Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 555-573

Le equazioni di Knizhnik e Zamolodchikov e le algebre di operatori di vertice

S. CAPPARELLI(*)

RIASSUNTO – *La teoria delle algebre di operatori di vertice viene usata per fornire una fondazione rigorosa della teoria delle equazioni di KZ. Si definiscono degli opportuni operatori e si dimostrano alcune loro proprietà. Questi vengono infine usati per la definizione di serie formali che soddisfano le equazioni in questione.*

ABSTRACT – *Vertex operator algebra theory is used to give a rigorous foundation to the theory of the KZ-equations. We define some operators and prove some of their properties. These operators are then used to define certain formal series that satisfy the KZ-equations.*

KEY WORDS – *Conformal field theory - Lie algebras.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 17B65 - 81R10

1 – Introduzione

In fisica la teoria dei campi conformi in dimensione due fu iniziata in [1]. In [10], gli autori svilupparono questa teoria e fornirono le equazioni differenziali soddisfatte dalle cosiddette "funzioni di correlazione a N punti". Una rigorosa fondazione matematica di tale teoria viene data in [12], usando la teoria delle rappresentazioni dell'algebra affine di tipo $A_1^{(1)}$. Dato lo stretto legame tra le rappresentazioni delle algebre affini

(*)Partially supported by NSF Grant No. DMS-8906772

e le algebre di operatori di vertice (a.o.v.), è naturale pensare di usare esplicitamente queste ultime allo scopo di dare una diversa fondazione rigorosa alla teoria suddetta.

Lo scopo di questo lavoro è usare la teoria delle algebre di operatori di vertice , così come è sviluppata in [8], [7], [3], per dare una definizione di "funzioni a N punti" che soddisfino le equazioni di Knizhnik e Zamolodchikov, [10]. Il riferimento a [12] è ovvio ma qui ci soffermeremo sul ruolo delle a.o.v., nel corso del nostro studio sistematico di tali algebre, cfr. [3]. Faremo anche uso del concetto di operatore di vertice chirale che abbiamo appreso da J.Lepowsky, al quale vanno i nostri ringraziamenti.

Storicamente fu lo studio delle rappresentazioni standard che diede origine al concetto di *algebra di operatori di vertice*, una nuova categoria che costituisce una formulazione algebrica di ciò che i fisici chiamano teoria dei campi conformi. Lo studio di tale classe di algebre venne iniziato in [8], dove gli autori dimostrarono che il Mostro, ossia il gruppo di Fischer e Griess, il più grande gruppo semplice sporadico, è il gruppo degli automorfismi di un particolare esempio di algebra di operatori di vertice. Il concetto di operatore di vertice sembra essere cosí una nuova e potente idea capace di unificare disparati campi della ricerca; un'idea cosí fondamentale come l'idea di matrice. È utile ricordare a questo proposito come sia possibile dare una costruzione delle algebre di Lie semisemplici classiche ed eccezionali in una maniera uniforme usando gli operatori di vertice mentre ciò non è possibile con le matrici.

La riconduzione del Mostro nell'ambito della teoria di Lie, un gruppo che ne era escluso per definizione, mostra la sorprendente potenza di questo concetto. Un altro insospettato ruolo, oltre quello svolto nella fisica teorica a cui accennavamo in apertura, è quello nella teoria delle rappresentazioni del gruppo delle trecce come spiegato in [12]. L'idea fondamentale consiste nel sostituire i "vecchi" operatori di vertice che sono, se ci si consente di esprimerci per un attimo in maniera poco rigorosa ma espressiva, delle funzioni razionali e che "commutano" tra loro, con operatori "chirali" le cui regole di commutazione forniscono appunto una rappresentazione del gruppo delle trecce.

2 – Definizioni e concetti preliminari

Definiremo in questa sezione il concetto di algebra di Virasoro, di algebra di operatori di vertice e suoi moduli.

Sia v lo spazio vettoriale di dimensione infinita avente per base gli elementi

$$\{L_n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}.$$

Tale spazio, dotato della moltiplicazione:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{n+m} + \frac{1}{2}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}c \tag{2.1}$$

per $m, n \in \mathbb{Z}$ e c centrale, è una algebra di Lie e viene detta *algebra di Virasoro*.

Una *algebra di operatori di vertice (a.o.v.)* $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ è una quadrupla composta da uno spazio vettoriale $\mathbb{Z}$-graduato dai pesi n

$$V = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} V_{(n)} \tag{2.2}$$

tale che la dimensione di ciascun $V_{(n)}$ è finita; $V_{(n)} = 0$ se n è minore di un dato intero N; esiste una applicazione lineare da V nello spazio delle serie formali in z e z^{-1} a coefficienti in $\operatorname{End} V$: per ciascun $v \in V$, $Y(v,z)$ è la serie $Y(v,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$, detta operatore di vertice, ove le componenti v_n sono endomorfismi dello spazio lineare V. Tali componenti debbono soddisfare la proprietà che per ciascun $u, v \in V$,

$$u_n v = 0 \tag{2.3}$$

se n è abbastanza grande; inoltre i due vettori omogenei $\mathbf{1}$ e ω devono soddisfare la proprietà che l'operatore di vertice corrispondente a $\mathbf{1}$, $Y(\mathbf{1}, z)$, è l'operatore identità di V e ogni operatore $Y(v,z)$ applicato ad $\mathbf{1}$ fornisce una serie formale a coefficienti in V del tipo

$$Y(v,z)\mathbf{1} = v + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{2.4}$$

ove $a_i \in V$. L'*identità di Jacobi* è soddisfatta, cioè

$$\begin{aligned} z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right)Y(u,z_1)Y(v,z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right)Y(v,z_2)Y(u,z_1) = \\ = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)Y(Y(u,z_0)v,z_2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

ove $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ e $\delta(\frac{z_i - z_j}{z_k})$ deve espandersi in serie formale di potenze nella seconda variabile che appare al numeratore; le componenti dell'operatore di vertice $Y(\omega, z)$ generano una algebra di Virasoro, più precisamente, posto $L(z) = Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$ allora gli endomorfismi $L(n)$ devono soddisfare la seguente **condizione di Virasoro:**

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}c \tag{2.6}$$

per $m, n \in \mathbb{Z}$, e c uno scalare detto il rango della a.o.v..

Infine

$$\frac{d}{dz}Y(v, z) = Y(L(-1)v, z) \tag{2.7}$$

e, per $n \in \mathbb{Z}$, se $v \in V_{(n)}$, $L(0)v = nv$. Per ulteriori dettagli sulle a.o.v rimandiamo il lettore a [8], [7], [3].

Un modulo per una algebra $(V, Y, 1, \omega)$ è uno spazio vettoriale W dotato di una $\mathbf{Q}$-graduazione

$$W = \coprod_{n\in\mathbf{Q}} W_{(n)} \tag{2.8}$$

tale che $\dim W_{(n)} < \infty$, $W_{(n)} = 0$ se n è abbastanza piccolo, con una applicazione lineare denotata ancora $Y(w, z)$ soddisfacente condizioni analoghe a quelle sopra, (ma $Y(1, z) = 1 \in \operatorname{End} W$), inclusa l'identità di Jacobi; le componenti di $Y(\omega, z)$ generano una algebra di Virasoro di operatori su W.

3 – Risultati preliminari

Data un'algebra di operatori di vertice $(V, Y, 1, \omega)$, consideriamo la somma diretta degli spazi duali dei sottospazi omogenei $V_{(n)}$:

$$V' = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} V^*_{(n)} \tag{3.1}$$

Sia $\langle , \rangle$ la applicazione naturale data da $\langle v', v\rangle = v'(v)$. Possiamo osservare che se $v' \in V'$, $u, v \in V$ allora

$$\langle v', Y(u,z)v\rangle = \langle v', \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v z^{-n-1}\rangle =$$
$$\langle v', \sum_{n<N} u_n v z^{-n-1}\rangle = \sum_{n<N} \langle v', u_n v\rangle z^{-n-1}$$

ma v' è zero tranne che su un numero finito di componenti, quindi la somma è finita ed è un polinomio di Laurent nella variabile z.

Data una funzione razionale di due variabili $f(z_1, z_2)$, essa può espandersi in serie di potenze di z_2 o di z_1. Siccome $\mathbf{C}$ è un campo algebricamente chiuso, un esempio tipico è il seguente:

$$\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{z_1^{-1}}{1+\frac{z_2}{z_1}} = z_1^{-1}\left(1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2^2}{z_1^2} + \ldots\right) \tag{3.2}$$

oppure

$$\frac{1}{z_1+z_2} = z_2^{-1}\left(1 - \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1^2}{z_2^2} + \ldots\right) \tag{3.3}$$

è chiaro che, come serie formali, i due membri destri sono differenti benché rappresentino la stessa funzione razionale. Nello spazio vettoriale delle serie formali l'uguaglianza tra una funzione razionale e una serie formale si giustifica solo come una conveniente abbreviazione. Osserviamo ancora che se $v, v_1, v_2 \in V$ e $v' \in V'$ allora la serie formale $\langle v', Y(v_1, z_1)Y(v_2, z_2)v\rangle$ ha solo un numero finito di potenze negative di z_2 ed un numero finito di potenze positive di z_1, infatti siccome $(v_2)_m v = 0$, se m è abbastanza grande, possiamo scrivere

$$Y(v_2, z_2)v = \sum_{m<M} (v_2)_m v z_2^{-m-1}$$

ossia essa contiene sono solo un numero finito di potenze negative di z_2. Avremo ora

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\ m<M} \langle v', (v_1)_n (v_2)_m v\rangle z_1^{-n-1} z_2^{-m-1}.$$

Se assumiamo, per semplicità, che v' sia omogeneo allora

$$\langle v', (v_1)_n (v_2)_m v\rangle = 0$$

ogni qualvolta $(v_1)_n (v_2)_m v$ non sia dello stesso peso (grado) di v'; dato che $m < M$, questa relazione dunque implicherà che $n > N$ per qualche N, e quindi z_1 apparirà solo un numero finito di volte con potenza positiva.

Sussistono i seguenti teoremi, v. [8].

TEOREMA 3.1. *Se $v, v_1, v_2 \in V$ e $v' \in V'$ le serie formali*

$$\langle v', Y(v_1, z_1) Y(v_2, z_2) v\rangle \tag{3.4}$$

e

$$\langle v', Y(v_2, z_2) Y(v_1, z_1) v\rangle \tag{3.5}$$

sono due differenti espansioni di una stessa funzione razionale.

In fisica tale fenomeno viene detto *commutatività* del prodotto di due operatori.

Possiamo considerare non solo il prodotto di due operatori, ma anche la loro composizione come segue.

Se $u, v \in V$ e $Y(u, z_0) = \sum u_n z_0^{-n-1}$, $Y(v, z_1) = \sum v_n z_1^{-n-1}$, allora $Y(Y(u, z_0)v, z_1) = \sum Y(u_n v, z_1) z_0^{-n-1}$. In maniera analoga a quanto visto nel caso del prodotto, anche qui si può mostrare che $\langle v', Y(Y(v_1, z_0)v_2, z_2)v\rangle$ contiene solo un numero finito di potenze negative di z_0 e un numero finito di potenze positive di z_2. Abbiamo inoltre il

TEOREMA 3.2. *La serie formale $\langle v', Y(Y(v_1, z_0)v_2, z_2)v\rangle$ è la espansione di una funzione razionale, inoltre la funzione razionale corrispondente a $Y(v_1, z_1)Y(v_2, z_2)$ coincide con quella corrispondente a $Y(Y(v_1, z_1 - z_2)v_2, z_2)$.*

Nel linguaggio della fisica questo teorema esprime la razionalità della composizione di due operatori di vertice e *l'associatività* del prodotto.

Definiamo ora gli operatori chirali. Dato uno spazio vettoriale V possiamo considerare l'insieme $V\{z\}$ delle funzioni su $\mathbf{Q}$ a valori in V

$$\begin{aligned} v : \mathbf{Q} &\longrightarrow V \\ n &\longmapsto v_n \end{aligned}$$

e possiamo denotare v come una serie formale dove gli esponenti possono essere razionali: $v = \sum_{n \in \mathbf{Q}} v_n z^n$.

Data una a.o.v. v e tre suoi moduli W_1, W_2, W_3, chiameremo operatore chirale di tipo (W_2, W_3, W_1) una applicazione lineare

$$\begin{aligned} W_2 &\longrightarrow (Hom(W_3, W_1))\{z\} \\ w &\longmapsto \mathcal{Y}(w, z) = \sum_{n \in \mathbf{Q}} w_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

(dunque, in queste notazioni, $w_n \in Hom(W_3, W_1)$) che soddisfi le seguenti condizioni:

1. Per ogni $w \in W_2, w' \in W_3, w_n w' = 0$ se n è abbastanza grande.
2. Se $v \in V, w \in W_2, w' \in W_3$ vale l'identità di Jacobi:

$$z_0^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_2}{z_0})Y(v, z_1)\mathcal{Y}(w, z_2)w' - z_0^{-1}\delta(\frac{z_2 - z_1}{-z_0})\mathcal{Y}(w, z_2)Y(v, z_1)w'$$
$$= z_2^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_0}{z_2})\mathcal{Y}(Y(v, z_0)w, z_2)w'. \tag{3.6}$$

3. Vale la relazione

$$\frac{d}{dz}\mathcal{Y}(v, z) = \mathcal{Y}(L(-1)v, z). \tag{3.7}$$

Si osservi che gli operatori definiti nella sezione precedente soddisfano queste condizioni e sono rispettivamente di tipo (V, V, V) e di tipo (V, W, W).

Un vettore $w \in W$ viene detto di peso minimale se $L(n)w = 0$ per $n > 0$ e se $L(0)w = \alpha w$ per qualche scalare $\alpha \in \mathbf{C}$. Inoltre il corrispondente operatore $\mathcal{Y}(w, z)$ viene detto campo conforme primario, seguendo la terminologia della fisica.

Dalla identità di Jacobi e dalle definizioni precedenti segue la

PROPOSIZIONE 3.3. *Un vettore* $w \in W$ *è di peso minimale se e solo se per un qualche scalare* $\alpha \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$[L(n), \mathcal{Y}(w,z)] = (z^{n+1}\frac{d}{dz} + \alpha(n+1)z^n)\mathcal{Y}(w,z) \tag{3.8}$$

per $n \in \mathbb{Z}$. *Lo scalare* α *è il peso di* w *e viene anche detto la dimensione conforme dell'operatore* $\mathcal{Y}(w,z)$.

DIM. Consideriamo il membro a sinistra della identità di Jacobi, e osserviamo che il coefficiente di z_0^{-1} in tale espressione, che denoteremo d'ora in poi $\mathcal{R}es_{z_0}$ e chiameremo il residuo in z_0, è il commutatore

$$[Y(v,z_1), \mathcal{Y}(w,z_2)]w'.$$

Sia ora $v = \omega$, lo speciale vettore di V che genera l'algebra di Virasoro. Potremo allora calcolare

$$[Y(\omega,z_1), \mathcal{Y}(w,z_2)]$$

semplicemente calcolando il residuo in z_0 del secondo membro di (3.6) Per far ciò osserviamo che

$$z_2^{-1}\delta(\frac{z_1-z_0}{z_2}) = z_0^{-1}\delta(\frac{z_1-z_2}{z_0}) - z_0^{-1}\delta(\frac{-z_2+z_1}{z_0}) \tag{3.9}$$

Cosicché il secondo membro diventa

$$z_0^{-1}\delta(\frac{z_1-z_2}{z_0})\mathcal{Y}(Y(\omega,z_1-z_2)w,z_2)w' +$$
$$- z_0^{-1}\delta(\frac{-z_2+z_1}{z_0})\mathcal{Y}(Y(\omega,-z_2+z_1)w,z_2)w'$$

e il suo residuo in z_0 è

$$\mathcal{Y}((Y(\omega,z_1-z_2) - Y(\omega,-z_2+z_1))w, z_2). \tag{3.10}$$

Ora se w è di peso minimale

$$\begin{aligned}Y(\omega, z_1 - z_2)w &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)(z_1 - z_2)^{-n-2}w = \\ &= \sum_{n\leq 0} L(n)w(z_1 - z_2)^{-n-2} = L(0)w(z_1 - z_2)^{-2} + \\ &+ L(-1)w(z_1 - z_2)^{-1} + \dots\end{aligned}$$

Alla stessa stregua

$$Y(\omega, -z_2 + z_1)w = L(0)w(-z_2 + z_1)^{-2} + L(-1)w(-z_2 - z_1)^{-1} + \dots .$$

Se vogliamo calcolare $[L(n), \mathcal{Y}(w, z)]$ ora non ci resta che estrarre il coefficiente di z_1^{-n-2} in (3.10), che può essere riscritta come

$$\mathcal{Y}(\sum_{n\leq 0} L(n)w[(z_1 - z_2)^{-n-2} - (-z_2 + z_1)^{-n-2}], z_2) \tag{3.11}$$

Finalmente osserviamo che se $-n-2 \geq 0$ l'espressione in parentesi quadre si annulla per cui

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}(L(0)w[(z_1 - z_2)^{-2} - (-z_2 + z_1)^{-2}], z_2) + \\ &+ \mathcal{Y}(L(-1)w[(z_1 - z_2)^{-1} - (-z_2 + z_1)^{-1}], z_2).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Calcoliamo la prima espressione in parentesi quadre. Ricordiamo che

$$\frac{1}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{d}{dz_2}(\frac{1}{z_1 - z_2}) = z_1^{-2} \sum_{n\geq 0}(n+1)(\frac{z_2}{z_1})^n$$

e analogamente

$$\frac{1}{(-z_2 + z_1)^2} = (-z_2)^{-2} \sum_{n\geq 0}(n+1)(\frac{z_1}{z_2})^n.$$

In conseguenza di ciò avremo

$$
\begin{aligned}
&(z_1 - z_2)^{-2} - (-z_2 + z_1)^{-2} = \\
&\quad = z_1^{-2} \sum_{n \geq 0} (n+1) (\frac{z_2}{z_1})^n - (-z_2)^{-2} \sum_{n \geq 0} (n+1) (\frac{z_1}{z_2})^n = \\
&\quad = \frac{1}{z_1 z_2} \sum_{n \geq 0} (n+1) (\frac{z_2}{z_1})^{n+1} + (-z_2)^{-2} \sum_{n<0} n (\frac{z_1}{z_2})^{-n-1} = \\
&\quad = \frac{1}{z_1 z_2} [\sum_{n \neq 0} n (\frac{z_2}{z_1})^n] = z_2^{-1} \frac{d}{dz_1} (\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\frac{z_2}{z_1})^n) = z_2^{-1} \frac{d}{dz_1} \delta(\frac{z_2}{z_1}).
\end{aligned}
$$

Inoltre, alla stessa maniera si può vedere che

$$(z_1 - z_2)^{-1} - (-z_2 + z_1)^{-1} = z_2^{-1} \delta(\frac{z_2}{z_1}).$$

Quindi

$$z_2^{-1} \frac{d}{dz_1} \delta(\frac{z_2}{z_1}) \mathcal{Y}(L(0)w, z_2) + z_2^{-1} \delta(\frac{z_2}{z_1}) \mathcal{Y}(L(-1)w, z_2).$$

Il coefficiente di z_1^{-n-2} in questa espressione è

$$
\begin{aligned}
&z_2^{n+1} \mathcal{Y}(L(-1)w, z_2) + (n+1) z_2^n \mathcal{Y}(L(0)w, z_2) = \\
&= z_2^{n+1} \frac{d}{dz_2} \mathcal{Y}(w, z_2) + (n+1) z_2^n \alpha \mathcal{Y}(w, z_2),
\end{aligned}
$$

ove α è il peso di w. Il viceversa si dimostra facendo a ritroso questo ragionamento. □

4 – Le equazioni di Knizhnik e Zamolodchikov

Sia $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$, l'algebra di Lie delle matrici complesse 2×2, a traccia nulla, e sia $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbf{C}c$ la sua affinizzazione, ossia l'algebra di Lie di Kac-Moody di tipo $A_1^{(1)}$. È ben noto, [9], che i moduli irriducibili di $\hat{\mathfrak{g}}$ sono parametrizzati dal loro peso massimale λ, sui quali l'elemento centrale c agisce come un intero positivo, detto il livello del modulo. Per ciascun livello $l \in \mathbf{N}$ esiste un numero finito di tali moduli, ed è possibile associare canonicamente ciascuno di questi con un numero razionale del tipo $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq \frac{l}{2}$. Siano $W_0, W_{\frac{1}{2}}, \ldots, W_{[\frac{l}{2}]}$, tali moduli.

Sia $\{H, E, F\}$ la base standard di $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ tale che $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = 0$ e sia $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE$ l'elemento di Casimir.

È utile decomporre $\hat{\mathbf{g}}$:

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{m}_- \oplus \mathbf{g} \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{m}_+ \tag{4.1}$$

ove $\mathbf{m}_\pm = \coprod_{\pm n > 0} \mathbf{g} \otimes t^n$ ed ove identifichiamo $\mathbf{g}$ con la sottoalgebra $\mathbf{g} \otimes 1$ in $\hat{\mathbf{g}}$. Se prendiamo dunque

$$W_j^+ = \{w \in W_j \text{ tale che } \mathbf{m}_+ w = 0\} \tag{4.2}$$

allora W_j^+ è un $\mathbf{g}$-modulo di dimensione $2j + 1$. Poniamo $V = W_0$. È possibile dimostrare, v. [6], che V è una a.o.v. semplice e che gli altri moduli W_j sono tutti e soli i V-moduli irriducibili.

PROPOSIZIONE 4.1. *Denotiamo con $p(u)$ il peso di un vettore $u \in V$. Se $p(u) = 1$ e $v \in W_j^+$ allora*

$$[Y(u, z_1), \mathcal{Y}(w, z_2)] = z_2^{-1}\delta(\frac{z_1}{z_2})\mathcal{Y}(u_0 v, z_2) \tag{4.3}$$

DIM. Dalla relazione $p(u_n v) = p(u) - n - 1 + p(v)$, v. [8], ricaviamo, se $p(u) = 1$ e $p(v) = 0$,

$$p(u_n v) = -n.$$

Allora nel secondo membro di (3.6) per la propietà (2.3) delle a.o.v., avremo

$$Y(u, z_0)v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v z_0^{-n-1} = \sum_{n \leq N} u_n v z_0^{-n-1}$$

ora se $n > 0$, $u_n v = 0$ per definizione di W_j^+ mentre se $n < 0$, usando un analogo di (3.10):

$$\mathcal{Y}(\sum_{n \leq 0} u_n v[(z_1 - z_2)^{-n-1} - (-z_2 + z_1)^{-n-1}], z_2).$$

Dunque se $-n-1 \geq 0$ l'espressione in parentesi quadre è zero ed abbiamo solo il termine per $n = 0$

$$\mathcal{Y}(u_0 v[(z_1 - z_2)^{-1} - (-z_2 + z_1)^{-1}], z_2) = z_2^{-1}\delta(\frac{z_1}{z_2})\mathcal{Y}(u_0 v, z_2)$$

ricordando che l'espressione tra parentesi quadre è la funzione δ e che l'operatore $\mathcal{Y}$ è una funzione lineare della prima variabile. □

OSSERVAZIONE. *Espressa in termini di componenti avremo*

$$[u_n, \mathcal{Y}(v, z_2)] = z_2^n \mathcal{Y}(u_0 v, z_2) \tag{4.4}$$

che è la condizione di gauge di Knizhnik e Zamolodchikov. La Proposizione 3.3, d'altra parte ci mostra come il campo primario $\mathcal{Y}(v, z)$ soddisfi anche l'equazione di moto di K-Z, e quindi soddisfi la definizione di operatore di vertice di [12].

Vogliamo infine definire il prodotto di n serie formali $\mathcal{Y}(v, z)$ e mostrare che esse formalmente soddisfano le equazioni di K-Z.

Data una N-pla $\mathbf{J} = (j_1, \dots, j_N)$ ove $j_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $0 \leq 2j_i \leq l$, si consideri

$$W^+(\mathbf{J}) = W_{j_1}^+ \otimes \dots \otimes W_{j_N}^+ \tag{4.5}$$

e

$$W^+(\mathbf{J})^* = (W_{j_1}^+)^* \otimes \dots \otimes (W_{j_N}^+)^*. \tag{4.6}$$

Questi sono due moduli per l'algebra di Lie $\mathbf{g}$. Denotiamo con

$$\mathcal{Y}_i(z_i) = \mathcal{Y}_i(\cdot, z_i)\cdot : W_{j_i}^+ \otimes W_{j_r}^+ \longrightarrow W_{j_s}^+\{z_i\} \tag{4.7}$$

l'operatore che a ciascun vettore $v \otimes u \in W_{j_i}^+ \otimes W_{j_r}^+$ associa la serie formale $\mathcal{Y}_i(v, z_i)u$ nella variabile z_i a coefficienti in $W_{j_s}^+$.

Una *funzione di N punti di peso* $\mathbf{J}$ si denota

$$\langle \mathcal{Y}_1(z_1) \cdots \mathcal{Y}_N(z_N) \rangle \tag{4.8}$$

ed è definita prendendo

$$(4.9) \qquad \langle 1', \mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle$$

ove $1'$ è il vettore minimale di $(W_0^+)^*$, vista come una serie formale a coefficienti in $W^+(\mathrm{J})^*$ nelle variabili $z_1,\dots,z_N$.

Abbiamo allora il seguente

TEOREMA 4.2. *La funzione di N punti appena definita soddisfa le seguenti equazioni:*

(i) $\forall m = -1,0,1$

$$\sum_{i=1}^{N} z_i^m \left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + (m+1)\Delta_i\right)\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle = 0$$

ove Δ_i è la dimensione conforme di $\mathcal{Y}_i$.

(ii) Se π_i è l'azione di $\mathfrak{g}$ *sull'i-esimo tensorando di $W^+(\mathrm{J})^*$, allora per ogni $x \in \mathfrak{g}$*

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i(x)\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle = 0$$

(iii) Per $i = 1,\dots,N$

$$\left((l+2)\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=1,k\neq i}^{N}\frac{\Omega_{ik}}{z_i - z_k}\right)\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle = 0$$

ove $\Omega_{ik} = \frac{1}{2}\pi_i(H)\pi_k(H) + \pi_i(E)\pi_k(F) + \pi_i(F)\pi_k(E)$.

DIM.

(i). Sia $m = -1,0,1$. Osserviamo che $L(m)1' = 0$ giacché $1'$ è un vettore di peso minimale. Quindi

$$0 = \langle 1'L(m), \mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle = -\langle 1', L(m)\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle =$$
$$\langle 1', \mathcal{Y}_1(z_1)L(m)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle + \langle 1', [L(m),\mathcal{Y}_1(z_1)]\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle =$$
$$\langle 1', \mathcal{Y}_1(z_1)L(m)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle +$$
$$z_1^m\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + (m+1)\Delta_{j_1}\right)\langle 1', \mathcal{Y}_1(z_1)L(m)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)1\rangle.$$

Iterando questo procedimento e ricordando che $L(m)1 = 0$ avremo

$$0 = \sum_{i=1}^{N} z_i^m \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + (m+1)\Delta_{j_i} \right) \langle \mathcal{Y}_1(z_1) \cdots \mathcal{Y}_N(z_N) \rangle .$$

(ii). Un calcolo analogo, ma usando l'azione di $x \in \mathfrak{g}$ ci dà la seconda equazione. Infatti la condizione di gauge, quando $n = 0$ diventa

$$[u_0, \mathcal{Y}(v, z_2)] = \mathcal{Y}(u_0 v, z_2)$$

ossia l'azione di u_0 si trasferisce, per così dire, su v; nel caso della funzione

$$\langle \mathcal{Y}_1(z_1) \cdots \mathcal{Y}_N(z_N) \rangle$$

questo equivale a dire che x agisce su ciascun fattore del prodotto tensoriale con $\pi_i(x)$. Infine ricordando che $x1 = 0$ se $x \in \mathfrak{g}$ avremo la conclusione come nel caso precedente.

(iii). Ricordiamo la formula

$$T(z) = \frac{1}{2(l+2)} \sum_{k=1}^{3} : X^k(z) X_k(z) :$$

ove : : denota l'ordinamento normale, v.[12]. Scrivendo

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(m) z^{-m-2} \tag{4.10}$$

si può verificare che le componenti $L(m)$ generano una algebra di Virasoro. Estraendo il coefficiente di z^{-m-2} in (4.10) avremo

$$L(m) = \frac{1}{2(2+l)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{1}{2} : H(-k)H(m+k) : +$$

$$+ : E(-k)F(m+k) : + : F(-k)E(-1+k) :]$$

Ricordando che $u_i \in W^+$ e che quindi $L(m)u_i = 0$ se $m > 0$ otteniamo

$$L(-1)u_i = \frac{1}{2(2+l)} [H(-1)H(0) + 2E(-1)F(0) + 2F(-1)E(0)] u_i$$

Ponendo ora $X^1 = 2X_1 = H, X^2 = X_3 = E, X^3 = X_2 = F$ possiamo scrivere

$$L(-1)u_i = \frac{1}{2+l}\sum_{k=1}^{3} X^k(-1)X_k(0)u_i$$

Quindi

$$(l+2)\frac{\partial}{\partial z_i}\mathcal{Y}_i(u_i, z_i) = (l+2)\mathcal{Y}_i(L(-1)u_i, z_i) = \sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(-1)X_k(0)u_i, z_i).$$

Adesso osserviamo che $X_k u_i \in W^+$ per cui

$$X^k(z-z_i)X_k u_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X^k(n)(z-z_i)^{-n-1}X_k u_i =$$
$$= X^k(0)X_k u_i(z-z_i)^{-1} + X^k(-1)X_k u_i + X^k(-2)X_k u_i(z-z_i) + \ldots$$

e dunque

$$\sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(z-z_i)X_k u_i, z_i) = \sum_{k=1}^{3}[\mathcal{Y}_i(X^k(0)X_k u_i(z-z_i)^{-1}, z_i)+$$
$$+\mathcal{Y}_i(X^k(-1)X_k u_i, z_i) + \mathcal{Y}_i(X^k(-2)X_k u_i(z-z_i), z_i) + \ldots$$

In fin dei conti

$$\sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(z-z_i)X_k u_i, z_i) - \frac{1}{z-z_i}\mathcal{Y}_i(\Omega u_i, z_i) =$$
$$= \sum_{k=1}^{3}[\mathcal{Y}_i(X^k(-1)X_k u_i, z_i) + \mathcal{Y}_i(X^k(-2)X_k u_i(z-z_i), z_i) + \ldots$$

Potremo infine porre $z = z_i$ in tale espressione, e denoteremo tale procedura col segno di limite, perché tale sostituzione ha chiaramente senso nel secondo membro. Avremo dunque

$$\tag{4.11} \begin{aligned} &\lim_{z\to z_i}\Big(\sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(z-z_i)X_k u_i, z_i) - \frac{1}{z-z_i}\mathcal{Y}_i(\Omega u_i, z_i)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(-1)X_k u_i, z_i). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che prendendo il residuo in z_1 dei due membri di (3.6) otteniamo

$$\begin{aligned} X^k(z)\mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_i) &= \mathcal{Y}_i(X^k(z-z_i)X_k u_i, z_i)+ \\ &+\mathcal{R}es_{\,z_1}\frac{1}{z-z_i}\delta\Big(\frac{z_i-z_1}{-z+z_i}\Big)\mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_i)X^k(z_1) \end{aligned} \tag{4.12}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle 1', X^k(z)\mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_i)1\rangle &= \langle 1', \mathcal{Y}_i(X^k(z-z_i)X_k u_i, z_i)1\rangle+ \\ &+\mathcal{R}es_{\,z_1}\frac{1}{z-z_i}\delta\Big(\frac{z_i-z_1}{-z+z_i}\Big)\langle 1', \mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_i)X^k(z_1)1\rangle \end{aligned}$$

giacché $X^k(z_1)1 = X^k(-1)1 + X^k(-2)1z_1 + X^k(-3)1z_i^2 + \ldots$ contiene solo potenze non negative di z_1, e analogamente $\delta(\frac{z_i-z_1}{-z+z_i})$, per via della nostra convenzione. Ne segue che $\mathcal{R}es_{z_1}$ dell'ultimo addendo in (4.12) è zero. Potremo dunque concludere che

$$\begin{aligned} (l+2)\frac{\partial}{\partial z_i}\mathcal{Y}_i(u_i, z_i) &= \sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(-1)X_k(0)u_i, z_i) = \\ &= \lim_{z\to z_i}\left(\sum_{k=1}^{3}\mathcal{Y}_i(X^k(z-z_i)X_k u_i, z_i) - \frac{1}{z-z_i}\mathcal{Y}_i(\Omega u_i, z_i)\right). \end{aligned}$$

Dunque, usando il Teorema 3.2,

$$\begin{aligned} &(l+2)\frac{\partial}{\partial z_i}\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle = \\ &= \lim_{z\to z_i}\Big(\sum_{k=1}^{3}\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots X^k(z)\mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle+ \\ &-\frac{1}{z-z_i}\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_i(\Omega u_i, z_i)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle\Big). \end{aligned}$$

Prendendo il residuo in z_0 in (3.6) possiamo ora mostrare che

$$\begin{aligned} &\langle\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots X^k(z)\mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle = \\ &\qquad = \langle X^k(z)\mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle \end{aligned}$$

con un ragionamento analogo a quanto sopra.

D'altra parte se decomponiamo $X(z) = X(z)^+ + X(z)^-$ ove sia

$$X(z)^+ = \sum_{n \geq 0} X(n) z^{-n-1}$$

$$X(z)^- = \sum_{n<0} X(n) z^{-n-1},$$

avremo

$$\begin{aligned}
&\langle X^k(z)^+ \mathcal{Y}_1(u_1, z_1) \cdots \mathcal{Y}_N(u_N, z_N) \rangle = \\
&= \langle [X^k(z)^+, \mathcal{Y}_1(u_1, z_1)] \cdots \mathcal{Y}_N(u_N, z_N) \rangle + \\
&+ \ldots + \langle \mathcal{Y}_1(u_1, z_1) \cdots [X^k(z)^+, \mathcal{Y}_N(u_N, z_N)] \rangle.
\end{aligned}$$

Ricordando ora (4.3) avremo

$$\begin{aligned}
[X(z)^+, \mathcal{Y}_i(u_i, z_i)] &= z_i^{-1} \frac{\frac{z_i}{z}}{1 - \frac{z_i}{z}} \mathcal{Y}_i(X(0)u_i, z_i) = \\
&= \frac{1}{z - z_i} \mathcal{Y}_i(X(0)u_i, z_i).
\end{aligned}$$

Osservando infine che $X(z)^+ 1 = 0$ e che $\langle 1', X(z)^{-1} \rangle = 0$ potremo scrivere

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3} \langle X^k(z) \mathcal{Y}_1(u_1, z_1) \cdots \mathcal{Y}_i(X_k u_i, z_i) \cdots \mathcal{Y}_N(u_N, z_N) \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{z_j - z} \pi_j(X^k) \pi_i(X_k) \langle \mathcal{Y}_1(z_1) \cdots \mathcal{Y}_N(z_N) \rangle (u_1, \ldots, u_N) = \\
&= \left(\frac{1}{z_i - z} \Omega_i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_j - z} \Omega_{ij} \right) \langle \mathcal{Y}_1(z_1) \cdots \mathcal{Y}_N(z_N) \rangle (u_1, \ldots, u_N).
\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$
\begin{aligned}
&(l+2)\frac{\partial}{\partial z_i}\langle \mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle = \\
&= \lim_{z\to z_i}[(\frac{1}{z-z_i}\Omega_i + \sum_{j\neq i}\frac{1}{z_j-z}\Omega_{ij})\langle \mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle + \\
&- \frac{1}{z-z_i}\Omega_i + \langle \mathcal{Y}_1(z_1)\cdots\mathcal{Y}_N(z_N)\rangle)]
\end{aligned}
$$

fornisce la conclusione. □

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Belavin - A.N. Polyakov - A.B. Zamolodchikov: *Infinite conformal symmetries in two dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B241 (1984), 333-380.

[2] R.E. Borcherds: *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 83 (1986), 3068-3071.

[3] S. Capparelli: *On vertex operator algebras*, Boll. UMI 7 5-B (1991), 787-800.

[4] S. Capparelli: *Vertex operator relations for affine algebras and combinatorial identities*, Ph.D. Thesis, Rutgers Univ. (1988).

[5] C.Y. Dong - J. Lepowsky: *A Jacobi identity for relative vertex operators and the equivalence of Z-algebras and parafermion algebras*, in: XVII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Ste-Adèle, June 1988, Proceedings, ed. by Y. Saint-Aubin, World Scientific, Singapore, 1989, 235-238.

[6] I.B. Frenkel: *Yale Lecture notes*, (1988).

[7] I.B. Frenkel - Y.Z. Huang - J. Lepowsky: *On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules*, to appear.

[8] I.B. Frenkel - J. Lepowsky - A. Meurman: *Vertex operator algebras and the Monster*, New York, Academic Press (1988).

[9] V.G. Kac: *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, (1985).

[10] V.G. Knizhnik - A.B. Zamolodchikov: *Current algebras and Wess-Zumino models in two dimensions*, Nuclear Physics, B247 (1984), 83-103.

[11] J. Lepowsky: *Lectures on Kac-Moody Lie algebras*, Technical report, Université Paris VI, Spring 1978.

[12] A. TSUCHIYA - Y. KANIE: *Vertex operators in conformal field theory on* $\mathbf{P}^1$ *and monodromy representations of braid group*, in: Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models, Advanced Studies in Pure Math. 16 (1988).

[13] H. TSUKADA: *String path integral realization of vertex operator algebras*, Ph.D. Thesis, Rutgers Univ., (1988).

[14] A.B. ZAMOLODCHIKOV - V.A. FATEEV: *Nonlocal (parafermion) currents in two-dimensional conformal quantum field theory and self-dual critical points in* $\mathbf{Z}_n$*-symmetric statistical systems*, Sov. Phys., JETP, 62(2), 215-225, (1985).

Lavoro pervenuto alla redazione il 17 dicembre 1990
ed accettato per la pubblicazione il 5 marzo 1992
su parere favorevole di C. Procesi e di F. Magri

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Stefano Capparelli - Department of Mathematics - Yale University - New Haven, CT 06520 USA.