, x_0)$, implichi $\|x(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$; (iii) uniformemente asintoticamente stabile se è uniformemente stabile ed esiste $\sigma \in (0, \delta(\gamma))$ per qualche $\gamma \in (0, \chi)$, tale che se $t_0 \in I$, $\|x_0\| < \sigma$, $x \in F(t_0, x_0)$, allora $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ uniformemente in (t_0, x_0) ; (iv) instabile se essa non è stabile, se cioè esistono $t_0 \in I$, $\eta > 0$, una successione $\{x_i\}$ in D , $\|x_i\| \rightarrow 0$, tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$ esistano $x \in F(t_0, x_i)$ e $t \in J^+(x)$ con $\|x(t)\| \geq \eta$.

Se $x \equiv 0$ è stabile, allora per fissati t_0, ε l'estremo superiore $r(t_0, \varepsilon)$ dell'insieme dei numeri $\delta(t_0, \varepsilon)$ soddisfacenti la condizione espressa in (i) verrà detto raggio di stabilità. Analogamente se $x \equiv 0$ è uniformemente stabile, per ogni fissato ε chiameremo raggio di uniforme stabilità l'estremo superiore $r(\varepsilon)$ dell'insieme dei numeri $\delta(\varepsilon)$ soddisfacenti la condizione espressa in (ii). Se infine $x \equiv 0$ è instabile e t_0 è l'istante in (iv) (nel qual caso diremo anche che $x \equiv 0$ è t_0 -instabile), porremo

$$R(t_0) = \sup \{ \eta > 0: \text{esiste } \{x_i\} \subset D, \|x_i\| \rightarrow 0, \text{ tale che per ogni } i \in \mathbb{N} \text{ esistano } x \in F(t_0, x_i) \text{ e } t \in J^+(x) \text{ con } \|x(t)\| \geq \eta \}.$$

Il numero $R(t_0)$ (finito o infinito) si chiamerà raggio di instabilità relativo a t_0 .

Sia \mathcal{F} l'insieme delle funzioni continue limitate definite in $I \times D$, a valori in \mathbb{R}^s , munito della norma C^0 , che indicheremo con $|\cdot|_c$. Per $h \in \mathcal{F}$ l'equazione

$$(2.2) \quad \dot{x} = f(t, x) + h(t, x)$$

si chiamerà un'equazione perturbata dell'equazione (2.1). Quest'ultima si dirà l'equazione imperturbata. Per $(t_0, x_0) \in I \times D$ sia $F(h, t_0, x_0)$ l'insieme delle soluzioni di (2.2) soddisfacenti la condizione iniziale (t_0, x_0) .

La soluzione $x \equiv 0$ di (2.1) si dice: (i) totalmente stabile se per ogni $t_0 \in I$ ed $\varepsilon \in (0, \chi)$ esistono $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(t_0, \varepsilon) > 0$ tali che l'essere $\|x_0\| < \delta_1$, $h \in \mathcal{F}$, $|h|_c < \delta_2$, e $x \in F(h, t_0, x_0)$, implichi $\|x(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$; (ii) uniformemente totalmente stabile se è totalmente stabile e δ_1, δ_2 si possono assumere indipendenti da t_0 .

Il classico risultato di Malkin a cui abbiamo già accennato nella Sezione 1 mostra che se f è sufficientemente regolare la uniforme totale stabilità è una proprietà più debole della uniforme asintotica stabilità:

TEOREMA 2.1. *Supponiamo che la funzione f soddisfi una condizione uniforme di Lipschitz, cioè supponiamo che per ogni compatto K contenuto in D esista una costante $\nu(K) > 0$ tale che $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \nu(K)\|x_1 - x_2\|$ per ogni $t \in I$ e $x_1, x_2 \in K$. Allora se la soluzione nulla di (2.1) è uniformemente asintoticamente stabile, essa è uniformemente totalmente stabile.*

Tale teorema non è in generale invertibile. La caratterizzazione della uniforme totale stabilità tramite le proprietà di stabilità dell'origine del sistema imperturbato è in generale un problema aperto. Tale caratterizzazione è invece nota nel caso di sistemi differenziali periodici, in particolare autonomi, per i quali $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^s)$ è localmente lipschitziana in x . Per un tale sistema denotiamo con τ un periodo positivo e con $x(t, t_0, x_0)$ la soluzione passante per $(t_0, x_0) \in I \times D$. Un insieme compatto $U \subset D$ dicesi τ -contraente se esistono t_0 in I ed un compatto $A \subset \text{int}(U)$ tali che se $x_0 \in U$, allora $x(t, t_0, x_0)$ esiste per $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ e si ha $x(t_0 + \tau, t_0, x_0) \in A$. Il seguente teorema è stato fornito in [15] come generalizzazione di un teorema di SEIBERT [17] relativo a sistemi autonomi.

TEOREMA 2.2. *Supponiamo che $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^s)$ sia localmente lipschitziana in x e verifichi la condizione $f(t + \tau, x) \equiv f(t, x)$ per qualche $\tau > 0$. Allora la soluzione nulla di (2.1) è uniformemente totalmente stabile se e solo se essa è stabile e l'origine di \mathbb{R}^s ammette un sistema fondamentale di intorni compatti τ -contraenti.*

Il teorema di Liouville sull'invarianza dei volumi per i sistemi aventi divergenza spaziale nulla, conduce al seguente corollario del Teorema 2.2.

COROLLARIO 2.1. *Supponiamo che $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^s)$ sia periodica in t , di classe C^1 in x e a divergenza nulla rispetto ad x , cioè*

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^s \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \equiv 0.$$

Allora $x \equiv 0$ non è uniformemente totalmente stabile.

3 - Stabilità totale condizionata

In dipendenza della natura del problema di evoluzione governato dall'equazione (2.1), classi di perturbazioni di f soddisfacenti opportune condizioni possono essere di interesse prevalente. Acquistano allora rilevanza concetti con i quali la condizione della stabilità totale viene ristretta a tali classi di perturbazioni. In maniera del tutto generale consideriamo uno spazio di Banach B e sia $|\cdot|_B$ una norma per B . D'ora in avanti indicheremo con 0 lo zero di \mathbb{R}^s con $s \geq 1$ qualsiasi e con ω lo zero di B o di una qualunque proiezione di B . Sia $\Lambda \subseteq B$ un dominio contenente l'origine ω di B ed evente ω come punto di accumulazione. Sia $g \in C(I \times D \times \Lambda, \mathbb{R}^s)$ un'applicazione tale che

$$(K) \quad a(|\lambda|_B) \leq \|g(t, x, \lambda) - f(t, x)\| \leq b(|\lambda|_B)$$

per ogni $(t, x, \lambda) \in I \times D \times \Lambda$ e per una qualche coppia di funzioni continue $a, b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, nulle nell'origine, e strettamente crescenti. Denotiamo con \mathcal{U} l'insieme delle perturbazioni di f tali che $h \in \mathcal{U}$ implichi l'esistenza di λ in Λ con $h(t, x) \equiv g(t, x, \lambda)$. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ consideriamo l'equazione

$$(3.1) \quad \dot{x} = g(t, x, \lambda)$$

e per ogni $(t_0, x_0) \in I \times D$ indichiamo con $G(\lambda, t_0, x_0)$ l'insieme delle soluzioni non prolungabili dell'equazione perturbata (3.1) soddisfacenti la condizione iniziale (t_0, x_0) . Diremo che la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione imperturbata è \mathcal{U} -totalmente stabile se per ogni $t_0 \in I$ ed $\varepsilon \in (0, \chi)$ esistono $\sigma_1 = \sigma_1(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, $\sigma_2 = \sigma_2(t_0, \varepsilon) > 0$ tali che l'essere $\|x_0\| < \sigma_1$, $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda|_B < \sigma_2$, ed $x \in G(\lambda, t_0, x_0)$, implichi $\|x(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$. In altri termini la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione imperturbata è \mathcal{U} -totalmente stabile se la soluzione $x \equiv 0$, $\lambda = \omega$ del sistema $\dot{x} = g(t, x, \lambda)$,

$\dot{\lambda} = 0$ è stabile nel senso di Liapunov. Se per σ_1 e σ_2 si possono assumere numeri indipendenti da t_0 la \mathcal{U} -totale stabilità dicesi uniforme.

Assumiamo ora in particolare che $g(t, 0, \lambda) \equiv 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, cosicché $x \equiv 0$ è soluzione di (3.1) per ogni $\lambda \in \Lambda$. A priori non si ha nessuna relazione tra la totale stabilità della soluzione nulla dell'equazione imperturbata (2.1) e la stabilità della soluzione nulla di ciascuno dei sistemi perturbati. Si possono in particolare verificare le seguenti eventualità: (a) l'origine è stabile rispetto a tutte le equazioni perturbate e non è \mathcal{U} -totalmente stabile; (b) l'origine è instabile per tutte le equazioni perturbate (con $\lambda \neq \omega$) ed è \mathcal{U} -totalmente stabile. Gli esempi che seguono mostrano come ciascuna di queste eventualità possa effettivamente presentarsi.

ESEMPI. Consideriamo i due sistemi in $x = (x_1, x_2)$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - \lambda^2 x_1 + \lambda x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \lambda^2 x_2 + \lambda x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda x_2, \end{aligned}$$

dipendenti da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}^+ \equiv \Lambda$. Penseremo questi due sistemi definiti in un aperto limitato D del piano contenente l'origine. Indicheremo con $\|\cdot\|$ la norma euclidea in \mathbb{R}^2 e con χ la distanza dell'origine da ∂D . Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$ si ha che $x \equiv 0$ è soluzione sia di (3.2) che di (3.3). Per ciascuno di questi sistemi assumeremo come imperturbato il sistema che si ha per $\lambda = 0$. Per quanto riguarda il sistema (3.2), l'origine è uniformemente asintoticamente stabile per $\lambda > 0$ (con una regione di attrazione che tende a zero per $\lambda \rightarrow 0$) ed è uniformemente stabile per $\lambda = 0$. Invece, come è facile dimostrare, la soluzione nulla del sistema imperturbato non è totalmente stabile rispetto alla famiglia dei sistemi perturbati (3.2), cioè non è \mathcal{U} -totalmente stabile con

$$\mathcal{U} = \left\{ h_\lambda: D \rightarrow D, h_\lambda(x) = \lambda x(\|x\|^2 - \lambda), \lambda \geq 0 \right\}.$$

Ciò si può dimostrare tramite la funzione di Liapunov $V(x) = \|x\|^2$, la cui derivata lungo le soluzioni di (3.2) è data da $\dot{V}_\lambda(x) = 2\lambda\|x\|^2(\|x\|^2 - \lambda)$.

Supponiamo per assurdo che la soluzione nulla del sistema imperturbato sia \mathcal{U} -uniformemente totalmente stabile. Fissato $\varepsilon \in (0, \chi)$, siano $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$, $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon)$ i due numeri associati a ε nella definizione di stabilità totale. Possiamo sempre assumere che sia $\sigma_2 < \sigma_1^2$. Sia $\lambda \in (0, \sigma_2)$. La circonferenza di equazione $\|x\|^2 = \lambda$ è l'orbita di una soluzione di (3.2). Siano allora $t_0 \in I$ ed x_0 tale che $(\lambda)^{1/2} < \|x_0\| < \sigma_1$. Sia $x_\lambda(t, t_0, x_0)$ la soluzione di (3.2) di condizioni iniziali t_0, x_0 . Per l'unicità delle orbite di un sistema autonomo risulta $\|x_\lambda(t, t_0, x_0)\|^2 > \lambda$ e quindi $\dot{V}_\lambda(x_\lambda(t, t_0, x_0)) > 0$. Si ha pertanto $V(x_\lambda(t, t_0, x_0)) \geq V(x_0) = V_0 > \lambda$ e quindi

$$\dot{V}_\lambda(x_\lambda(t, t_0, x_0)) > 2\lambda V_0(V_0 - \lambda) > 0.$$

Allora $V(x_\lambda(t, t_0, x_0)) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ laddove l'anzidetta ipotesi di stabilità totale implica $V(x_\lambda(t, t_0, x_0)) < \varepsilon^2$ per ogni $t \geq t_0$. Per la soluzione nulla del sistema imperturbato e per il predetto insieme \mathcal{U} di perturbazioni si verifica quindi la situazione (a).

Per quanto riguarda il sistema (3.3) si ha che per $\lambda = 0$ la soluzione nulla è uniformemente asintoticamente stabile, e quindi uniformemente totalmente stabile grazie al Teorema 2.1. Invece l'origine è instabile per qualunque $\lambda > 0$, come si vede facilmente ancora tramite la funzione di Liapunov $V(x) = \|x\|^2$. Per la soluzione nulla del sistema imperturbato si verifica quindi la situazione (b) rispetto alla famiglia dei sistemi perturbati (3.3), cioè tale soluzione è \mathcal{U} -uniformemente totalmente stabile con

$$\mathcal{U} = \{h_\lambda: D \rightarrow D, h_\lambda(x) = \lambda x, \lambda \geq 0\}.$$

In generale, circa le eventualità (a) e (b), sussiste la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.1. *Assumiamo $g(t, 0, \lambda) \equiv 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Si ha:*

(I) *Supponiamo che per ogni $\lambda \in \Lambda$ la soluzione nulla di (3.1) sia stabile e sia $r(\lambda, t_0, \varepsilon)$ il corrispondente raggio di stabilità. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché la soluzione nulla di (2.1) sia \mathcal{U} -totalmente stabile è che per ogni $t_0 \in I$ ed $\varepsilon > 0$ si abbia $\lim_{\lambda \rightarrow 0} r(\lambda, t_0, \varepsilon) > 0$.*

(II) *Supponiamo che per ogni $\lambda \in \Lambda$ la soluzione nulla di (3.1) sia uniformemente stabile e sia $r(\lambda, \varepsilon)$ il corrispondente raggio di stabilità uniforme.*

Allora condizione necessaria e sufficiente affinché la soluzione nulla di (2.1) sia \mathcal{U} -uniformemente totalmente stabile è che per ogni $\varepsilon > 0$ si abbia $\lim_{\lambda \rightarrow \omega} r(\lambda, \varepsilon) > 0$.

(III) Supponiamo che per ogni $\lambda \in \Lambda - \{\omega\}$ la soluzione nulla di (3.1) sia t_0 -instabile per uno stesso t_0 in I . Allora, se $\lim_{\lambda \rightarrow \omega} R(\lambda, t_0) > 0$, la soluzione nulla di (2.1) non è \mathcal{U} -totalmente stabile.

DIM. (I). Supponiamo che la soluzione nulla di (2.1) sia \mathcal{U} -totalmente stabile. Fissati $t_0 \in I$ e $\varepsilon \in (0, \chi)$, siano $\sigma_1 = \sigma_1(t_0, \varepsilon)$, $\sigma_2 = \sigma_2(t_0, \varepsilon)$ i numeri associati a t_0, ε nella definizione di \mathcal{U} -totale stabilità. Siano $\lambda \in \Lambda$ tale che $|\lambda|_B < \sigma_2$, $x_0 \in S(\sigma_1)$, e $x \in G(\lambda, t_0, x_0)$. Si ha allora $\|x(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$. Pertanto $r(\lambda, t_0, \varepsilon) \geq \sigma_1$ e quindi risulta $\lim_{\lambda \rightarrow \omega} r(\lambda, t_0, \varepsilon) \geq \sigma_1$. Supponiamo viceversa che $\lim_{\lambda \rightarrow \omega} r(\lambda, t_0, \varepsilon) > 0$. Fissati $t_0 \in I$ e $\varepsilon \in (0, \chi)$ esistono allora $\sigma_1 = \sigma_1(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, $\sigma_2 = \sigma_2(t_0, \varepsilon) > 0$ tali che se $|\lambda|_B < \sigma_2$ risulta $r(\lambda, t_0, \varepsilon) \geq \sigma_1$. Allora l'essere $\|x_0\| < \sigma_1$, $|\lambda|_B < \sigma_2$ e $x \in G(\lambda, t_0, x_0)$ implica $\|x(t)\| < \varepsilon$, per $t \geq t_0$. La dimostrazione di (I) è quindi completa.

(II). La dimostrazione è analoga alla precedente.

(III). Esistono $\varepsilon \in (0, \chi)$ e una successione $\{\lambda_i\} \subset \Lambda$, $\lambda_i \rightarrow \omega$, tali che $R(\lambda_i, t_0) > \varepsilon$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. In virtù della stessa definizione di $R(\lambda_i, t_0)$ si riconosce allora che per ogni $\sigma \in (0, \chi)$ e per ogni $i \in \mathbb{N}$ esistono $x_i \in S(\sigma)$, $x \in G(\lambda_i, t_0, x_i)$ tali che $\|x(t)\| \geq \varepsilon$ per qualche $t \geq t_0$. Ciò chiaramente conclude la dimostrazione.

La Proposizione 3.1 (III) non è in generale invertibile. Consideriamo ad esempio il sistema piano $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ in un aperto limitato D del piano contenente l'origine, e l'insieme di perturbazioni dipendenti da un parametro scalare $\mathcal{U} = \{h_\lambda: D \rightarrow D, h_\lambda(x) = \lambda x(\|x\|^2 - \lambda)^2, \lambda \geq 0\}$. Per ogni $\lambda > 0$ l'origine è instabile per il corrispondente sistema perturbato, con un raggio d'instabilità (indipendente da t_0) che tende a zero per $\lambda \rightarrow 0$, laddove la soluzione nulla del sistema imperturbato è stabile ma non \mathcal{U} -totalmente stabile.

4 – Sistemi ologomi e stabilità totale condizionata dell'equilibrio

Siano Φ e Ψ due insiemi aperti limitati di \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, contenenti l'origine. Siano poi $T \in C^1(\Phi \times \Psi, \mathbb{R})$ e $\Pi \in C^1(\Phi, \mathbb{R})$ tali che: (a)

$T(q, v) = (1/2)\langle v, A(q)v \rangle$ dove $A(q)$ è una matrice $n \times n$ simmetrica e definita positiva e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare; (b) $\Pi(0) = 0$, $\nabla\Pi(0) = 0$. Consideriamo il sistema del primo ordine nello spazio a $2n$ dimensioni

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v}(q, v) - \frac{\partial T}{\partial q}(q, v) &= -\nabla\Pi(q) + Q(t, q, v) \\ \frac{dq}{dt} &= v, \end{aligned}$$

dove $Q \in C(\mathbb{R} \times \Phi \times \Psi, \mathbb{R}^n)$ è limitata e soddisfa la condizione $\langle Q(t, q, v), v \rangle \leq 0$ per ogni $(t, q, v) \in \mathbb{R} \times \Phi \times \Psi$. La prima equazione di (4.1) è risolubile rispetto a \dot{v} e allora (4.1) può essere ricondotto alla forma (2.1) con $s = 2n$, $x = (q, v)$, $I = \mathbb{R}$, $D = \Phi \times \Psi$. Conserveremo nella trattazione di (4.1) tutte le notazioni della Sezione 2. Denoteremo inoltre con $S'(\gamma)$ la sfera $\{q \in \mathbb{R}^n : \|q\| < \gamma\}$. Se $q_0 \in \Phi$ soddisfa la condizione $\nabla\Pi(q_0) = 0$ diremo che q_0 e $\Pi(q_0)$ sono rispettivamente un punto critico e un valore critico di Π . Il sistema (4.1) governa il moto di un sistema olonomo S ad n gradi di libertà, a vincoli indipendenti dal tempo e privi di attrito, di energia cinetica T , soggetto alla forza posizionale conservativa $F = -\nabla\Pi$ e alla forza dissipativa Q . La continuità di Q e la condizione $\langle Q(t, q, v), v \rangle \leq 0$ implicano $Q(t, q, 0) \equiv 0$. Allora $q_0 \in \Phi$ è una posizione di equilibrio se e solo se q_0 è punto critico di Π . In particolare $q = 0$ è una posizione di equilibrio di S . La derivata lungo le soluzioni di (4.1) dell'energia totale, $H = T + \Pi$, soddisfa la condizione $\dot{H}(t, q, v) = \langle Q(t, q, v), v \rangle \leq 0$.

Ricordiamo che la forza Q è detta: (i) non energetica se $\langle Q(t, q, v), v \rangle \equiv 0$; (ii) girostatica se essa è non energetica ed inoltre Q è indipendente da t e lineare rispetto a v ; (iii) strettamente dissipativa se per ogni $(t, q, v) \in \mathbb{R} \times \Phi \times \Psi$ si ha $\langle Q(t, q, v), v \rangle \leq -a(\|v\|)$ dove $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ è una funzione nulla nell'origine e strettamente crescente. In corrispondenza il sistema S si dice: (a) conservativo se Q è non energetica; (b) posizionale conservativo se $Q(t, q, v) \equiv 0$; (c) strettamente dissipativo se Q è strettamente dissipativa.

Supponiamo per un momento che nel sistema (4.1) i coefficienti dell'energia cinetica e dell'energia potenziale siano di classe C^2 e sia $Q(t, q, v) \equiv 0$. Consideriamo la forma hamiltoniana del sistema (3.1) e indichiamo con p il vettore momento associato a q . Sia $\sigma : q \equiv q^*(t)$, $p \equiv p^*(t)$ un moto

di S . Tramite la trasformazione $z = q - q^*(t)$, $y = p - p^*(t)$, le equazioni del moto prendono ancora una forma canonica del tipo

$$(4.2) \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

con $H(t, y, z)$ di classe C^2 in (y, z) e con $(\partial H/\partial y)$ e $(\partial H/\partial z)$ entrambi nulli per $y = 0$, $z = 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Il moto σ è rappresentato dalla soluzione $y \equiv 0$, $z \equiv 0$ di (4.1). Il secondo membro di (4.1) soddisfa la condizione (2.3), inoltre se σ è un moto periodico, la funzione H è periodica in t . Dal Corollario 2.1 segue allora che nessun moto periodico (in particolare nessuna posizione di equilibrio) di S può essere uniformemente totalmente stabile. Si può inoltre mostrare che neppure sussiste una proprietà di uniforme totale stabilità ristretta all'orbita di σ nello spazio delle fasi. Sono proprio risultati di questo tipo che fanno emergere seriamente il problema della osservabilità dei moti nella meccanica dei sistemi olonomi conservativi. Noi ci limiteremo in questa sezione alla stabilità dell'equilibrio ponendoci però nel caso generale del sistema (4.1). Come abbiamo accennato nella Sezione 1, si potrà pervenire ad una ragionevole spiegazione dell'osservabilità, senza modificazioni dello schema, ma richiedendo un comportamento stabile rispetto a classi di perturbazioni che appaiono di interesse prevalente.

Riprendiamo precisamente in esame il sistema (4.1) nelle ipotesi assunte all'inizio di questa sezione, e conserviamo tutte le notazioni delle Sezioni 2 e 3. Siano B_1 lo spazio delle funzioni $C^1(\bar{\Phi} \times \bar{\Psi}, \mathbb{R})$ con la norma C^1 , B_2 lo spazio delle funzioni $C^1(\bar{\Phi}, \mathbb{R})$ con la norma C^1 e B_3 lo spazio delle funzioni limitate $C(\mathbb{R} \times \Phi \times \Psi, \mathbb{R})$ con la norma C^0 . Consideriamo lo spazio $B_1 \times B_2 \times B_3$ munito ad esempio della norma $|\cdot|_B = |\cdot|_{B_1} + |\cdot|_{B_2} + |\cdot|_{B_3}$. Siano ancora Λ_1 il sottoinsieme di B_1 costituito dalle funzioni tali che $\Lambda_1(q, v) = \frac{1}{2}(v, A_{\lambda_1}(q)v)$ dove $A_{\lambda_1}(q)$ è una matrice $n \times n$ simmetrica e definita positiva. Denoteremo inoltre con Λ_3 il sottoinsieme di B_3 costituito dalle funzioni tali che $\langle \lambda_3(t, q, v), v \rangle \leq 0$ per ogni $(t, q, v) \in \mathbb{R} \times \Phi \times \Psi$. Posto $\Lambda_2 = B_2$, sia $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \Lambda_3$. Per ogni $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ consideriamo il sistema che si ottiene da (4.1) sostituendo T, Π, Q rispettivamente con $T + \lambda_1, \Pi + \lambda_2, Q + \lambda_3$. Si controlla facilmente che questo sistema può essere ricondotto alla forma (3.1) con g soddisfacente la condizione (K), avendo scritto il sistema (4.1) nella forma $\dot{x} = f(t, x)$. Con riferimento a quest'ultimo sistema, ed a Λ , definiremo

l'insieme \mathcal{U} come nella Sezione 3. Ci occuperemo ora della stabilità totale condizionata della soluzione $q \equiv 0, v \equiv 0$ di (4.1) rispetto all'insieme \mathcal{U} delle perturbazioni, il quale tiene ovviamente conto solo degli errori nella determinazione della forza viva, dell'energia potenziale e della sollecitazione dissipativa. Il teorema che segue mostra che nelle stesse ipotesi del Teorema di Lagrange-Dirichlet, la soluzione nulla del sistema (4.1) è uniformemente totalmente stabile rispetto alle predette perturbazioni. Esso mette in luce per il sistema (4.1) un tipo di proprietà già posto in evidenza in [13] e per un generico sistema di equazioni differenziali ordinarie in [14, 16].

TEOREMA 4.1. *Se l'energia potenziale ha un minimo proprio in $q = 0$, allora la soluzione $q \equiv 0, v \equiv 0$ di (4.1) è \mathcal{U} -uniformemente totalmente stabile.*

DIM. La dimostrazione non è sensibilmente diversa da quella del Teorema di Lagrange Dirichlet. Nelle ipotesi fatte, la funzione $H(q, v) = T(q, v) + \Pi(q)$ relativa al sistema (4.1) è definita positiva in (q, v) . Fissato $\varepsilon \in (0, \chi)$ abbastanza piccolo e posto $m = \min \{H(q, v), \|(q, v)\| = \varepsilon\}$, si ha $m > 0$. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ indichiamo con H_λ l'energia totale relativa al sistema perturbato corrispondente. Lungo le soluzioni del sistema perturbato si ha

$$(4.3) \quad \dot{H}_\lambda(t, q, v) \leq 0 \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda$$

ed esistono $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ e $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon) > 0$ tali che si abbia insieme

$$|H_\lambda(q_0, v_0)| < \frac{m}{2} \quad \text{se } \|(q_0, v_0)\| < \sigma_1 \text{ e } |\lambda|_B < \sigma_2,$$

$$H_\lambda(q, v) \geq \frac{m}{2} \quad \text{se } \|(q, v)\| = \varepsilon \text{ e } |\lambda|_B < \sigma_2.$$

Scelti $t_0 \in \mathbb{R}$ e (q_0, v_0) tale che $\|(q_0, v_0)\| < \sigma_1$, sia $(q(t), v(t)) \in G(\lambda, t_0, q_0, v_0)$. Per tale soluzione risulta $\|(q(t), v(t))\| < \varepsilon$ per ogni $t \geq t_0$. Infatti, se per assurdo esistesse $t_1 > t_0$ tale che

$$\|(q(t), v(t))\| < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_1] \text{ e } \|(q(t_1), v(t_1))\| = \varepsilon,$$

allora la funzione H_λ crescerebbe lungo tale soluzione da un valore $< di $m/2$ ad un valore $\geq m/2$ e ciò è assurdo per la (4.3).$

OSSERVAZIONE 4.1.

(i) Sia $\lambda \in \Lambda - \{\omega\}$ tale che $\nabla \Pi_\lambda(0)$, tale cioè che $q = 0$ sia una posizione di equilibrio per il corrispondente sistema perturbato S_λ . Allora, in conformità a quanto si è osservato nella Sezione 3, per quanto λ sia prossimo ad ω , la stabilità totale di $q = 0$ non implica in generale che $q = 0$ sia una posizione di equilibrio stabile per S_λ . Sia ad esempio S posizionale conservativo e sia Π una forma definita positiva di grado (pari) ≥ 4 . Sia inoltre $\Lambda^* = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda: \lambda_1 = \omega, \lambda_2 = \alpha h(q), \alpha \geq 0, \lambda_3 = \omega\}$ con h forma quadratica suscettibile di assumere valori negativi. Allora l'equilibrio $q = 0$ di S è totalmente stabile rispetto a queste perturbazioni in virtù del Teorema 4.1, mentre per ogni $\lambda \in \Lambda^*$, $\lambda \neq \omega$, la posizione di equilibrio $q = 0$ di S_λ è certamente instabile.

(ii) È noto che la stabilità della soluzione nulla del sistema (4.1) sussiste se più generalmente del minimo proprio di Π , si assume la condizione dell'esistenza di una famiglia fondamentale F di intorno aperti di $q = 0$ tale che per ogni $A \in F$ e $q \in \partial A$ si abbia $\Pi(q) > 0$. È facile convincersi che anche questa condizione è effettivamente sufficiente per la \mathcal{U} -totale stabilità.

TEOREMA 4.2. *Supponiamo che: (i) $Q(t, q, v) \rightarrow 0$ per $v \rightarrow 0$ uniformemente in (t, q) ; (ii) Π non abbia un minimo relativo in $q = 0$; (iii) esista $\gamma \in (0, \chi)$ tale che nell'insieme $P = \{q: \|q\| < \gamma, \Pi(q) < 0\}$ non vi siano posizioni di equilibrio. Allora la soluzione nulla di (4.1) non è \mathcal{U} -totalmente stabile.*

Per la dimostrazione faremo uso di una ovvia modificazione di un teorema d'instabilità di N. ROUCHE [10] concernente la soluzione $x \equiv 0$ di (2.1), il quale è a sua volta una modificazione di un teorema di MATROSOV [7]. Con riferimento alle notazioni della Sezione 2, siano $\{E_a\}$, $a \in \mathcal{A}$, una famiglia di sottoinsiemi chiusi non vuoti di D e $G \in C(I \times D, \mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$, una funzione vettoriale. Tale funzione dicesi: (1) dotata di estremo superiore infinitesimo rispetto alla famiglia $\{E_a\}$ se per ogni $\varepsilon > 0$, $a \in \mathcal{A}$, esiste $\delta > 0$ tale che $x \in D$, $\rho(x, E_a) < \delta$ e $t \in I$ implichi $\|G(t, x)\| < \varepsilon$; (2) definitivamente non nulla su $\{E_a\}$ se per qualche $\gamma \in (0, \chi)$ e per ogni $\eta \in (0, \gamma)$ ed $a \in \mathcal{A}$ esistono $\beta > 0$ ed un ricoprimento aperto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dell'insieme $\{x \in E_a: \eta \leq \|x\| \leq \gamma\}$ tale che per ogni

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$ vi sia una componente G_j di G con la proprietà

$$x \in p_i, \quad \eta \leq \|x\| \leq \gamma, \quad t \in I \implies |G_j(t, x)| > \beta.$$

Siamo ora in grado di enunciare il citato teorema di Rouché nella versione modificata a cui abbiamo dianzi accennato.

TEOREMA 4.3. *Supponiamo che esistano per (2.1) $\gamma \in (0, \chi)$ e tre funzioni $V \in C^1(D, \mathbb{R})$, $W \in C^1(I \times D, \mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$, $u \in C(D, \mathbb{R})$ verificanti le condizioni seguenti: (a) f è limitata; (b) $V(0) = 0$ e V è suscettibile di assumere valori negativi in ogni intorno di $x = 0$; (c) $\dot{V}(t, x) \leq u(x) \leq 0$ per $t \in I$ e $\|x\| \leq \gamma$, (d) W è dotata di estremo superiore infinitesimo rispetto alla famiglia $\{E_a\}$, $E_a = \{x: \|x\| \leq \gamma, u(x) = 0, V(x) \leq -a\}$, $a > 0$; (e) \dot{W} è definitivamente non nulla su $\{E_a\}$. Allora per ogni $t_0 \in I$ la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (2.1) è t_0 -instabile ed il relativo raggio d'instabilità soddisfa $R(t_0) \geq \gamma$.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.2. Poniamo

$$\Lambda^* = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3): \lambda_1 = \omega, \lambda_2 = \omega, \lambda_3 = \mu \tilde{Q}(q, v), \mu \geq 0\},$$

dove $\tilde{Q} \in C(\Phi \times \Psi, \mathbb{R}^n)$ è una sollecitazione strettamente dissipativa. In virtù della Proposizione 3.1 (III) l'assenza di \mathcal{U} -totale stabilità di $q = 0$ sarà provata se mostreremo che per qualche t_0 in \mathbb{R} e per ogni $\mu > 0$ la posizione $q = 0$ del corrispondente sistema perturbato S_μ è t_0 -instabile ed il raggio di instabilità $R(\mu, t_0)$ è non inferiore ad un numero positivo indipendente da μ . Il risultato richiesto si ottiene come applicazione del Teorema 4.3 con lo stesso procedimento usato da N. ROUCHE in [10]. Si assuma precisamente $V = H$ e $W = \partial T / \partial v$. In virtù di (ii) questa V soddisfa la condizione (b) del Teorema 4.3. Inoltre lungo le soluzioni del sistema perturbato risulta

$$\dot{H}(\mu, t, q, v) \leq -\mu c(\|v\|),$$

con $c \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ strettamente crescente e $c(0) = 0$. Pertanto anche la condizione (c) è verificata con $u = -\mu c$. Poiché $c(\|v\|) = 0$ se e solo se $v = 0$, e poiché W è indipendente da t , continua, e $W(q, 0) \equiv 0$, la

funzione W ha certamente la proprietà (d) del Teorema 4.3. Inoltre lungo le soluzioni del sistema perturbato si ha

$$\dot{W}(\mu, t, q, v) = -\frac{\partial T}{\partial q}(q, v) - \nabla \Pi(q) + Q_\mu(t, q, v),$$

con $Q_\mu = Q + \mu \tilde{Q}$. La proprietà (e) allora è conseguenza del fatto che si ha $\dot{W}(\mu, t, q, 0) = -\nabla \Pi(q)$, del fatto che in virtù dell'ipotesi (i) la tendenza a $-\nabla \Pi(q)$ di $\dot{W}(\mu, t, q, v)$ per $v \rightarrow 0$ è uniforme in (t, q) , e dell'ipotesi (iii). Le condizioni del Teorema 4.3 sono dunque tutte soddisfatte. Si ha quindi che per ogni $\mu > 0$ la soluzione $q \equiv 0, v \equiv 0$ di \mathcal{S}_μ è t_0 -instabile (con t_0 comunque scelto in \mathbb{R}) e che $R(\mu, t_0) \geq \gamma$, potendosi assumere per γ la costante positiva dell'ipotesi (iii). Ciò evidentemente completa la dimostrazione.

Naturalmente se la sollecitazione Q è strettamente dissipativa e soddisfa la condizione (i) mentre Π soddisfa le condizioni (ii) e (iii) del Teorema 4.2, allora la soluzione nulla di (4.1) è essa stessa instabile grazie al Teorema 4.3. Dai Teoremi 4.1 e 4.2 segue anche in particolare che quando la posizione di equilibrio $q = 0$ è isolata e Q soddisfa (i), la condizione che Π abbia un minimo relativo è necessaria e sufficiente per la \mathcal{U} -totale stabilità.

Passiamo ora a considerare il caso in cui Π ($\Pi(0) = 0$) sia una funzione analitica (reale). È noto che l'insieme dei valori critici di una tale funzione contenuti in un compatto è finito [18]. Allora, per la continuità di Π , esiste $\gamma \in (0, \chi)$ tale che zero sia l'unico valore critico di Π in $S'(\gamma)$. Pertanto nel caso in esame la condizione (iii) del Teorema 4.2 è automaticamente soddisfatta. Vale dunque il seguente teorema:

TEOREMA 4.4. *Supponiamo che Π sia una funzione analitica e $Q(t, q, v) \rightarrow 0$ per $v \rightarrow 0$ uniformemente in (t, q) . Allora se Π non ha un minimo relativo in $q = 0$ la soluzione nulla di (4.1) non è \mathcal{U} -totalmente stabile.*

Per risolvere completamente il problema dell'inversione del Teorema 4.1 per potenziali analitici rimane da provare l'assenza di \mathcal{U} -totale stabilità dell'equilibrio nel caso che l'energia potenziale abbia un minimo non proprio in $q = 0$. Abbiamo motivi per congetturare che tale proprietà

sussista ed una ispezione in tal senso è in corso. In questo lavoro ci limiteremo a verificarla in condizioni particolari. Proveremo precisamente il seguente teorema.

TEOREMA 4.5. *Assumiamo che $Q(t, q, v) \rightarrow 0$ per $v \rightarrow 0$ uniformemente in (t, q) e che $\Pi(\Pi(0) = 0)$ sia una funzione analitica che abbia un minimo relativo non proprio in $q = 0$. Supponiamo inoltre che esistano $\gamma \in (0, \chi)$, $k > 0$ tali che*

$$(4.4) \quad k\Pi(q) - \langle \nabla \Pi(q), q \rangle \geq 0 \quad \text{in } S'(\gamma).$$

Allora la soluzione nulla di (4.1) non è \mathcal{U} -totalmente stabile.

DIM. Denotiamo con A l'insieme dei punti critici di Π contenuti in $S'(\gamma)$. Assumendo γ abbastanza piccolo, si ha $\Pi(q) \geq 0$ in $S'(\gamma)$ e, come è facile convincersi in base alla proprietà in [18] precedentemente richiamata, $A = \{q \in S'(\gamma) : \Pi(q) = 0\}$. Poniamo

$$\Lambda^* = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \lambda_1 = \omega, \lambda_2 = -\mu \|q\|^m, \lambda_3 = \mu \bar{Q}(q, v), \mu \geq 0 \right\},$$

dove $\bar{Q} \in C(\Phi \times \Psi, \mathbb{R}^n)$ è una sollecitazione strettamente dissipativa e m è un intero pari $\geq k$. Per ogni $\mu > 0$ il sistema perturbato corrispondente ammette ancora la soluzione $q \equiv 0$, $v \equiv 0$. Inoltre la sua energia potenziale è ancora una funzione analitica definita da

$$\Pi_\mu(q) = \Pi(q) - \mu \|q\|^m.$$

Per tale funzione risulta quindi

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Pi_\mu(q) &= \Pi(q) - \mu \|q\|^m = -\mu \|q\|^m < 0 \quad \text{per ogni } q \in A, \text{ e} \\ \Pi_\mu(0) &= \Pi(0) = 0, \quad \nabla \Pi_\mu(0) = \nabla \Pi(0) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo che per ogni fissato $\mu > 0$ non esistono punti critici di Π_μ nell'insieme $P_\mu = \{q : \|q\| < \gamma, \Pi_\mu(q) < 0\}$. Basta ovviamente far vedere che se $q \in S'(\gamma)$ è tale che $\langle \nabla \Pi_\mu(q), q \rangle = 0$, allora $\Pi_\mu(q) \geq 0$. Si ha

$$\langle \nabla \Pi_\mu(q), q \rangle = \langle \nabla \Pi(q), q \rangle - \mu m \|q\|^{m-1} \|q\|$$

e quindi $\langle \nabla \Pi_\mu(q), q \rangle = 0$ in tutti i punti q tali che

$$\mu = \langle \nabla \Pi(q), q \rangle (m \|q\|^m)^{-1}.$$

In tali punti si ha

$$\Pi_\mu(q) = \Pi(q) - (m)^{-1} \langle \nabla \Pi(q), q \rangle$$

e quindi $\Pi_\mu(q) \geq 0$ per la (4.4). Allora, tenendo presente (4.5), e procedendo come per il Teorema 4.3, si vede che per ogni $\mu > 0$ la soluzione $q \equiv 0$, $v \equiv 0$ del corrispondente sistema perturbato è t_0 -instabile (per qualunque t_0 in \mathbb{R}) e che $R(\mu, t_0) \geq \gamma$. Anche in questo caso, dunque, il risultato è una conseguenza della Proposizione 3.1 (III).

La (4.4) è ad esempio soddisfatta nel caso in cui Π sia una forma semidefinita positiva o più generalmente

$$(4.6) \quad \Pi(q) = \sigma(q) \sum_{j=2}^h \Pi_{(j)}(q),$$

dove σ è una funzione analitica tale che $\sigma(0) > 0$, $h \geq 2$, e $\Pi_{(2)}, \dots, \Pi_{(h)}$ sono forme di grado rispettivamente $2, \dots, h$ soddisfacenti la condizione

$$(4.7) \quad \sum_{j=2}^s \Pi_{(j)}(q) \geq 0, \quad s = 2, \dots, h.$$

Siano difatti $k > h$ e $\gamma \in (0, \chi)$ tali che

$$(4.8) \quad \sigma(q) > 0 \text{ e } (k-h)\sigma(q) - \langle \nabla \sigma(q), q \rangle \geq 0, \text{ per ogni } q \in S'(\gamma).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} k\Pi(q) - \langle \nabla \Pi(q), q \rangle &= \sigma(q) \sum_{j=2}^h (k-j)\Pi_{(j)}(q) - \langle \nabla \sigma(q), q \rangle \sum_{j=2}^h \Pi_{(j)}(q) = \\ &= \left[(k-h)\sigma(q) - \langle \nabla \sigma(q), q \rangle \right] \sum_{j=2}^h \Pi_{(j)}(q) + \sigma(q) \sum_{j=2}^{h-1} (h-j)\Pi_{(j)}(q). \end{aligned}$$

Poiché, come è facile verificare,

$$\sum_{j=2}^{h-1} (h-j)\Pi_{(j)}(q) = \sum_{j=2}^{h-1} \Pi_{(j)}(q) + \sum_{j=2}^{h-2} \Pi_{(j)}(q) + \dots + \sum_{j=2}^3 \Pi_{(j)}(q) + \Pi_{(2)},$$

in virtù delle (4.7), (4.8) per ogni $q \in S'(\gamma)$ si ha

$$k\Pi(q) - \langle \nabla\Pi(q), q \rangle \geq 0,$$

cioè appunto la (4.4).

5 - Stabilità totale condizionata dei moti merostatici

Osserviamo che i concetti di stabilità e stabilità totale, condizionata e non, possono essere presi in esame anche relativamente a parte delle coordinate; si hanno allora corrispondenti concetti di stabilità parziale. Conservando le notazioni delle Sezioni 2 e 3, siano precisamente $m \leq s$ un intero positivo e $y = (x_1, \dots, x_m)$. La soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione imperturbata (2.1) si dice: (i) y -stabile se per ogni $t_0 \in I$ ed $\varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che l'essere $\|x_0\| < \delta$ e $x \in F(t_0, x_0)$ implichi $\|y(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$; (ii) (y, \mathcal{U}) -totalmente stabile se per ogni $t_0 \in I$ ed $\varepsilon \in (0, \chi)$ esistono $\sigma_1 = \sigma_1(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, $\sigma_2 = \sigma_2(t_0, \varepsilon) > 0$ tali che l'essere $\|x_0\| < \sigma_1$, $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda|_B < \sigma_2$, ed $x \in G(\lambda, t_0, x_0)$, implichi $\|y(t)\| < \varepsilon$ per $t \geq t_0$. In modo analogo si definiscono tutti gli altri concetti di stabilità parziale.

Supponiamo che le (4.1) siano le equazioni del moto di un sistema con $n - m$, $m < n$, coordinate cicliche q_{m+1}, \dots, q_n , cioè che: (1) Π e i coefficienti di T non dipendano da q_{m+1}, \dots, q_n , (2) Q non dipenda da q_{m+1}, \dots, q_n , v_{m+1}, \dots, v_n , e le componenti Q_i , $i = m+1, \dots, n$, siano identicamente nulle. In questo caso la determinazione delle coordinate non ignorate può essere ottenuta tramite un sistema differenziale che ha ancora la forma (4.1):

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial w} - \frac{\partial T^*}{\partial z} &= -\nabla \Pi^*(z, c) + Q^*(t, z, w, c) \\ \frac{dz}{dt} &= w, \end{aligned}$$

dove $z = (q_1, \dots, q_m)$, $w = (v_1, \dots, v_m)$. Le funzioni Π^* e Q^* involgono la $(n - m)$ -pla $c = (c_{m+1}, \dots, c_n)$ delle costanti dei momenti e $T^* = T^*(z, w)$ è una forma quadratica in w definita positiva. Inoltre $Q^*(t, z, w, c) = Q(t, z, w) + R^*(t, z, w, c)$, dove R^* è una sollecitazione girostatica. Allora per ogni fissato c , le (5.1) rappresentano le equazioni del moto di un sistema olonomo \mathcal{S}^* con m gradi di libertà soggetto ad una forza posizionale conservativa $-\nabla\Pi^*$ e ad una forza dissipativa Q^* . Assumiamo che per un dato valore c_0 di c si abbia $\nabla\Pi^*(0, c_0) = 0$. In tal caso per $c = c_0$ le equazioni (5.1) ammettono la soluzione $z \equiv 0$, $w \equiv 0$. Sia σ uno degli ∞^{n-m} moti merostatici di \mathcal{S} corrispondenti a questa soluzione. Se $\Pi^*(z, c_0)$ ha un minimo relativo proprio in $z = 0$, allora σ è stabile rispetto a z, w condizionatamente alle perturbazioni per cui $c = c_0$ (ROUTH [11]). In realtà la presenza del predetto minimo di $\Pi^*(z, c_0)$ è sufficiente affinché σ sia incondizionatamente stabile rispetto a z, w . Quest'ultima proprietà è stata provata in [13] nel caso in cui $Q \equiv 0$ e in [14] nel caso generale. (Per ulteriori estensioni cfr. [4]). Denotando con $(5.1)_0$ il sistema che si ottiene da (5.1) quando a c si sostituisca c_0 , osserviamo che la suddetta proposizione generale è una conseguenza immediata del Teorema 4.1 quando si tenga conto del fatto che la stabilità incondizionata di σ rispetto a (z, w) non è altro che la stabilità totale della soluzione $z \equiv 0$, $w \equiv 0$ di $(5.1)_0$ rispetto alla classe delle perturbazioni \mathcal{U}^* di $(5.1)_0$ corrispondente all'insieme

$$\Lambda^* = \left\{ (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) : \lambda_1^* = \omega, \lambda_2^* = \Pi^*(z, c) - \Pi^*(z, c_0), \right. \\ \left. \lambda_3^* = Q^*(t, z, w, c) - Q^*(t, z, w, c_0), c \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}.$$

Il Teorema 4.1 consente anche di fornire un teorema di stabilità totale della soluzione nulla del sistema (4.1) rispetto alle coordinate acicliche e ad un conveniente insieme di perturbazioni. Precisamente, poniamo in questo caso

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \lambda_1 \text{ è una forma quadratica definita positiva in } v \text{ a} \right. \\ \left. \text{coefficienti dipendenti solo da } z, \lambda_2 = \lambda_2(z), \lambda_3 = \lambda_3(t, z, w) \text{ è una solle-} \right. \\ \left. \text{citazione dissipativa e } (\lambda_3)_i = 0 \text{ } i = m + 1, \dots, n \right\}.$$

Siano \mathcal{U} e \mathcal{U}^{**} le classi di perturbazioni di (4.1) e $(5.1)_0$ corrispondenti a Λ (si ha chiaramente $\mathcal{U}^{**} \supset \mathcal{U}^*$). Dal Teorema 4.1 segue che nelle

ipotesi (1) e (2), se $\Pi^*(z, c_0)$ ha un minimo relativo proprio in $z = 0$, allora la soluzione nulla del sistema (4.1) è $((z, w), \mathcal{U})$ -uniformemente totalmente stabile, mentre la soluzione nulla del sistema ridotto (5.1)₀ è \mathcal{U}^{**} -uniformemente totalmente stabile.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N.G. CETAEV: *Note on a classical Hamiltonian theory*, PMM, **24** (1), 1960.
- [2] G.N. DUBOSIN: *On the problem of stability of a motion under constantly acting perturbations*, Trudy Gos. Astron. Inst. Sternberg **14** (1), 1940.
- [3] S. GORSIN: *On the stability of motion under constantly acting perturbations*, Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR **56**, Ser. Mat. Mekh. **2**, 1948.
- [4] P. HABETS - C. RISITO: *Stability criteria for systems with first integrals generalizing theorems of Routh and Salvadori*, Equations différentielles et fonctionnelles non linéaires, Ed. P. Janssens, J. Mawhin et N. Rouche, Hermann, Paris, 570-580, 1973.
- [5] P.A. KUZMIN: *Stability with parametric disturbance*, PMM, **21** (1), 1957.
- [6] I.G. MALKIN: *Stability in the case of constantly acting disturbance*, PMM, **8**, 1944, 241-245.
- [7] V.M. MATROSOV: *On the stability of motion*, PMM, **26**, 885-895, 1962.
- [8] F. MARCHETTI - P. NEGRINI - L. SALVADORI - M. SCALIA: *Liapunov direct method in approaching bifurcation problems*, Annali Mat. Pura e Appl. (IV), **CVIII**, 1976, 211-225.
- [9] V. MOAURO - L. SALVADORI - M. SCALIA: *Total stability and classical Hamiltonian theory*, Nonlinear Equations in Abstract Spaces, (V. Lakshmikantham ed.), Academic Press, 1978, 149-159.
- [10] N. ROUCHE: *On the stability of motion*, Non-linear Mechanics, **3**, 1968, 295-306.
- [11] E.J. ROUTH: *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 1st Ed. London: MacMillan, 1860.
- [12] V.V. RUMIANTSEV: *Stability of permanent rotations of a heavy rigid body*, PMM, **20**, 1957, 51-66.
- [13] L. SALVADORI: *Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh*, Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat., **XX**, 1953, 269-272.
- [14] L. SALVADORI: *Sulla stabilità del movimento*, Le Matematiche, **XXIV**, 1969, 218-239.

-
- [15] L. SALVADORI - A. SCHIAFFINO: *On the problem of total stability*, Nonlinear Analysis, TMA, 1 (3), 1977, 207-213.
- [16] A.I. SAVCHENKO: *On the stability of motions of conservative mechanical systems under continually-acting perturbations*, PMM, 38, 1974, 240-245.
- [17] P. SEIBERT: *Estabilidad bajo perturbaciones sostenidas y su generalizacion en flujos continuous*, Acta Mexicana Cienc. y Tecnol., 11 (3), 1968, 154-165.
- [18] J. SOUCEK - V. SOUCEK: *Morse-Sard theorem for real analytic functions*, Comment. Math. Universitatis Carolinae, 13, 1972, 45-51.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 31 luglio 1991
ed accettato per la pubblicazione il 2 settembre 1991
su parere favorevole di P.E. Ricci e di P. Benvenuti*

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

L. Salvadori - Dipartimento di Matematica - Università di Trento - Via Sommarive, 14 - 38050 Povo, Trento - Italia

F. Visentin - Dipartimento di Matematica e Applicazioni - Università di Napoli - Via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli - Italia