Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 649-674

# Sugli archi completi dei piani PG(2,q), q dispari, contenenti (q+3)/2 punti di una conica

G. PELLEGRINO

RIASSUNTO – *Nei piani $PG(2,q)$, $q$ dispari, sono determinati i possibili ordini dei $k$-archi completi contenenti $(q+3)/2$ punti di una conica e distinti da un'ovale.*

ABSTRACT – *In $PG(2,q)$, $q$ odd, the orders of the complete $k$-arcs, containing $(q+3)/2$ points of a conic and different from an oval, are determined.*

KEY WORDS – *Arcs - Complete $k$-arcs.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 05B25 - 51E15

## 1 – Introduzione

Sia $PG(2,q)$ un piano di Galois, cioè un piano proiettivo finito costruito sul campo $GF(q)$ di Galois, il cui ordine $q$ - qui e nel seguito - sarà supposto *dispari* e quindi del tipo $q = 4t \pm 1$.

Un *$k$-arco, o arco di ordine $k$*, è un insieme, $H$, di $k$ punti del piano a tre a tre non allineati.

Una retta l del piano dicesi *secante (o corda), tangente, esterna* a un arco $H$ secondo che $|H \cap \mathrm{l}| = 2, 1, 0$.

Un $k$-arco dicesi *completo* se non è sottoinsieme proprio di un $(k+1)$-arco; o anche, in termini equivalenti, se ogni punto del piano appartiene a una corda (almeno) dell'arco. In caso contrario l'arco è *incompleto*.

Sia $H$ un arco incompleto. Un punto $P$ del piano sarà detto *libero rispetto ad* $H$ (brevemente $H$-libero, o semplicemente libero, quando non sussistano equivoci) se non giace su nessuna corda di $H$. Ovviamente un punto $P$, libero, è aggregabile ai punti di $H$; in tal modo $H \cup \{P\}$ è un $(k+1)$-arco. Un punto $P$, che non sia libero, sarà detto *vincolato*.

Uno dei problemi centrali della teoria dei $k$-archi è il seguente:

*Fissato l'intero $k$, stabilire se in $PG(2,q)$ esiste qualche arco completo di ordine $k$.*

I primi risultati sull'argomento (Bose, Qvist, Segre) caratterizzano gli archi di ordine massimo di $PG(2,q)$ e si possono riassumere nelle proposizioni seguenti:

j) *Per ogni $k$-arco di $PG(2,q)$, $q$ dispari, è $k \leq q+1$;*

jj) *In $PG(2,q)$, $q$ dispari, ogni $(q+1)$-arco - detto anche ovale - è una conica irriducibile, e viceversa.*

Piuttosto recentemente, vari Autori hanno ottenuto significativi risultati relativi a $k$-archi completi diversi dalle ovali. Ad esempio per $q = 4t+1$ sono stati indicati procedimenti che portano alla costruzione di classi di archi completi di ordine $(q+7)/2$, $(q+5)/2$, $(q+3)/2$ (cf. [5], [7], [8]); anche per $q = 4t-1$ si conoscono procedimenti per la costruzione di archi completi di ordine $(q+5)/2$, $(q+3)/2$. A tali archi si perviene partendo da opportuni $s$-insiemi di punti presi sopra una conica; in ogni caso è $s \leq (q+3)/2$, in conseguenza della nota (cf. ad es. [1]) proposizione

jjj) *$(q+5)/2$ punti, comunque presi sopra una conica $\Gamma$, determinano un arco rispetto al quale sono vincolati tutti i punti del piano non situati sulla conica.*

Nella presente nota sono determinati i possibili ordini degli archi completi, diversi dalle ovali, contenenti $(q+3)/2$ punti presi sopra una conica irriducibile. A tale scopo sarà dimostrato il

TEOREMA 1. *Sia $\Gamma$ una conica irriducibile del piano $PG(2,q)$, $q$ dispari, e denoti $H$ l'arco (incompleto) formato da $(q+3)/2$ punti presi* *su* $\Gamma$. *L'ordine* $k$ *di un arco completo,* $K$*, diverso da* $\Gamma$ *e contenente* $H$*, può assumere i seguenti valori*

$$k = (q+5)/2 \quad ; \quad k = (q+7)/2\,,$$

*ai quali vanno aggiunti*

i) $k = (q+11)/2$, *se* $q = 13$;

*e - per particolari scelte dei punti di* $H$ *su* $\Gamma$ *-*

ii) $k = (q+9)/2$, *quando* $q = 4t-1$, *con* $t$ *dispari.*

*Esistono effettivamente archi completi degli ordini indicati.*

Nel caso ii), i valori di $q$, per cui in $PG(2,q)$ esistono archi completi di ordine $(q+9)/2$, non sono classificati; tuttavia le considerazioni che portano alla dimostrazione del teorema forniscono un procedimento euristico atto a stabilire, per ogni $q$, l'esistenza di tali archi.

La dimostrazione del teorema, tutt'altro che immediata, poggia sulle considerazioni e i risultati esposti in [10] e [11]. Questi lavori costituiscono una premessa alla presente nota. Poiché ad essi sarà fatto frequente riferimento, si ritiene opportuno richiamarne le conclusioni, conservandone le notazioni.

## 2 – Nota sugli archi formati da $h+1$ punti di una conica

Una conica irriducibile $\Gamma$ di $PG(2,q)$ ($q$ dispari) consta di $q+1$ punti. Conviene porre

$$q+1 = 2h \qquad (q = p^s, \text{ con } p \text{ primo dispari}) \tag{2.1}$$

e richiamare (cf. [1], [15]) la nota proposizione:

2.1. *Sia* $P$ *un punto del piano, non situato su* $\Gamma$. *Se* $P$ *è interno a* $\Gamma$*, fra le* $2h$ *rette passanti per* $P$*,* $h$ *sono corde di* $\Gamma$ *e* $h$ *sono esterne. Se invece* $P$ *è esterno a* $\Gamma$*, si hanno due tangenti,* $h-1$ *secanti e* $h-1$ *rette esterne.*

I punti di contatto delle tangenti a $\Gamma$, condotte da un punto esterno $P$, saranno denotati con $T_P$, $T'_P$.

Denoteremo costantemente con $H$ l'arco formato da $h+1$ punti presi su $\Gamma$. Tale arco è ovviamente incompleto, essendo $H$-liberi almeno gli $h-1$ punti dell'arco complementare $H' = H - \Gamma$.

Per brevità diremo *rossi* i punti di $H$ e *verdi* quelli di $H'$.

Denoti $\mathbf{L}$ l'insieme dei punti $H$-liberi, non situati su $\Gamma$; a seconda della scelta dei punti rossi su $\Gamma$ (punti di $H$), possono presentarsi i seguenti casi a), b), c), che passiamo a esaminare.

a) $\mathbf{L}$ è vuoto (cf. [7]). In tal caso è $K = \Gamma$.

Supposto $\mathbf{L}$ non vuoto, da 2.1 segue facilmente

2.2. *Ogni punto di* $\mathbf{L}$ *è esterno a* $\Gamma$.

2.3. *Sia* $L \in \mathbf{L}$*; i punti* $T_L, T'_L$ *sono rossi. Ogni secante di* $\Gamma$*, uscente da* $L$*, è mista (cioè contiene un punto rosso e uno verde).*

b) In $\mathbf{L}$ esiste un punto $L$ tale che ogni altro punto di $\mathbf{L}$ risulta vincolato rispetto all'arco $K = H \cup \{L\}$.
In questo caso da 2.3 e dalla proposizione 1, jjj) segue che l'arco $K$ è completo, di ordine $k = (q+5)/2$.

Se si escludono i casi a), b) di sopra, sull'insieme $\mathbf{L}$ si può fare soltanto l'ulteriore ipotesi, che supporremo sempre verificata:

c) $|\mathbf{L}| \geq 2$; inoltre esistono in $\mathbf{L}$ almeno due punti $A, B$ aggregabili a $\Gamma$ in modo indipendente, nel senso che $B$ è libero rispetto all'arco $H \cup \{A\}$ e $A$ è libero rispetto a $H \cup \{B\}$.

Sotto l'ipotesi c), da 2.3 segue

2.4. *Se i punti* $A$*,* $B$*, esterni a* $\Gamma$*, sono* $H$*-liberi, la retta* $\mathbf{l} = AB$ *è esterna a* $\Gamma$*.*

Dalle considerazioni fin qui svolte si deduce che la dimostrazione del teorema 1, enunciato nella introduzione, risulta conseguenza della risoluzione del seguente

PROBLEMA 2.5. *Determinare, sotto l'ipotesi c), gli archi completi,* $K$ $(K \neq \Gamma)$, *che contengono l'arco* $H \cup \{A, B\}$.

La discussione del problema 2.5 sarà svolta nei nn. 4 e successivi. Nel n. 3 saranno premesse alcune considerazioni di carattere generale che richiamano argomenti e conclusioni (e anche notazioni) dei citati lavori [10] e [11].

## 3 – Richiami, considerazioni preliminari

A) Le coordinate orbitali e loro proprietà.

Fissato nel piano un riferimento proiettivo omogeneo, sia

$$[x, y, z] = \delta[u^2, uw, w^2] \tag{3.1}$$

($\delta = (\delta_{ij})$ matrice non singolare di ordine 3 su $F = GF(q)$; $u, w \in F$) una rappresentazione parametrica della $\Gamma$ e sia $Q$ il punto variabile su questa, sicché $Q = Q(x, y, z) = (u, w)$. Se dalla (3.1) si passa alla rappresentazione non omogenea - scriveremo allora $x, y$ in luogo di $x/z, y/z$; $\xi$ in luogo di $u/w$ - si ha

$$Q = (x, y) = \xi \qquad (x, y, \xi \in F' = F \cup \{\infty\}) \tag{3.2}$$

Sia ora $P$ il punto variabile sulla retta $\mathbf{l}$ - che supponiamo esterna a $\Gamma$ e denoti $\sigma_P$ l'involuzione su $\Gamma$ di polo $P$. Quando $P$ descrive $\mathbf{l}, \sigma_P$ genera un gruppo $\mathbf{G}_\mathbf{l}$ che è diedrale, di ordine $2(q+1)$ (cf. [5], [11]); il sottogruppo ciclico, di ordine $q+1$, di $\mathbf{G}_\mathbf{l}$ è noto come il gruppo delle collineazioni assiali si $\Gamma$, di asse $\mathbf{l}$. Denoteremo con $G_\mathbf{l}$ tale sottogruppo e con $\omega$ una sua operazione generatrice.
Si fissi un punto di $\Gamma$, ad es. $Q = \xi_0 = \infty$; se si opera su questo con le operazioni di $G_\mathbf{l}$, si ottiene l'orbita

$$\Omega_\mathbf{l} = \{\xi_i : \xi_i = (\infty)\omega^i\} \qquad (i = 0, 1, \dots, q), \tag{3.3}$$

la quale stabilisce, tramite la (3.2), una corrispondenza biunivoca fra i punti $Q = \xi_i$ di $\Gamma$ e gli elementi i dell'anello

$$M = Z_{/m} = \{0, 1, \ldots, q\} \tag{3.4}$$

dei resti modulo $m = q + 1$.

Useremo pertanto i simboli (talora identificandoli)

$$Q, \quad (x, y), \quad \xi, \quad \xi_i, \quad \mathrm{i}, \quad Q_i \tag{3.5}$$

per designare il punto variabile su $\Gamma$. La (3.5) mostra come gli elementi di $M$ si possano riguardare come coordinate - che saranno dette **orbitali**, relative alla l e a $\Gamma$ - dei punti di $\Gamma$.

Anche i punti di l possono essere coordinati mediante $M$. Infatti sia $t_0$ la tangente a $\Gamma$ nel punto $Q_0 = \xi_0 = \infty$; basterà porre $P_0 = t_0 \cdot \mathrm{l}$, e successivamente,

$$P_i = \mathrm{l} \cdot Q_0 Q_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, q). \tag{3.6}$$

Per quanto riguarda il procedimento che porta ad assegnare le coordinate orbitali ai punti di $\Gamma$ e di l, si rinvia a [11]. Qui si richiamano soltanto le proprietà di cui sarà fatto uso nel seguito.

$p_1$ - Secondo che $\mathbf{n}$ è pari o dispari, il punto $P_n$ di l è esterno, ovvero interno a $\Gamma$;

$p_2$ - Le tangenti a $\Gamma$, condotte dal punto $P_{2r}$ di l, toccano la conica nei punti $Q_r$, $Q_{r+h}$;

$p_3$ - Punti di $\Gamma$, formanti coppie del tipo $(Q_r, Q_{r+h})$, sono allineati con il polo $O$ di l (coppie di punti diametralmente opposti rispetto a $O$);

$p_4$ - Punti di l, formanti coppie del tipo $(P_r, P_{r+h})$, sono coniugati rispetto a $\Gamma$ (brevemente $\Gamma$-coniugati);

$p_5$ - Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{2r}$, risulta $(P_u, P_v, P_r, P_{r+h}) = -1$;

$p_6$ - Due punti $Q_r$, $Q_s$ di $\Gamma$ sono allineati con il punto $P_n$ di l se e solo se, modulo $q + 1$, risulta $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}$.

Dalle considerazioni di sopra segue:

3.1. *Siano $A$, $B$ due punti di* l, *esterni a $\Gamma$; allora è $A = P_n$, $B = P_{n'}$, dove $n$, $n'$ sono elementi pari di $M$.*

L'arco

$$H = \left(\xi_{i_0}, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_h}\right) \tag{3.7}$$

sia formato da $h+1$ punti presi su $\Gamma$ (ovvero da $\Omega_\mathrm{l}$), sicché

$$V = \left(\mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1, \dots, \mathrm{i}_h\right) \tag{3.8}$$

è l'insieme delle coordinate orbitali dei punti (rossi) di $H$. Se, come dall'ipotesi, i punti $A$ e $B$ sono $H$-liberi, i punti (3.7) devono essere scelti (cf. $p_6$) in modo che l'insieme $V$ (3.8) sia una $(n, n')$-partizione di $M$, intendendosi con ciò che la somma di due qualunque elementi distinti di $V$ è diversa da $n$ e da $n'$.

Nel sottostante paragrafo B) è riassunto il procedimento (cf. [10]) che porta alla costruzione di un tale insieme $V$.

B) Sulle $(n, n')$-partizioni di $M$.

Si ponga

$$m = q + 1 = 2h = \tau\delta\,; \quad n - n' = d = \eta\delta\,, \quad \text{essendo} \quad (m, d) = \delta\,; \tag{3.9}$$

con ciò, per $p_1$, $d$ è pari, $\delta = (m, d) = 2\delta'$; $(\eta, \tau) = 1$.

Se $h$ è pari, supporremo anche soddisfatte le seguenti condizioni che, nel caso in esame, sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di una $(n, n')$-partizione di $M$:

$$h \neq n - n' = d = 4s\,; \quad m \neq 2^r\,; \quad \tau = 2s + 1\,. \tag{3.10}$$

Se $h$ è dispari, anche $\tau$ è dispari e non si hanno condizioni aggiuntive. Così si ha, in ogni caso

3.2. *$\tau$ è dispari ed $n - n' \neq h$ (cioè $A$ e $B$ non sono $\Gamma$-coniugati).*

Sia ora $\nu$ il resto della divisione di $n'$ per $\delta$; sicché $n' = \nu + id$, $n = \nu + (i+1)d$ e gli elementi di $M$ si ripartiscono nelle $\delta = 2\delta'$ classi

$$(3.11) \qquad C_j = \{j + id\} \qquad (j \in Z_\delta\,; i \in Z_\tau)\,.$$

Siano poi $n_1$ ed $n_2 = n_1 + h$ i due elementi metà di $n$ ($2n_1 = 2n_2 = n$) e, $n'_1$, $n'_2$ le due metà di $n'$. Posto $\nu = 2\mu$ ($0 \le \mu \le \delta' - 1$), fra le classi (3.11) la $C_\mu$ contiene una delle metà di $n$ e una di $n'$ (poniamo $n_1$ ed $n'_1$), mentre la $C_{\mu+\delta'}$ contiene $n_2$ ed $n'_2$.

Le classi $C_\mu$, $C_{\mu+\delta'}$ (come pure i loro elementi) saranno chiamate *principali*; le rimanenti classi (3.11) *secondarie*. Queste ultime, in numero di $\delta - 2 = 2(\delta' - 1)$, si distribuiscono in $\delta' - 1$ coppie - che diremo $\nu$-complementari -

$$(3.12) \qquad \left(C_r, C_{\nu-r}\right) \qquad (r \neq \mu, \mu + \delta'\,; r = 1, 2, \dots, \delta' - 1)\,.$$

Diremo infine $\nu$-selezione delle classi secondarie, ogni $(\delta' - 1)$-insieme di tali classi contenente, per ogni $r$, una sola classe di ciascuna delle coppie (3.12).

Ciò premesso, l'insieme $V$ (delle coordinate orbitali dei punti rossi di $H$) è formato dai seguenti elementi

$$(3.13) \qquad \mathbf{n_1},\ \mathbf{n_1 + d},\ \mathbf{n_1 + 2d}, \dots, \mathbf{n_1} + (\tau - \mathbf{1})\mathbf{d}/\mathbf{2} = \mathbf{n'_1}$$

$$(3.13') \qquad \mathbf{n_2},\ \mathbf{n_2 + d},\ \mathbf{n_1 + 2d}, \dots, \mathbf{n_2} + (\tau - \mathbf{1})\mathbf{d}/\mathbf{2} = \mathbf{n'_2}$$

presi dalle classi principali, nonché dagli elementi di una qualunque $\nu$-selezione delle classi (3.12).

Così $H$ consta di $(\tau + 1) + \tau(\delta' - 1) = h + 1$ punti rossi, $(\tau + 1)$ dei quali sono principali, mentre gli altri sono distribuiti in $(\delta' - 1)$ classi, due delle quali mai sono $\nu$-complementari.

Ebbene, costruito l'arco $H$ nel modo anzidetto, per le proprietà p) di sopra e per le conclusioni del n. 8 di [10], si ha

3.3. *Sulla retta* l, *$A$, $B$ sono i soli punti $H$-liberi.*

Inoltre, per il modo come $H$ è costruito, si ha anche

3.4. *I punti $T_A$, $T'_A$, avendo coordinate orbitali* $\mathbf{n}_1$ *ed* $\mathbf{n}_2$, *sono rossi e principali. Ciascuna delle h-1 secanti di* $\Gamma$, *uscenti da* $A$, *contiene una coppia di punti di colore opposto. I punti di ciascuna coppia sono o entrambi principali (appartenendo alle classi* $C_\mu$, $C_{\mu+\delta'}$*), oppure entrambi secondari (e appartengono a classi* $\nu$*-complementari). Analoghe conclusioni valgono per le rette uscenti da* $B$.

Con riferimento alla (3.10) è opportuno infine notare

3.5. *I piani* $PG(2,q)$, *con* $q = 2^r - 1$ *- in corrispondenza dei quali non sono possibili* $(n, n')$*-partizioni - rientrano, ai fini della costruzione degli archi completi* $K$, *nei casi* a), b) *sopra considerati.*

Denoteremo costantemente con $O$ il polo - interno a $\Gamma$ (cf. 2.4) - della retta l. Su questa consideriamo i punti $C' = P_z$ e $C'' = P_{z+h}$, dove

$$\mathbf{z} = (\mathbf{n} + \mathbf{n}')/2 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}'_1\,; \qquad 2\mu = 2(\mu + \delta') = \nu\,; \tag{3.14}$$

per le proprietà p), $C'$ e $C''$ sono $\Gamma$-coniugati e tali che

$$(A, B, C', C'') = -1\,. \tag{3.15}$$

Inoltre, dall'esame del triangolo $OC'C''$, uno almeno dei punti $C', C''$ è esterno a $\Gamma$. Denoteremo costantemente con $C'$ tale punto. Da 2.2 segue:

3.6. *I punti* $C'$ *e* $C''$ *sono* $H$*-vincolati.*

## 4 – Condizioni affinché un altro punto, $C$, sia $H$-libero

Supponiamo che, oltre ad $A$ e $B$, esista un altro punto $H$-libero, $C$, non situato su $\Gamma$. Determineremo le condizioni cui $C$ deve soddisfare. Da 2.2 e 2.4 si ha intanto

4.1. *$C$ è esterno a* $\Gamma$ *e le rette* $\mathrm{l}_1 = AC$, $\mathrm{l}_2 = BC$ *sono esterne a* $\Gamma$;

mentre, per 3.3 e 3.2,

4.2. *$C$ non giace sul* l *e non è $\Gamma$-coniugato né di $A$, né di $B$.*

Ciò premesso, con riferimento alla (3.15), diciamo $\gamma'$ l'omologia armonica di centro $C'$ e asse la retta $c' = OC''$, polare di $C'$ rispetto a $\Gamma$ (analogamente si ha l'omologia armonica, $\gamma''$, di centro $C''$ e asse $c'' = OC'$); si rileva allora:
Ciascuna delle $\gamma'$, $\gamma''$ scambia $A$ con $B$ e muta $\Gamma$ in sé portando la coppia $(T_A, T'_A)$ nella coppia $(T_B, T'_B)$ e le secanti (miste) di $\Gamma$ uscenti da $A$ in quelle (miste) passanti per $B$. In altri termini, il fatto che $A$ e $B$ sono $H$-liberi, implica anche $H = (H)\gamma' = (H)\gamma''$.

Pertanto

4.3. *L'ipotesi che i punti $A$, $B$ sono $H$-liberi implica l'esistenza di una collineazione del piano che scambia tali due punti, mutando in sé sia $\Gamma$ che $H$.*

Sia allora $A'$, $A''$ la coppia di punti fra loro coniugati e tali che $(B, C, A', A'') = -1$; sia poi $\alpha'[\alpha'']$ l'omologia armonica di centro $A'$ $[A'']$ e asse la polare $a'[a'']$ di $A'$ $[A'']$ rispetto a $\Gamma$. Poiché per ipotesi $C$ è $H$-libero, da 4.3 segue $H = (H)\alpha' = (H)\alpha''$. Analogamente, con evidente significato dei simboli, se $B'$, $B''$ è la coppia di punti fra loro coniugati e tali che $(C, A, B', B'') = -1$, risulta $H = H(\beta') = (H)\beta''$.

Da quanto osservato segue:

4.4. *Se, oltre ad $A$ e $B$, esiste un punto $H$-libero, $C$, esiste almeno una collineazione, $\varepsilon$, del piano che muta in sé sia $\Gamma$ sia $H$ e permuta circolarmente i punti $A$, $B$, $C$.*

Tale è (ad es. ) la $\varepsilon = \gamma'\beta'\alpha'$.

Si possono allora applicare le conclusioni del n. 9.6 di [11], per cui:

4.5. *La collineazione $\varepsilon$ esiste se e solo se la retta $a'$ passa per $A$ (e la retta $b'$ passa per $B$).*

In tal caso [11] si hanno le seguenti terne di punti allineati

$$(A'B'C''), \quad (A''B''C''), \quad (A''B'C'), \quad (A'B''C')$$

e le rette $a' = AA''$, $b' = BB''$ si corrispondono nella $\gamma''$. Da ciò segue

4.6. *Un punto $C$, che insieme con $A$ e $B$ sia $H$-libero, appartiene alla retta $OC'$.*

## 5 – Discussione del problema 2.5

Non si alterano le generalità se si assume per $\Gamma$ la rappresentazione parametrica

$$x = -\alpha u^2 + w^2\,, \quad y = 2uw\,, \quad z = \alpha u^2 + w^2\,, \tag{5.1}$$

ovvero in forma implicita

$$\Gamma\colon x^2 + \alpha y^2 - z^2 = 0\,. \tag{5.2}$$

Scriveremo $x = [\ ]$, $x = \Delta$ per indicare che l'elemento $x$ del campo è, rispettivamente, un quadrato, un non quadrato. Dopo di che nella (5.2) porremo $\alpha = [\ ]$ se $q = 4t - 1$, $\alpha = \Delta$ se $q = 4t + 1$. Con tali posizioni la retta $z = 0$ è in ogni caso esterna a $\Gamma$ e sarà assunta come equazione della retta l. Ciò consente di far talora riferimento al piano affine $AG(2,q)$, ottenuto da $PG(2,q)$ sopprimendo la retta $z = 0$ e tutti i suoi punti e di adottarne la terminologia. In tal modo diventano più immediate e intuitive certe conclusioni, facilmente traducibili, del resto, in termini proiettivi.

Sulla retta $\mathrm{l} = AB$ ($z = 0$) - per (5.1), (5.2) e con riferimento alle argomentazioni di [11] - viene a essere fissato il punto $O_2 = Y = (0,1,0)$. Con ciò, nella equazione dell'operazione generatrice del gruppo $G_1$ (cf. la (7.4) di [11])

$$v = (\xi_1 u + \beta)/(u + \xi_1)\,, \tag{5.3}$$

risulta[1]

$$\beta = -\alpha^{-1}. \tag{5.4}$$

Costruiamo le operazioni $\omega_P$ del gruppo $G_1$ (al variare di $P$ su l) mediante la

$$\omega_P = \sigma_P \sigma_Y \tag{5.5}$$

(essendo $\sigma_P$ e $\sigma_Y$ le involuzioni su $\Gamma$ di polo $P, Y$); in tal modo l'orbita $\Omega_1$ del gruppo $G_1$ è data dalla (7.10) di [11], avendosi per il punto $P_n$ di l, $P_n = k_n = \xi_n$. Valgono allora le formule e le conclusioni del n. 7 di [11].

Assumiamo

$$A = P_n = P_{2r}, \qquad B = P_{n'} = P_{-2r} \qquad (4r \neq h) \tag{5.6}$$

quindi

$$\mathbf{z} = (\mathbf{n} + \mathbf{n}')/2 = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{z} + \mathbf{h} = \mathbf{h}; \tag{5.7}$$

e - eventualmente scambiando $x$ con $y$, nel caso $q = 4t - 1$ -

$$\begin{aligned} &P_z = P_0 = C' = Y = (0,1,0); \qquad P_{z+h} = P_h = C'' = X = (1,0,0); \\ &O = (0,0,1). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Con tali posizioni, si avrà (cf. [11], nn. 7.9)

$$A = (1, \xi_n, 0) = (1, \theta, 0); \qquad B = (1, -\xi_n, 0) = (1, -\theta, 0). \tag{5.9}$$

---

(1) In effetti, riprendendo considerazioni e notazioni di [11], segnatamente del n.7, rispetto ai punti $O_2(0,1,0)$, $O_1(1,0,1)$, $O_3(-1,0,1)$ si ha la (5.1), dove

$$\delta = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\alpha \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ -2 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}, \qquad \delta^* = -4\alpha$$

$\Delta_1 = 2x - 2z$; $\Delta_2 = -2\alpha y$; $\Delta_3 = -2\alpha x - 2\alpha z$. L'equazione della retta congiungente i punti $P' = O_2$ e $P'' = \beta O_1 + O_3$ è l: $\Delta_1 - \beta\Delta_3 = x(1 + \alpha\beta) + z(-1 + \alpha\beta) = 0$ ; e la retta $z = 0$ corrisponde al valore $\beta = -\alpha^{-1}$ del parametro.

Per il punto $C$, eventualmente $H$-libero, si porrà $C = (0, c)$ e saranno soddisfatte le relazioni

$$(5.10) \quad \alpha(\alpha\theta^2 + 1) = [\,]; \qquad \alpha(\alpha c^2 - 1) = [\,]; \qquad 1 + \alpha\theta^2 - \alpha c^2 = \Delta,$$

esprimenti le condizioni che i vertici e i lati del triangolo $ABC$ sono esterni a $\Gamma$.

I punti $B' = (\lambda, \lambda\theta + c, 1)$, $B'' = (-\lambda, -\lambda\theta + c, 1)$ sono tali che $(A, C, B', B'') = -1$; essi risultano coniugati rispetto a $\Gamma$ se

$$(5.11) \qquad \lambda^2(\alpha\theta^2 + 1) = \alpha c^2 - 1.$$

D'altra parte, per 4.5, se $C$ è libero la retta $b'$, polare di $B'$, deve passare per $B$; il che richiede $\lambda - \alpha\theta(\lambda\theta + c) = 0$; ma allora da (5.10) segue

$$(5.12) \qquad \alpha c^2(1 - 3\alpha\theta^2) = (1 - \alpha\theta^2)^2$$

(in particolare, per $c = 0$, si ritrova il caso escluso dei punti $A, B$ fra loro coniugati).

Concludendo:

LEMMA 5.1. *All'arco $H$, rispetto al quale sono liberi i punti $A$, $B$ di coordinate* (5.8) *si possono aggregare al più i punti $C(0, \pm c)$ dove*

$$(5.13) \qquad c = (1 - \alpha\theta^2)/\sqrt{\alpha(1 - 3\alpha\theta^2)}$$

*sotto la condizione - oltre alle* (5.10) -

$$(5.14) \qquad 0 \neq \alpha(1 - 3\alpha\theta^2) = [\,].$$

## 6 – Seguito della discussione

Completeremo ora la discussione avviata nel n. 5, pervenendo alla dimostrazione del teorema 1 enunciato nell'introduzione. Conviene anzitutto richiamare quanto segue.

L'arco $H$, rispetto al quale sono liberi i punti $A = P_n$ e $B = P_n$, di 1 (più esattamente, l'insieme delle coordinate orbitali dei punti di $H$), è definito dalla $(n, n')$-partizione, $V$, dell'anello $M = Z_{/m}$, secondo il procedimento indicato nel n. 3, B). Così, in forza della (3.5), le coordinate parametriche dei punti di $\Gamma$ ( in definitiva gli elementi del campo $F'$) risultano ordinate secondo il ciclo $\Omega_1$ (3.3) (orbita di $G_1$) di lunghezza $m = q + 1 = \tau\delta$; e la $(n, n')$-partizione $V$, che definisce $H$, è la regola secondo la quale i punti di $H$ vanno scelti fra gli elementi di $\Omega_1$; più esattamente, fra i $\delta$ $\tau$-cicli (cf. (3.11))

$$C_j = \{j + id\} \qquad (j \in Z_\delta\,; \quad i \in Z_\tau)\,, \tag{6.1}$$

componenti la potenza $(\Omega_1)^\delta$ del ciclo $\Omega_1$.
I cicli $C_\mu$, $C_{\mu+\delta}$, di (6.1), nonché i loro elementi, sono stati chiamati principali. Denotando con $\mathbf{R}(V)$, $\mathbf{V}(V)$ (cf. (3.13), (3.13')) gli insiemi dei punti principali rossi e verdi di $\Gamma$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(V) =& \Big\{T_A = \xi_{n_1}, \xi_{n_1+d}, \dots, T_B = \xi_{n'_1}\Big\} \cup \\ & \cup \Big\{T'_A = \xi_{n_2}, \xi_{n_2+d}, \dots, T'_B = \xi_{n'_2}\Big\} = \\ & = \mathbf{R}\Big(C_\mu\Big) \cup \mathbf{R}\Big(C_{\mu+\delta'}\Big); \\ V(V) =& \Big\{C_\mu - \mathbf{R}(C_\mu)\Big\} \cup \Big\{C_{\mu+\delta'} - \mathbf{R}(C_{\mu+\delta'})\Big\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

I punti (secondari) dei $\delta - 2$ cicli secondari sono ripartiti in $\delta' - 1$ coppie

$$\Big(C_r, C_{\nu-r}\Big)\,, \qquad (r \neq \mu, \mu + \delta'\,; \quad r = 1, 2, \dots, \delta' - 1) \tag{6.3}$$

i cicli di ciascuna coppia essendo composti, l'uno di punti rossi, l'altro di verdi.

Se si conviene di rappresentare con $\bullet, \blacksquare$ i punti principali rispettivamente rossi e verdi e con $\circ, \square$ gli omonimi punti secondari, si ha per $(\Omega_1)^\delta$ la seguente rappresentazione

$$\begin{aligned} (\Omega_1)^\delta:\ & (\bullet, \dots \bullet, \bullet, \blacksquare, \dots, \blacksquare)(\bullet, \dots \bullet, \bullet, \blacksquare, \dots, \blacksquare)(\circ, \dots, \circ) \\ & (\square, \dots, \square)(\circ, \dots, \circ)(\square, \dots, \square) \dots ; \end{aligned} \tag{6.4}$$

i punti di $H$ sono i punti rossi della rappresentazione e le coordinate orbitali corrispondenti danno luogo alla (n,n')-partizione $V$.

Ciò premesso, una collineazione $\zeta$ del piano, che muti $\Gamma$ in sé, induce una permutazione sugli elementi di $\Omega_l$, per effetto della quale il punto $Q = Q_i$ di $\Gamma$, che in $\Omega_l$ occupa il posto (coordinata orbitale) i, viene a occupare, nella $(\Omega_l)\zeta$, il posto j; quindi si trasforma nel punto $Q = Q_j$, cambiando la propria coordinata orbitale da i a j, ma conservando il colore originario.

Suppongasi ora che la $\zeta$ muti in sé anche l'arco $H$. In tal caso le coordinate orbitali dei punti di $H$ devono cambiare in modo che $[(\Omega_l)\zeta]^{\delta}$ assuma ancora la configurazione (6.4) (a meno del punto iniziale dei singoli cicli e del loro senso di percorrenza), sicché da $[(\Omega_l)\zeta]^{\delta}$ si deduca una $V(\underline{n}, \underline{n}')$-partizione di $M$, con $\underline{n}$, $\underline{n}'$ non necessariamente distinti da $n$, $n'$.

In ogni caso, dalle considerazioni svolte si deduce

LEMMA 6.1. *Una trasformazione proiettiva, $\zeta$, di $\Gamma$ in sé, che muti in sé anche l'arco $H$, conserva la lunghezza, $\tau$, dei cicli di $(\Omega_l)^{\delta}$, determinati dalla $(n, n')$-partizione $V$ che definisce $H$. Pertanto i cicli di $\left[(\Omega_l)\zeta\right]^{\delta}$ hanno anch'essi lunghezza $\tau$, e relativamente alla $V(\underline{n}, \underline{n}')$-partizione risulta $\underline{n} - \underline{n}' = \pm d$.*

D'ora in poi, con riferimento alle notazioni e posizioni del n. 5, supporremo che il punto $C(0, c)$ sia $H$-libero (oltre ad $A$ e $B$).

Determineremo ulteriori condizioni derivanti da tale ipotesi.

Consideriamo a tale scopo le rette $l' = CA$, $l'' = CB$ (esterne a $\Gamma$) e diciamo $G_{l'}$, $G_{l''}$ i gruppi delle collineazioni assiali su $\Gamma$, relativi a tali rette; $\Omega_{l'}$, $\Omega_{l''}$ le orbite di tali gruppi; infine $\Gamma_{l'}$, $\Gamma_{l''}$, $H_{l'}$, $H_{l''}$ gli insiemi delle coordinate orbitali dei punti di $\Gamma$ e di $H$, relativi alle rette suddette.

Gli insiemi $\Gamma_{l'}$, $\Gamma_{l''}$ si determinano col procedimento(2) indicato in [11]. Poiché i punti $A, B, C$ sono $H$-liberi si ha

---

(2)Per semplificare i calcoli, converrà procedere come indicato in [11], n. 7. Dopo aver determinato i punti $T_C = (x', y')$, $T'_C = (-x', y')$, dove $x' = \sqrt{\alpha(\alpha c^2 - 1)}/\alpha c$, $y' = (\alpha c)^{-1}$, si assuma $O_1 = T_C$, $O_2 = C$, $O_3 = T'_C$. Con ciò nella rappresentazione parametrica (2.1) di $\Gamma$ è

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha x' & 0 & -x' \\ \alpha y' & 2 & y' \\ \alpha & 2/c & 1 \end{pmatrix}.$$

*segue*

LEMMA 6.2. *Relativamente alle rette* $\mathrm{l}', \mathrm{l}''$, *gli insiemi* $H_{\mathrm{l}'}, H_{\mathrm{l}''}$ *(che sono coordinate orbitali dei punti dello stesso sottoinsieme,* $H$, *di punti di* $\Gamma$*) determinano una* $(\underline{n}', 0)$ *e una* $(\underline{n}'', 0)$*-partizione di* $M$, *che diremo* $V'$, $V''$. *Inoltre è* $C = P_0$, *mentre ad* $A$ *e* $B$ *competono, sulle rette di appartenenza, le coordinate orbitali* $n' = 2\underline{r}'$, $n'' = 2\underline{r}''$.

Tenuto conto di 3, B) - in particolare delle (3.9), dove attualmente si porrà $n' = 0$ e si sostituirà $n$ con $\underline{n}' = 2\underline{r}'$ e $\underline{n}'' = 2\underline{r}''$ - sia

$$(m, \underline{n}') = \underline{\delta}', \qquad (m, \underline{n}'') = \underline{\delta}'',$$

sicché $m = \underline{\delta}'\tau'$, $\underline{n}' = \underline{\delta}'\eta' = 2\Delta'\eta'$, $m = \underline{\delta}''\tau''$, $\underline{n}' = \underline{\delta}''\eta'' = 2\Delta''\eta''$; si noti in particolare, che $n' = 0$ implica $\mu = \nu = 0$, sicché le classi principali di $V'$ e $V''$ sono $C_0^{(\mathrm{l}')}$, $C_{\Delta'}^{(\mathrm{l}')}$ e $C_0^{(\mathrm{l}'')}$, $C_{\Delta''}^{(\mathrm{l}'')}$.

I seguenti Lemmi 6.3 e 6.4 esprimono proprietà delle ripartizioni $V'$, $V''$.

LEMMA 6.3. *È* $\tau' = \tau'' = \tau$.

DIM. Per le conclusioni di [11] (n. 3 e n. 7), $\Omega_{\mathrm{l}''}$ si ottiene da $\Omega_{\mathrm{l}'}$ moltiplicando gli elementi per un opportuno fattore $\rho$ ($\neq \pm 1$), il cui quadrato è determinato nella nota 2. Tale operazione è anche una operazione su $\Gamma$, precisamente la restrizione a $\Gamma$ di una collineazione del piano che muta $\Gamma$ in sé, e, per le ipotesi ammesse, anche l'arco $H$. Allora, per 6.1, i punti di $H$ sono estratti da cicli di $\Omega_{\mathrm{l}'}$ e $\Omega_{\mathrm{l}''}$ aventi la stessa lunghezza. Dunque è $\tau' = \tau''$. Scambiando poi $B$ con $C$ segue la dimostrazione del Lemma.

Da 6.3 e dalle (3.9), segue

---

*segue nota*

Le operazioni generatrici di $G_{\mathrm{l}'}$, $G_{\mathrm{l}''}$ sono $w = \left(\xi_1^{(\epsilon)}u + \beta^{(\epsilon)}\right)/\left(u + \xi_1^{(\epsilon)}\right)$ $(\epsilon = \mathrm{l}, \mathrm{l}'')$ dove

$$\beta^{(\mathrm{l}')} = \alpha^{-1}(\theta x' + y' - c)/(\theta x' - y' + c),$$
$$\beta^{(\mathrm{l}'')} = \alpha^{-1}(\theta x' - y' + c)/(\theta x' + y' - c),$$
$$\beta^{(\mathrm{l}'')}/\beta^{(\mathrm{l}')} = \rho^2.$$

LEMMA 6.4. *Risulta*

$$(6.5)\qquad \begin{aligned} &|\mathbf{R}(V')| = |\mathbf{R}(V'')| = \tau + 1\,; \quad |\mathbf{V}(V')| = |\mathbf{V}(V'')| = \tau - 1\,; \\ &\underline{d}' = \pm \underline{d}''\,; \quad \underline{n}' = \pm \underline{n}''\,. \end{aligned}$$

Notando che ora è $T_C = \infty$, $T'_C = 0$, $\mathbf{R}(V')$ consta dei seguenti punti, presi dalle classi principali $C_0^{(1')}$, $C_{\Delta''}^{(1')}$:

$$(6.6)\qquad \mathbf{R}(V')\colon \left\{T_A, \dots, T_C\right\} \cup \left\{T'_A, \dots, T'_C\right\};$$

analogamente, dai cicli $C_0^{(1'')}$, $C_{\Delta''}^{(1'')}$ si trova

$$(6.6)\qquad \mathbf{R}(V'')\colon \left\{T_B, \dots, T_C\right\} \cup \left\{T'_B, \dots, T'_C\right\}.$$

Le coordinate parametriche $\xi_i$ ($\neq 0, \infty$) dei punti di $\Gamma$ formano il gruppo ciclico moltiplicativo di $GF(q)$; quindi sono rappresentabili mediante potenze $\varepsilon^i (i = 1, 2, \dots, q-1)$ di un generatore del gruppo stesso. Esaminiamo, conformemente alla (6.5), i due casi che possono presentarsi.

i) $\underline{n}' = \underline{n}''$ (quindi $\underline{\delta}' = \underline{\delta}' = \delta$).

In questo caso $H_{1'}$ e $H_{1''}$ determinano una stessa partizione dell'insieme $M$. Pertanto risulta $V' = V''$ e, di conseguenza, in $\Omega_{1'}$ e $\Omega_{1''}$ i punti rossi e verdi principali occupano, rispettivamente, gli stessi posti. Il moltiplicatore $\rho$ - che fa passare da $\Omega_{1'}$ a $\Omega_{1''}$ - permuta gli elementi degli insiemi di egual colore. In altri termini è $\rho(\mathbf{R}(V')) = \mathbf{R}(V'')$ e $\rho(\mathbf{V}(V'')) = \mathbf{V}(V'')$. Allora, detti $\varepsilon^{r_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2(\tau - 1)$) gli elementi (diversi da 0 e $\infty$) di $C_0^{(1')}$ e $C_{\Delta'}^{(1')}$, quelli delle classi $C_0^{(1'')}$, $C_{\Delta''}^{(1'')}$ sono $\varepsilon^{r_j} = \rho\varepsilon^{r_i}$ e si ha $\{\varepsilon^{r_j}\} = \{\rho\varepsilon^{r_i}\}$. Allora, da $\prod_{j=1}^{2(\tau-1)} \varepsilon^{r_j} = \prod_{i=1}^{2(\tau-1)} \rho\varepsilon^{r_i}$ segue $\rho^{2(\tau-1)} = 1$; quindi $2(\tau - 1)$ è divisore di $\tau\delta - 2 = 2(\tau\delta' - 1)$ e pertanto $\tau - 1$ divide $\tau\delta' - 1$. Ciò implica (poiché $\tau - 1$ è pari) $\delta'$ dispari e quindi (cf. 2, B)) $q = 4t + 1$. Ma si può aggiungere: in $m = q + 1 = 4t + 2 = \tau\delta = 2\tau\delta'$, risulta $\delta' = 1$. Infatti, se $\delta' > 1$, $V'$ ammette $\delta - 1 = 2(\delta' - 1)$ classi secondarie i cui elementi si scambiano fra loro nel passaggio da $\Omega_{1'}$ a $\Omega_{1''}$. Con considerazioni analoghe alle precedenti, si trova ora $\rho^{2(\delta'-1)\tau} = 1$, quindi l'assurdo $\tau(\delta' - 1) | (\tau\delta' - 1)$.

Riassumiamo la discussione nel

LEMMA 6.5. *Nel caso* $q = 4t + 1$, *se il punto* $C$ *è libero, nella (2.9) deve essere* $\delta = 2$ *(condizione certamente soddisfatta se* $2t + 1$ *è un numero primo). Pertanto tutti i punti di* $\Gamma$ *sono principali e il moltiplicatore* $\rho$ *- che fa passare da* $\Omega_{1'}$ *a* $\Omega_{1''}$ *- permuta fra loro gli elementi dello stesso colore. Viceversa, se* $\delta = 2$, $V'(\underline{n}', 0)$ *e* $V''(-\underline{n}', 0) = V''(\underline{n}'', 0)$ *coincidono, e quindi* $\underline{n}' = \underline{n}''$, $\underline{\delta}' = \underline{\delta}''$.

ii) $\underline{n}' = -\underline{n}''$.
In questo caso da i) segue $q = 4t - 1$ e $V''$ è una $(-2\underline{n}', 0)$-partizione di $M$. Di conseguenza per le coordinate orbitali si ha:
- in $V''$ i punti principali rossi sono $\underline{n}' =\mathbf{0}$, $\underline{n}' + h = \mathbf{h}$, nonché i punti che in $V'$ sono principali e verdi;
- in $V''$ i punti principali verdi sono quelli che in $V'$ sono principali e rossi (tranne $\mathbf{0}$ e $\mathbf{h}$);
- i punti (secondari) di una coppia di classi 0-complementari, $(C_r, C_{-r})$, di $V''$ o sono quelle delle omonime classi di $V'$ oppure ne differiscono per lo scambio di colore fra le classi.

Da ciò segue il modo di operare del moltiplicatore $\rho$, che fa passare da $\Omega_{1'}$ a $\Omega_{1''}$.

LEMMA 6.6.
a) *Essendo* $q = 4t - 1$, *è lecito porre nella* (4.1) $\alpha = 1$ *e assumere per* $\rho$ *(cf. nota 2) la determinazione* $\rho = [\ ]$;
b) *Un punto* $Q$ *di* $\Gamma$, *che sia principale in* $V'$, *sia portato in un punto principale di* $V''$. *Allora, se* $\mathbf{i}$ *è la coordinata orbitale rossa (verde) di* $Q$ *in* $V'$, *in* $V''$ *la coordinata orbitale* $\mathbf{j}$, *dello stesso punto* $Q$ *è verde (rossa).*
Segue dalla composizione cromatica di $V'$ e $V''$.

c) $\rho$ *non può portare tutti gli elementi principali rossi e verdi di* $\Omega_{1'}$, *negli elementi verdi e rossi di* $\Omega_{1''}$.
Diversamente $\rho$ induce una permutazione fra gli elementi ($\neq 0, \infty$) delle classi $C_0$, $C_{\delta'}$; allora, argomentando come sopra e tenendo presente che è $\rho = [\ ]$, si trova $\rho^{2(\tau-1)} = 1$, quindi $(\tau - 1)|(\tau\delta' - 1)$. Con ciò $\delta'$ sarebbe dispari e quindi $q = 4t + 1$.

d) *In conseguenza di* b), *una coppia* $(\xi_i, \xi_{-i} = -\xi_i)$ *di elementi principali di* $C_0$ *(di colore diverso, in quanto allineati con* $P_0 = C$, *che è libero) è* *tale che* $\xi_r = \rho\xi_i$ *e* $-\xi_r = -\rho\xi_i$ *sono elementi secondari, ciascuno di colore diverso (in quanto appartengono a classi 0-complementari). Conclusione analoga per la classe* $C_{\delta'}$*;*

e) *Gli elementi di* $k$ *classi* $C_r$ *di* $\Omega_{1'}$*, non possono essere portati in quelli di altrettante classi* $C_s$ *di* $\Omega_{1''}$*.*

Diversamente, posto $C_r = \{\varepsilon^{ri}\}$ $(i = 1, 2, \dots, \tau)$; $C_s = \{\varepsilon^{sj}\}$ $(j = 1, 2, \dots, \tau)$, se $k = 1$, gli elementi di $C_s$ sono una permutazione di quelli di $C_r$; quindi, per considerazioni già svolte, $\rho^{\tau} = 1$. Con ciò $\tau$ sarebbe un divisore di $(q-1)/2 = (\tau\delta - 1)$. Analogamente per $k > 1$.

Riassumendo:

punti principali:

● ⟶ ■ ● ⟶ □ ● ⟶ ○
■ ⟶ ● ■ ⟶ ○ ■ ⟶ □

punti secondari:

○ ⟶ ● ○ ⟶ ○ ○ ⟶ ■ ○ ⟶ □
□ ⟶ ■ □ ⟶ □ □ ⟶ ● □ ⟶ ○

## 7 – Considerazioni conclusive

Le conclusioni stabilite continuano a valere se si trasforma il piano con una collineazione $\zeta$ che muti $\Gamma$ in sé e tale che[3]

$$C(\zeta) = Y_\infty, \quad T_C(\zeta) = (1, 0), \quad T'_C(\zeta) = (-1, 0).$$

In tal modo (le coordinate orbitali de) i punti dell'arco trasformato $H' = (H)\zeta$ lasciano liberi i punti $Y_\infty = P_0$, $A' = (A)\zeta$, $B' = (B)\zeta$ sulle rette $a' = (1')\zeta$, $b' = (1'')\zeta$ e determinano, relativamente a queste, una $(d', 0)$ e una $(d'', 0)$-partizione di $M$ $(d' = \pm d'')$, che diremo ancora $V'$ e $V''$.

La rappresentazione parametrica di $\Gamma$ è ora data dalle (5.1), da cui si deducono le seguenti relazioni fra le coordinate dei vertici di un quadrangolo inscritto in $\Gamma$, avente i lati paralleli agli assi:

$$\text{(7.1)} \quad \begin{array}{ll} Q_r = \xi_r = u = (x, y) & Q_{h-r} = \xi_{h-r} = (\alpha u)^{-1} = (-x, y) \\ Q_{-r} = \xi_{-r} = -u = (x, -y) & Q_{h+r} = \xi_{h+r} = (-\alpha u)^{-1} = (-x, -y) \end{array}$$

[3] Si può assumere, ad es., per $\zeta$ la $[X, Y, Z] = \delta[x, y, z]$, dove

$$\delta = \begin{pmatrix} (c - y') & 0 & 0 \\ 0 & cx' & -cx'y' \\ 0 & -x' & cx' \end{pmatrix}$$

$A' = (A)\zeta = \big(-(c - y'), -cx'\theta, x'\theta\big)$; $B' = (B)\zeta = (c - y', -cx'\theta, x'\theta)$.

I punti di $\Gamma$, del tipo $\xi_r$, $\xi_{-r}$, essendo allineati con il punto $C$, che è $H$-libero, sono sempre di colore diverso.

Sull'asse $x$ siano $X$ un punto esterno a $\Gamma$ e $O'$ il suo $\Gamma$-coniugato, interno a $\Gamma$ (si sta ancora discutendo il caso $q = 4t - 1$). Un quadrangolo $q_X$, inscritto in $\Gamma$, i cui punti diagonali siano $Y_\infty, X, O'$, ha per vertici coppie di punti $(Q_r, Q_{-r})$, $(Q_s, Q_{-s})$. I vertici di $q_X$ si intendono denotati in modo che sussitano gli allineamenti

$$Q_rQ_sX\,; \quad Q_{-r}Q_{-s}X\,; \quad Q_rQ_{-s}O'\,; \quad Q_{-r0}Q_sO'\,.$$

Dopo di che $q_X$ si dirà di prima specie se i vertici opposti a $O'$ hanno lo stesso colore (i colori di ciascuna coppia di vertici opposti a $O'$ sono pertanto diversi); di seconda specie nel caso contrario.

Osserviamo ora che moltiplicare gli elementi di $\Omega_{a'}$, per il fattore $\rho$ (al fine di ottenere $\Omega_{b'}$) vuol dire operare su $\Gamma$ mediante la restrizione (a $\Gamma$) della collineazione $\chi$ (del piano) che muta $\Gamma$ in sé ed ha come uniti i punti $(1,0) = \infty$, $(-1,0) = 0$ e $Y_\infty$; la $\chi$ appartiene, come è noto, a un gruppo ciclico, di ordine $(q-1)/2$, che è transitivo sui quadrangoli $q_x$.

Supponiamo ora che i punti di $H'$ siano tali che nella configurazione di quadrangoli $q_X$ si trovi un insieme $Q$ di $k$ quadrangoli di seconda specie - i cui vertici riempiono $4k$ $(h \geq 1)$ classi $(C_r, C_{-r}, C_{h-r}, C_{h+r})$ - di $\Omega_{a'}$. Allora, per il modo come $\rho$ trasforma i punti di $\Gamma$ (cf. 5.7), l'insieme $Q$ viene mutato in sé da $\rho$, contro le conclusioni di 6.6, e). Si conclude pertanto:

LEMMA 7.1. *Nel caso $q = 4t - 1$, se il punto $C$ è $H$-libero, la configurazione dei quadrangoli $q_X$ non deve contenere quadrangoli di seconda specie. Pertanto* (cf. (2.0)) *in $m = q + 1 = 4t = \tau\delta$ dev'essere $\delta = 4$, quindi $t = \tau$ dispari (condizione certamente soddisfatta se $t$ è un numero primo).*

Ulteriori condizioni per $C$ si possono ottenere facilmente se, ad es. mediante la $\zeta^{-1}$, si ritorna all'arco $H$ e alle posizioni del n. 5.

Supposto di aver eseguito tali trasformazioni, consideriamo i rettangoli (7.1) distinguendo due casi.

i) $q = 4t + 1$.

I rettangoli $q_r$ sono tutti principali. Si vede facilmente dalle progressioni (2.13), (2.13′) - nonché dalle loro complementari alle classi di appartenenza - che i vertici di ciascun $q_r$ hanno lo stesso colore. La tabella seguente ne precisa il numero:

(7.2)

| | | # rett. rossi | # rett. verdi |
|---|---|---|---|
| $q+1=$ | $t$ pari | $t/2$ | $t/2$ |
| $2(2t+1)$ | $t$ dispari | $(t+1)/2$ | $(t-1)/2$ |

Inoltre i punti $T_Y = 0, T_{Y'} = \infty$ sono entrambi rossi se $t$ è pari; verdi, se $t$ è dispari. In ogni caso, rispetto al polo $O$ di $l$ si ha una disposizione simmetrica sia dei punti sia dei colori. Pertanto:

7.2. *Nel caso $q = 4t+1$, se il punto $C_1(0,c)$ è $H$-libero, tale è anche $C_2(0,c)$.*

ii) $q = 4t-1$.
I vertici di ciascun rettangolo principale sono dello stesso colore, mentre i rettangoli secondari sono di seconda specie. Si ha

| | | # rett. principali | | # rett. secondari |
|---|---|---|---|---|
| | | rossi | verdi | |
| $q+1=$ | $t-1=0$ (mod 4) | $(t-1)/4$ | $(t-1)/4$ | $(t-1)/2$ |
| $=4t=4\tau$ | $t-1=0$ (mod 2) | $(t+1)/2$ | $(t-3)/2$ | $(t-1)/2$ |

I punti $T_Y = 0$, $T'_Y = \infty$ sono di colore rosso se $t-1=0$ (mod 4); verdi, se $(q-1)=0$ (mod 2). I punti $T_X = 1$, $T'_X = -1$ sono sempre di colore diverso, appartenendo l'uno alla classe $C_1$, l'altro alla 0-complementare $C_3$. Ciò premesso, suppongasi che il punto $C_1(0,c)$ sia $H$-libero. Fra le corde di $\Gamma$ passanti per esso, se ne ha almeno una che congiunge un vertice $Q_r$ di un rettangolo principale (ad es. rosso) e un vertice $Q_s$, verde, di un rettangolo di seconda specie. Ma allora la congiungente i punti $Q_{h+r}$ (rosso) e $Q_{h+s}$ (rosso) passa per $C_2(0,-c)$, che non è libero.

Pertanto

7.3. *Nel caso $q = 4t - 1$, se $C_1(0, c)$ è libero, non è tale $C_2(0, -c)$.*

Ritorniamo ora al caso $q = 4t + 1$. Detta $i$ una determinazione di $\sqrt{-1}$, alla classe $C$ dei rettangoli (principali) di uno stesso colore appartiene il rettangolo

$$\begin{vmatrix} i & (\alpha i)^{-1} \\ -i & (-\alpha i)^{-1} \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ -1 & \alpha^{-1} \end{vmatrix}.$$

Ciò indica che $C$ si costruisce a partire dal rettangolo definito dalla matrice del secondo membro e che il moltiplicatore è $i$. Ma allora la classe $C$ consta di due soli rettangoli e la (6.2) fornisce i possibili valori di $t$ e $q + 1$:

$$t/2 = 2\ q = 17\,; \quad (t-1)/2 = 2\,,\ q = 21\,; \quad (t+1)/2 = 2\,,\ q = 13\,.$$

Il valore $q = 21$ non va preso in considerazione. Nel successivo n. 8 sarà mostrato che soltanto per $q = 13$ si hanno archi completi di ordine $(q+11)/2$; con ciò il teorema 1, enunciato nell'introduzione, è pienamente dimostrato.

## 8 – Alcune verifiche

A conferma delle conclusioni dedotte, riportiamo alcuni esempi. In ciascuno di essi la rappresentazione parametrica di $\Gamma$ è data dalle (5.1), dove si assume $\alpha = 1$, nel caso $q = 4t - 1$. Si ricorda che noti $\xi_1$ e $\beta$ (cf. [11]), l'operazione generatrice di $G_1$ è data da

$$w = (\xi_1 u + \beta)/(u + \xi_1)\,, \tag{8.1}$$

e gli elementi dell'orbita $\Omega_l$ si calcolano con la formula ricorrente

$$(8.2)\qquad \xi_{i+1} = (\xi_1\xi_i + \beta)/(\xi_i + \xi_1),$$

mentre per il punto $P_n$, variabile su l, è

$$(8.3)\qquad P_n = (1, \xi_n, 0) = (1, \theta, 0).$$

Infine l'involuzione su $\Gamma$ avente il polo nel punto $P(X, Y, Z)$ è data da

$$(8.4)\qquad v = (\alpha Yu + X - Z)/((X + Z)u - \alpha Y).$$

a) $q = 11$. Non esistono coppie di punti $A, B = (1, \pm\theta, 0)$ per cui risultino soddisfatte le condizioni del n. 5. Pertanto non esistono punti $H$-liberi diversi da coppie di punti (5.6) presi su l.

b) $q = 13$. È $a = 2$, $\beta = 6$, $\xi_1 = 2$.

$$\xi_0 = \infty = (12, 0)$$

$$\begin{array}{ll}
\xi_1 = 2 = (5, 12) & \xi_{13} = \underline{11} = (5, 1) \\
\xi_2 = \underline{9} = (3, 10) & \xi_{12} = \underline{4} = (3, 3) \\
\xi_3 = \underline{1} = (4, 5) & \xi_{11} = 12 = (4, 8) \\
\xi_4 = 7 = (9, 5) & \xi_{10} = \underline{6} = (9, 8) \\
\xi_5 = \underline{8} = (10, 10) & \xi_9 = \underline{5} = (10, 3) \\
\xi_6 = \underline{10} = (8, 12) & \xi_8 = 3 = (8, 1)
\end{array}$$

$$\xi_7 = 0 = (1, 0)$$

Consideriamo i punti di l $P_4 = (1, 7, 0)$ e $P_{10} = (1, 6, 0)$. Il valore $\theta = 6$ soddisfa le condizioni (5.10) e (5.14) e, dal n. 5 si ricava $C = (0, \pm 4)$, che soddisfa le altre condizioni del n. 5. Gli elementi della (10,4)-partizione di $M = Z_{/14}$ sono gli indici che corrispondono ai punti sottolineati nell'orbita sopra riportata. Formando $H$ con tali punti, risultano liberi non solo $P_4$ e $P_{10}$, ma anche i punti $C = (0, \pm 4)$, come si può verificare mediante la (8.4).

c) $q = 17$. È $\alpha = 3$, $\beta = 11$, $\xi_1 = 5$.

$$\xi_0 = \underline{\infty} = (16,0)$$

$$\begin{array}{ll}
\xi_1 = \underline{5} = (12,14) & \xi_{17} = \underline{12} = (12,3\ ) \\
\xi_2 = \underline{7} = (\ 2,4\ ) & \xi_{16} = \underline{10} = (\ 2,13) \\
\xi_3 = 1 = (\ 8,9\ ) & \xi_{15} = 16 = (\ 8,8\ ) \\
\xi_4 = 14 = (10,1\ ) & \xi_{14} = 3 = (10,16) \\
\xi_5 = 15 = (\ 7,1\ ) & \xi_{13} = 2 = (\ 7,16) \\
\xi_6 = 6 = (\ 9,9\ ) & \xi_{12} = 11 = (\ 9,8\ ) \\
\xi_7 = \underline{13} = (15,4\ ) & \xi_{11} = \underline{4} = (15,13) \\
\xi_8 = \underline{8} = (\ 5,14) & \xi_{10} = \underline{9} = (\ 5,3\ )
\end{array}$$

$$\xi_9 = \underline{0} = (\ 1,0)$$

I punti $P_4 = (1,-3,0)$ e $P_{14} = (1,3,0)$ di l ($\theta = \pm 3$) sono i soli punti tali che le condizioni del n. 5 siano soddisfatte. In corrispondenza si trova $C = (0,\pm 6)$. Ma se si costruisce l'arco $H$ definito dalla (14,4)-partizione di $M = Z_{/18}$, si controlla facilmente, mediante la (8.4), che $C = (0,6)$ è allineato con i punti $\infty$ e 6 di $H$.

d) $q = 19$. È $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\xi_1 = 11$, quindi

$$\xi_0 = \underline{\infty} = (18,0)$$

$$\begin{array}{ll}
\xi_1 = \underline{11} = (\ 4,17) & \xi_{19} = 8 = (\ 4,2\ ) \\
\xi_2 = 2 = (\ 7,16) & \xi_{18} = 17 = (\ 7,3\ ) \\
\xi_3 = 6 = (16,7\ ) & \xi_{17} = \underline{13} = (16,12) \\
\xi_4 = 15 = (17,4\ ) & \xi_{16} = \underline{4} = (17,15) \\
\xi_5 = \underline{1} = (\ 0,18) & \xi_{15} = 1 = (\ 0,1\ ) \\
\xi_6 = \underline{14} = (\ 2,4\ ) & \xi_{14} = \underline{5} = (\ 2,15) \\
\xi_7 = 16 = (\ 3,7\ ) & \xi_{13} = \underline{3} = (\ 3,12) \\
\xi_8 = 10 = (12,16) & \xi_{12} = 9 = (12,3\ ) \\
\xi_9 = \underline{7} = (15.17) & \xi_{11} = 12 = (15,2\ )
\end{array}$$

$$\xi_{10} = \underline{0} = (\ 1,0)$$

Prendiamo su l i punti $P_{12} = (1,9,0)$, $P_8 = (1,10,0)$. In corrispondenza di $\theta = 9$, si trova (n. 5) $C = (0, \pm 8)$ e sono soddisfatte tutte le condizioni del n. 5. Mediante la (8.4) si verifica poi che il punto (0,8) è libero rispetto all'arco $H$ formato dai punti sottolineati (corrispondenti alla (12,8)-partizione di $M = Z_{/20}$) Il punto $(0, -8)$ è vincolato, in accordo con le conclusioni di 7.3.

e) $q = 43$; ($\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\xi_1 = 2$). Prendendo i punti $P_{24} = (1, 13, 0)$ e $P_{20} = (1, 30, 0)$, si trova che $C = (0, -6)$ è libero rispetto all'arco $H$ determinato dalla (24,20)-partizione di $M = Z_{/44}$.

f) per $q = 59$, le ricerche (invero laboriose) effettuate non hanno portato a punti liberi diversi dalle coppie $(A, B)$, scelte su l.

Resta pertanto aperto il problema: *classificare i piani* $PG(2, q)$, $q = 4t - 1$ *(t dispari,* $\delta = 4$*), nei quali uno (solo) dei punti* $C = (0 \pm c)$, *con c dato dalla* (5.13), *risulta libero rispetto all'arco H, costruito su* $\Gamma$ *con le modalità descritte nel n. 5.*

## BIBLIOGRAFIA


[1] A. BARLOTTI: *Some topics in finite geometrical structures*, Institute of Statistics, mimeo series n. 439, Un. N. Carolina, 1965.

[2] R.C. BOSE: *Mathematical theory of the symmetrical factorial design*, Sankhya, 56 (1947), 107-166.

[3] M. CIPOLLA: *Analisi algebrica*, Principato, Messina, 1948.

[4] J.W.P. HIRSCHFELD: *Projective Geometries over finite fields*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[5] G. KORCHMAROS: *Osservazioni sui risultati di B. Segre relativi ai k-archi contenenti k-1 punti di un ovale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 56 (1974), 690-697.

[6] L. LOMBARDO RADICE: *Sul problema dei k-archi completi*, Boll. Un. Mat. Ital., 11 (1956), 178-181.

[7] G. PELLEGRINO: *Alcune elementari proposizioni aritmetiche e loro applicazione alla teoria dei k-archi*, Boll. Un. Mat. Ital., 16 A (1979), 322-330.

[8] G. PELLEGRINO: *Archi completi di ordine (q+3)/2 nei piani di Galois* $S_{2,q}$, *con* $q{=}3$ (mod 4), Rend. Circ. Mat. Palermo, ser. II, tomo XXX (1981), 311-320.

[9] G. PELLEGRINO: *Archi completi di ordine (q+3)/2 nei piani di Galois* $S_{2,q}$, *con* $q{=}1$ (mod 4), Rend. di Mat., 1 (1982), 59-66.

[10] G. PELLEGRINO: *Alcune proposizioni aritmetico-combinatorie sugli anelli di resti modulo m*, Semin. Mat. Fis. Un. di Modena, XXXIX (1991) (in corso di stampa).

[11] G. PELLEGRINO: *Proprietà e applicazioni del gruppo delle collineazioni assiali su una conica del piano di Galois di ordine dispari*, Rend. di Mat., 11 (1991), 591-616.

[12] B. QVIST: *Some remarks concerning curves of second degree in a finite plane*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, n. 134, 1948.

[13] B. SEGRE: *Lezioni di Geometria moderna*, Zanichelli, Bologna, 1948.

[14] B. SEGRE: *Ovals in finite projective plane*, Canad. J. Math., 7 (1955), 414-416.

[15] B. SEGRE: *Le Geometrie di Galois*, Ann. Mat. Pura appl., 48 (1959), 1-97.

[16] B. SEGRE: *Proprietà elementari relative ai segmenti e alle coniche sopra un campo qualsiasi e una congettura di Seppo Illka per il caso dei campi di Galois*, Ann. Mat. Pura appl., 96 (1973), 290-337.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 5 settembre 1991*
*ed accettato per la pubblicazione il 3 marzo 1992*
*su parere favorevole di V. Dicuonzo e di G. Korchmaros*

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

G. Pellegrino - Dipartimento di Matematica - Università di Perugia - Via Vanvitelli, 1- 06100 Perugia, Italia