Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 729-747

Partizioni e sezioni piane delle quadriche non singolari di PG(3,q)

G. FAINA(*)

RIASSUNTO – *Si introduce il concetto di (m, n, s)-quadrica ispirato a quello di ovale astratta introdotto da Buekenhout in [2]. In particolare si provano alcune interessanti caratterizzazioni dei piani di Möbius, Minkowski e Laguerre miqueliani.*

ABSTRACT – *We generalize the notion of absolutely irreducible quadric in $PG(3, q)$ by introducing the concept of (m, n, s)-quadric. This concept can be seen as a generalization of Buekenhout's notion of abstract oval [2]. In this way, we obtain new interesting characterizations of many classes of circle geometries.*

KEY WORDS – *Quadrics - Möbius planes - Minkowski planes - Laguerre planes - Flocks.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 51A45 - 51E20 - 51B05

1 – Introduzione

Scopo di questo lavoro è di determinare le proprietà che una famiglia $\mathcal{F}$ di partizioni di un insieme astratto finito $\mathcal{E}$ deve possedere affinché $\mathcal{E}$ sia immergibile in uno spazio proiettivo $PG(3, q)$ in modo tale da essere un sottoinsieme, non necessariamente proprio, dell'insieme dei punti di una quadrica Ω non singolare dello stesso $PG(3, q)$ ed ogni sottoinsieme di $\mathcal{E}$, appartenente ad almeno una partizione di $\mathcal{F}$, sia coincidente con

(*)Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica e del GNSAGA del CNR.

l'intersezione di un piano di $PG(3,q)$ con la stessa quadrica Ω. Per ottenere tale risultato si forniranno anche nuove caratterizzazioni dei piani di Möbius, di Laguerre e di Minkowski classici (o Miqueliani).

Per quanto concerne le definizioni e le principali proprietà delle quadriche non singolari (ellittiche, iperboliche o paraboliche) faremo costantemente riferimento a [6] e [7]; mentre per le definizioni e le principali proprietà dei piani di Möbius, Minkowski e Laguerre (semplici, ovoidali o classici), faremo sempre riferimento a [12].

2 – Le (m,n,s)-quadriche

Siano $\mathcal{E}$ un insieme astratto finito di cardinalità $v \geq 3$ ed $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di partizioni di $\mathcal{E}$. Si denoti con $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ che appartengono ad almeno una partizione di $\mathcal{F}$. Nel seguito, gli elementi di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{B}$ saranno detti *punti e cerchi*, rispettivamente. Due punti X e Y di $\mathcal{E}$ si diranno *dipendenti* se non esiste alcun cerchio di $\mathcal{B}$ che li contiene simultaneamente. Se X ed Y sono dipendenti denoteremo ciò con il seguente simbolo: $X \| Y$.

D'ora in avanti, onde evitare lo studio di casi banali o troppo sporadici, fissato un intero positivo n tale che $3 \leq n \leq v-1$, supporremo che:

(2.1) ogni cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ contiene o uno o n punti;

(2.2) esiste in $\mathcal{B}$ almeno un cerchio di cardinalità n.

Se m ed s sono due interi tali che $0 \leq m < n-1$ ed $n-m-1 \leq s < (v-2)/(n-2)$ si dice che una coppia $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ è una (m,n,s)-quadrica se:

(A.1) per ogni terna di punti a due a due indipendenti passa uno ed un solo cerchio;

(A.2) ogni coppia di cerchi disgiunti è contenuta in una ed una sola partizione;

(A.3) comunque si fissino un cerchio γ ed un punto $X \in \mathcal{E}\backslash\gamma$, esistono in γ esattamente m punti distinti $X_{1\gamma}, X_{2,\gamma}, \dots, X_{m\gamma}$ tali che $X_{h\gamma} \| X$, $h = 1,2,\dots,m$.

(A.4) Ogni coppia di punti indipendenti è contenuta in esattamente s cerchi.

In base alle osservazioni riportate in [7], Capitolo 15, ed in [12], possiamo osservare quanto segue.

Se Θ è una quadrica ellittica non singolare di $PG(3,q)$, ad ogni retta r esterna ad Θ resta associato un fascio di piani ed ognuno di tali piani interseca Θ o in un punto oppure in $n = q+1$ punti distinti. Pertanto, ad ogni retta r esterna ad Θ resta associata una partizione $\mathcal{P}(r)$ di Θ stessa e, denotata con $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le partizioni $\mathcal{P}(r)$ ottenute al variare di r nell'insieme delle rette esterne ad Θ, la coppia $(\Theta,\mathcal{F})$ fornisce un esempio di $(0,q+1,q+1)$-quadrica.

Sia O una conica non degenere di un piano π dello spazio $PG(3,q)$, sia V un punto di $PG(3,q)\setminus\pi$ e sia C il cono che proietta O da V. Posto $\mathcal{E} = C\setminus\{V\}$, ad ogni retta di $PG(3,q)$ esterna ad $\mathcal{E}$ e non passante per V corrisponde, come nel caso della quadrica ellittica sopradescritto, una partizione di $\mathcal{E}$ stesso. Denotata con $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le partizioni di $\mathcal{E}$ ottenibili nel modo suddetto, abbiamo che la coppia $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ è un esempio di $(1,q+1,q)$-quadrica.

In modo del tutto analogo, se H è una quadrica iperbolica nonsingolare di $PG(3,q)$, la coppia $(H,\mathcal{F})$, dove $\mathcal{F}$ indica la famiglia delle partizioni dell'insieme dei punti che costituiscono H individuate da tutte le rette esterne ad H stesso, ci fornisce un esempio di $(2,q+1,q-1)$-quadrica.

3 – Alcuni risultati preliminari

Al fine di snellire la successiva trattazione denoteremo con:

$\mathcal{B}_n$ la famiglia di tutti gli n-cerchi di $\mathcal{B}$;

$\mathcal{B}_1$ la famiglia di tutti i cerchi di $\mathcal{B}$ aventi cardinalità 1;

$\mathcal{F}(\gamma)$ la famiglia delle partizioni di $\mathcal{F}$ che contengono un fissato cerchio γ di $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}(X)$ la famiglia dei cerchi di $\mathcal{B}$ che contengono un assegnato punto X di $\mathcal{E}$;

$\gamma(X)$ la famiglia dei punti del cerchio γ indipendenti rispetto ad un fissato punto $X \notin \gamma$.

(3.1) Per ogni terna di punti distinti di una $(0,n,s)$-quadrica $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ passa esattamente uno, ed un sol, cerchio.

DIM. In virtù di (A.1), basta dimostrare che due qualsiasi punti distinti X_1, X_2, di $\mathcal{E}$ sono indipendenti. A tal fine si consideri una partizione $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$. Se i due punti appartengono ad un medesimo cerchio di $\mathcal{P}$ il risultato è provato. Se invece essi appartengono a due cerchi distinti di $\mathcal{P}$, allora, essendo $m = 0$, essi sono indipendenti.

(3.2) Ogni coppia di punti distinti di una $(0, n, s)$-quadrica è contenuta in esattamente $s = (v-2)/(n-2)$ cerchi.

DIM. Siano X ed Y due distinti punti di $\mathcal{E}$. Dalla (3.1) discende che per ogni punto $Z \in \mathcal{E} \setminus \{X, Y\}$ esiste un unico cerchio γ tale che $X, Y, Z \in \gamma$. Se γ' è un altro cerchio che contiene sia X che Y allora, per (A.1), $|\gamma \cap \gamma'| = 2$ e quindi i punti di $\mathcal{E} \setminus \{X, Y\}$ si possono ripartire in $(v-2)/(n-2)$ sottoinsiemi disgiunti ognuno dei quali è contenuto in un unico cerchio del fascio di cerchi per X e Y.

Si osservi che se $m \geq 1$, allora ogni partizione di $\mathcal{F}$ non contiene alcun 1-cerchio. Infatti, se $n \geq 2$, sia $\gamma = \{X\}$ un 1-cerchio. Se $Y \in \mathcal{E} \setminus \{X\}$, allora, per (A.3), esistono almeno due punti distinti dipendenti con X, il che è assurdo. Se, invece, $m = 1$, sia $\gamma = \{X\}$ un 1-cerchio. Grazie a (A.3), ogni $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma$ è tale che $X \| Y$. Se γ' è un n-cerchio non contenente X, certamente esistente per (2.2), allora, ogni punto di γ' è dipendente con X e, poiché $|\gamma'| = n \geq 3$, si contraddice (A.3). Quindi, se $m \geq 1$, allora $\mathcal{B}_1 = \emptyset$.

(3.3) $v \geq s(n-2) + 2$, ovvero $v \geq (n-m-1)(n-2) + 2$.

DIM. Fissati due qualsiasi punti indipendenti di $\mathcal{E}$, per (3.2) ed (A.4), per essi passano s cerchi distinti; inoltre, per (A.1), due qualsiasi di tali cerchi non hanno altri punti in comune oltre ai due punti fissati.

(3.4) Se $m = 0$, allora $v = s(n-2) + 2$.

DIM. È una semplice conseguenza di (3.2) e di (A.1).

(3.5) Se $m = 0$, $\gamma = \{X\} \in \mathcal{B}_1$, ed $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma$, allora esistono esattamente $s = (v-2)/(n-2)$ n-cerchi distinti che contengono Y ed intersecano γ soltanto in un suo punto.

DIM. Segue immediatamente da (A.4) e da (3.2).

(3.6) Per ogni $\gamma \in \mathcal{B}_n$, per ogni $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma$ e per ogni $X \in \gamma(Y)$ esistono esattamente $\alpha = s - (n-m) + 1$ cerchi tangenti a γ in X e passanti per Y.

DIM. Per (A.4), la coppia di punti $\{X, Y\}$ è contenuta in s cerchi distinti. Inoltre, da (A.1) segue che per ogni $Z \in \gamma(Y) \setminus \{X\}$ esiste un unico cerchio, che denoteremo con $\langle X, Y, Z \rangle$, contenente, X, Y e Z e quindi, poiché per (A.3) si ha che $|\gamma(Y) \setminus \{X\}| = n - m - 1$, $n - m - 1$ di quegli s cerchi sono secanti con γ. Pertanto X è contenuto in esattamente $s - (n - m - 1)$ cerchi tangenti a γ e passanti per Y.

Si osservi che (3.6) ha sempre senso poichè, per ipotesi, $s \geq n - m - 1$.

(3.7) Ogni punto appartiene ad un numero costante ∂ di cerchi.

DIM. Infatti, supponiamo dapprima che in $\mathcal{B}$ esistano almeno due n-cerchi disgiunti, γ e γ', la cui unione sia propriamente contenuta in $\mathcal{E}$. Sia $X \in \mathcal{E} \setminus \gamma$. Da (A.1) ed (A.3) discende che ogni coppia di punti distinti di $\gamma(X)$ individua un unico cerchio contenente X e quindi, poiché $|\gamma(X)| = n - m$, si ha necessariamente che

$$\partial \geq \binom{n-m}{2}$$

dove con ∂ si è denotato $|\mathcal{B}(X)|$. Da (3.6) segue, inoltre, che X appartiene ad α cerchi distinti che intersecano γ soltanto in un punto. Perciò, X appartiene esattamente a

$$\partial - \binom{n-m}{2} - \alpha(n-m)$$

cerchi disgiunti da γ.

Sia $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ una partizione che contiene γ. Tale partizione conterrà un unico cerchio γ'' tale che $X \in \gamma''$. Al variare di $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}(\gamma), \gamma''$ varierà nella famiglia dei cerchi per X disgiunti da γ e quindi, per (A.2), si otterrà una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{F}(\gamma)$ e l'insieme dei cerchi per X disgiunti da γ stesso. Quindi

$$\partial - \binom{n-m}{2} - \alpha(n-m) = |\mathcal{F}(\gamma)|$$

e perciò

$$\partial = \binom{n-m}{2} + \alpha(n-m) + |\mathcal{F}(\gamma)|. \tag{3.7.1}$$

Pertanto ogni punto $X \in \mathcal{E} \setminus \gamma$ appartiene ad esattamente ∂ cerchi di $\mathcal{B}$.

Ripetendo lo stesso ragionamento a partire dal cerchio γ' e da un punto $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma'$, otterremo che ogni punto di $\mathcal{E} \setminus \gamma'$ apparterrà ad un numero costante ∂' di cerchi. Ma, per (2.2), esiste almeno un punto $Z \in \mathcal{E} \setminus \{\gamma \cup \gamma'\}$ e, quindi, risulta che $\partial = \partial'$.

Nel caso in cui non esistano in $\mathcal{B}$ due n-cerchi disgiunti la cui unione sia propriamente contenuta in $\mathcal{E}$, si verifica che si possono avere soltanto le seguenti particolari (m, n, s)-quadriche:

(a) la (0,3,4)-quadrica che si ottiene associando ad un qualsiasi insieme $\mathcal{E}$ di cardinalità $v = 6$ la famiglia di partizioni $\mathcal{F}$ i cui elementi sono costituiti da coppie di terne (3-blocchi) disgiunte di elementi di $\mathcal{E}$.

(b) la (1,3,2)-quadrica che si ottiene dal cono quadrico di $PG(3,2)$ nel modo descritto nel paragrafo 2.

(c) la (1.4.2)-quadrica che si ottiene considerando la coppia $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, con $\mathcal{E}$ definito nel modo seguente: siano π un piano proiettivo di $PG(3,2)$ ed Ω una ovale completa di π (i.e. Ω è un sottoinsieme di punti di π tale che mai tre punti di Ω appartengono ad una stessa retta e per ogni punto di Ω passano solo secanti ad Ω stesso). Sia V un punto di $PG(3,2) \setminus \pi$ e si consideri la struttura di incidenza $(\mathcal{E}, B \cup C, I)$ in cui $\mathcal{E}$ è l'unione degli insiemi dei punti delle rette congiungenti V con un punto di Ω, meno il punto V stesso ($P' \equiv \mathcal{E} \cup \{V\}$ si dice anche il cono speciale che proietta dal vertice V l'ovale completa Ω); B è l'insieme di tali rette e C è l'insieme delle intersezioni del cono P' con i piani di $PG(3,2)$ non passanti per V. Allora la famiglia dei fasci di piani di asse le rette esterne a P' da luogo ad una famiglia di partizioni $\mathcal{F}$ di $\mathcal{E}$ tale che $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una (1,4,2)-quadrica.

(d) la (0,3,3)-quadrica che si ottiene in modo naturale a partire da una quadrica ellittica di $PG(3,2)$.

(e) la (0,3,2)-quadrica che si ottiene associando ad un qualsiasi insieme $\mathcal{E}$ di cardinalità $v = 4$ la famiglia di partizioni $\mathcal{F}$ di $\mathcal{E}$ ognuna delle quali o è costituita da una terna di punti distinti di $\mathcal{E}$ e dal punto residuo o è la partizione di $\mathcal{E}$ costituita da tutti e soli i sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ di cardinalità 1 (o 1-blocchi).

Per brevità, omettiamo la verifica di quanto affermato ai punti (a) - (e) ed osserviamo che in ognuno dei casi elencati è evidente che per ogni punto passa uno stesso numero di cerchi.

L'asserto è definitivamente provato.

(3.8) Ogni n-cerchio di $\mathcal{B}$ appartiene ad esattamente

$$|\mathcal{F}(\gamma)| = \partial - \binom{n-m}{2} - \alpha(n-m)$$

partizioni distinte di $\mathcal{F}$.

DIM. Da (3.7) e da (3.7.1) segue che, se γ e γ' sono due n-cerchi distinti allora

$$|\mathcal{F}(\gamma)| + \binom{n-m}{2} + \alpha(n-m) = |\mathcal{F}(\gamma')| + \binom{n-m}{2} + \alpha(n-m) = \partial$$

e quindi $|\mathcal{F}(\gamma)| = |\mathcal{F}(\gamma')|$ e l'asserto è provato.

(3.9) Se $\mathcal{B}_1 = \emptyset$, allora $|\mathcal{F}| = \partial\big[\partial - \binom{n-m}{2} - \alpha(n-m)\big] = \varphi$.

DIM. Sia $X \in \mathcal{E}$. Ogni partizione $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ contiene un unico cerchio per X. D'altra parte X appartiene a ∂ cerchi ognuno dei quali appartiene a $\mathcal{F}(\gamma)$ partizioni distinte di $\mathcal{F}$. Poiché due cerchi per X appartengono a due distinte partizioni si ha immediatamente l'asserto.

(3.10) Se $m = 0$, allora ogni 1-cerchio $\{X\}$ appartiene ad esattamente $\partial - s$ partizioni distinte di $\mathcal{F}$.

DIM. Sia $Y \in \mathcal{E} \setminus \{X\}$ e sia $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(\{X\})$. Allora esiste un unico cerchio γ in $\mathcal{P}$ che contiene Y (e quindi disgiunto da $\{X\}$). Al variare di $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}(\{X\})$, γ varia nell'insieme dei cerchi contenenti Y e disgiunti da $\{X\}$. Perciò, per (A.2), resta definita una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{F}(\{X\})$ e l'insieme dei cerchi per Y disgiunti da $\{X\}$ stesso. Da (3.7) e da (3.2) si ottiene, dunque, l'asserto.

(3.11) Se $\mathcal{B}_1 = \emptyset$, allora $|\mathcal{B}_n| = (v\partial)/n$.

DIM. Contando in due modi tutte le possibili coppie distinte che si possono formare con un punto di $\mathcal{E}$ ed un n-cerchio passante per il punto stesso, grazie a (3.7), si ottiene che $v\partial = |\mathcal{B}_n|n$ e quindi l'asserto.

(3.12) Se $\mathcal{B}_1 = \emptyset$, allora

$$v = [n(n-1)(s-1)(n-2) + n(n-m)(n-m-1)]/[(n-m)(n-m-1)].$$

DIM. Si contino tutte le possibili configurazioni formate da: un cerchio γ, un punto $X \notin \gamma$, un cerchio γ' tale che $X \in \gamma'$ e $|\gamma \cap \gamma'| = 2$. Contando in due modi tali configurazioni, grazie a (3.7), (3.11) ed (A.4), si dimostra che vale la seguente uguaglianza

$$v\{[v\partial/n) - \partial][(n-m)(n-m-1)/2]\} = (v\partial/n)[n(n-1)/2](s-1)(n-2).$$

Con facili calcoli si prova quindi l'asserto.

(3.13) Se $\mathcal{B}_1 = \emptyset$, allora ogni partizione contiene esattamente

$$\pi = [(n-1)(s-1)(n-2) + (n-m)(n-m-1)]/[(n-m)(n-m-1)]$$

cerchi.

DIM. È una immediata conseguenza di (3.12) e del fatto che ogni cerchio contiene n punti.

4 – Le $(0, n, n)$-quadriche ed i piani di Möbius

In questo paragrafo studieremo quelle particolari (m, n, s)-quadriche per le quali $m = 0$ ed $s = n$. Per brevità, denoteremo tali quadriche con il simbolo Θ_n.

Abbiamo già visto nel paragrafo precedente che porre $m = 0$ non implica necessariamente che s sia uguale ad n, oppure che la (m, n, s)-quadrica sia deducibile da un ovoide di $PG(3, q)$. In proposito, esistono, comunque, anche esempi meno banali.

Infatti, sia $\mathcal{E}$ un insieme di cardinalità 7 e sia $\mathcal{B}_3$ la famiglia di tutte le terne di punti distinti di $\mathcal{E}$. Inoltre, sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le partizioni di $\mathcal{E}$ formate da due terne disgiunte di $\mathcal{B}_3$ e dal residuo punto di $\mathcal{E}$ non contenuto in esse e la partizione di $\mathcal{E}$ formata da tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ di cardinalità 1 sia anch'essa in $\mathcal{F}$. È facile verificare che $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una $(0, 3, 5)$-quadrica. Inoltre, poiché non esistono piani inversivi di cardinalità 7, tale struttura non è derivabile da alcun ovoide proiettivo né da alcun piano inversivo ovoidale o non.

Esistono anche $(0, n, s)$-quadriche tali che l'insieme degli 1-cerchi è vuoto. Si consideri, infatti, un qualsiasi insieme $\mathcal{E}$ di cardinalità 9 e si denoti con $\mathcal{B}$ la famiglia di tutte le terne non ordinate di punti di $\mathcal{E}$. Se

$\mathcal{F}$ denota la famiglia delle partizioni di $\mathcal{E}$ costituite da tre terne disgiunte di $\mathcal{F}$, allora la coppia $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è un esempio di (0,3,7)-quadrica con $\mathcal{B}_1 = \emptyset$.

Scopo principale di questo paragrafo è quello di provare i seguenti risultati.

TEOREMA 4.1. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una Θ_n, allora $(\mathcal{E}, \mathcal{B}_n)$ è un piano di Möbius di ordine $q = n - 1$.*

LEMMA. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una Θ_n, allora ogni partizione di $\mathcal{F}$ contiene esattamente due 1-cerchi e ad ogni n-cerchio γ resta associata una permutazione involutoria $I(\gamma)$ dei punti di $\mathcal{E}$ che ha come punti uniti tutti e soli i punti di γ.*

Denoteremo, d'ora in avanti, con Γ_n la famiglia di tutte le permutazioni involutorie $I(\gamma)$ di cui al precedente lemma.

È ben noto che, se q è pari, tutti i piani di Möbius di ordine q sono ovoidali e che non si conoscono ancora piani inversivi non ovoidali di ordine q dispari (cfr [3], p. 254). Ricordiamo, infine, che (cfr. [1]), se q è dispari, ogni ovoide proiettivo di $PG(3, q)$ è l'insieme dei punti di una quadrica ellittica dello stesso $PG(3, q)$, mentre se q è pari sono noti esempi di ovoidi proiettivi di $PG(3, q)$ che non sono quadriche (cfr., ad es., [14]).

TEOREMA 4.2. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una Θ_n, con $q = n - 1$ pari, allora $q = 2^h$ per un opportuno intero $h \geq 2$ e l'insieme $\mathcal{E}$ è un ovoide proiettivo di $PG(3, q)$.*

TEOREMA 4.3. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una Θ_n, con $q = n - 1$ dispari, tale che per ogni coppia di punti distinti di $\mathcal{E}$ ogni involuzione di Γ_n che li scambia è permutabile con ogni involuzione di Γ_n che li fissa, allora $\mathcal{E}$ è un ovoide proiettivo (i.e. una quadrica ellittica) di $PG(3, q)$.*

Proviamo innanzitutto il Teorema 4.1.

In virtù della (3.1) e della (2.2), è sufficiente dimostrare che nella (3.6) si ha che $\alpha = 1$. Ma ciò è immediata conseguenza delle uguaglianze $m = 0$ ed $s = n$.

LEMMA 4.2. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una Θ_n, allora ogni punto $X \in \mathcal{E}$ è tale che $\{X\} \in \mathcal{B}_1$;*

DIM. Osserviamo, innanzitutto, che, in virtù del Teorema 4.1, $v = q^2+1$ e ogni punto di $\mathcal{E}$ è incidente con $q(q+1)$ n-cerchi. In virtù di (3.7), ogni punto appartiene ad un numero costante ∂ di cerchi. Pertanto, o $\partial = q(q+1)$ o $\partial = q(q+1)+1$ a seconda che $\{X\}$ non sia o sia un 1-cerchio. È chiaro che, sempre per (3.7), o ogni $\{X\}$ è un 1-cerchio, al variare di X in $\mathcal{E}$, oppure non esistono 1-cerchi in $\mathcal{E}$. Se nessun $\{X\}$ è un 1-cerchio, allora ogni partizione $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ contiene solo n-cerchi e $v = q^2+1$ è divisibile per $q+1$, il che è assurdo. Infatti, poiché $q^2-1 = (q+1)(q-1)$, allora $(q^2+1)/(q+1) = [(q-1)(q+1)+2]/(q+1) = q-1+[2/(q+1)]$ e poiché $q \geq 2$ l'ultimo addendo non è un intero.

Dunque, ogni punto di $\mathcal{E}$ è anche un 1-cerchio.

Proviamo ora che ogni Θ_n è un *ovoide generalizzato* nel senso definito in [4]. Infatti, in virtù della (3.1) e della (A.2) basta provare che vale la seguente uguaglianza: $|\mathcal{B}(X)| = |\mathcal{F}_{\{X\}}| + n$. A tal fine, si osservi che per (3.7), $|\mathcal{B}(X)| = \partial$ e, per (3.10), $|\mathcal{F}_{\{X\}}| = \partial - s = \partial - n$. Pertanto Θ_n è un ovoide generalizzato ed i Teoremi ed il Lemma sopra citati sono una immediata conseguenza dei risultati già dimostrati in [4].

5 – Le (1,n,n-1)-quadriche ed i piani di Laguerre

In questo paragrafo studieremo quelle particolari (m,n,s)-quadriche $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ per le quali $m = 1$ ed $s = n-1$. Per brevità, d'ora in avanti, denoteremo tali strutture con L_n.

Osserviamo innanzitutto che porre $m = 1$ non implica necessariamente che una (m,n,s)-quadrica risulti una L_n. Un esempio di ciò è stato già dato alla (c) del paragrafo 3 dove si è mostrata l'esistenza di una (1,4,2)-quadrica.

La seguente struttura di incidenza è, invece, un esempio di (1,3,3)-quadrica. Sia $\mathcal{E}\colon = \{X_1, X_2, X_3, Y_1, , Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$, con $|\mathcal{E}| = 9$, e sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutte le terne di punti di $\mathcal{E}$ del tipo $\{X_i, Y_j, Z_k\}$, $i,j,k = 1,2,3$. Sia, infine, $\mathcal{F}$ la famiglia delle partizioni di $\mathcal{E}$ ognuna delle quali è costituita da tre terne disgiunte di $\mathcal{B}$. È facile verificare che $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ è una (1,3,3)-quadrica.

In accordo con la terminologia adottata in [12], pag. 330, sui piani di Laguerre, sui piani di Laguerre ovoidali e sui piani di Laguerre classici, dimostreremo in questo paragrafo i seguenti risultati:

Teorema 5.1. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una L_n, allora esiste una partizione $\mathcal{L}$ di $\mathcal{E}$ tale che la struttura di incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$, dove con I si indica la naturale relazione d'incidenza, è un piano di Laguerre.*

Una L_n si dice *regolare* se soddisfa le due seguenti condizioni:

(I) Per ogni terna di coppie (X_i, γ_i), con $X_i \in \mathcal{E}$, $X_i \in \gamma_i$, $X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1$, $i = 1, 2, 3$, tali che almeno due dei punti X_i sono indipendenti e nessun cerchio tangente a γ_i in X_i è tangente anche a γ_j in X_j per $i \neq j$, esiste un punto $Y \in \mathcal{E} \setminus \{X_1, X_2, X_3\}$ tale che i cerchi β_i, $i = 1, 2, 3$, dove β_i è l'unico cerchio per Y tangente in X_i a γ_i, sono a due a due tangenti in Y.

(II) Per ogni coppia $(X_1, \gamma_1), (X_2, \gamma_2)$, con X_1 ed X_2 indipendenti e tali che nessun cerchio è tangente sia a γ_1 in X_1 che a γ_2 in X_2, e tale che fissato un qualsiasi punto Y, indipendente sia con X_1 che con X_2, e denotata con $\partial(Y)$ la famiglia dei punti di $\mathcal{E}$ dipendenti con Y, esiste in $\partial(Y)$ un punto Z tale che i cerchi β_1 e β_2, dove β_i è l'unico cerchio per Z tangente a γ_i in $X_i (i = 1, 2)$, sono tangenti tra loro.

Teorema 5.2. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una L_n regolare, con n dispari, allora esiste una partizione $\mathcal{L}$ di $\mathcal{E}$ tale che la struttura di incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$, dove con I si indica la naturale relazione d'incidenza, è un piano di Laguerre classico.*

Corollario. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una L_n regolare con n dispari, allora $\mathcal{E}$ coincide con l'insieme dei punti di un cono quadrico di $PG(3, q)$, con $q = n - 1$, privato del suo vertice ed ogni cerchio di $\mathcal{B}$ coincide con l'insieme intersezione di un opportuno piano di $PG(3, q)$, non passante per il vertice del cono, ed $\mathcal{E}$.*

Per dimostrare il Teorema 1, osserviamo che se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una L_n, cioè se $s = n - 1$ e $q = s$, dalla (3.6) si ricava che vale la seguente proprietà:

(L.1) Per ogni cerchio γ, per ogni punto $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma$ e per ogni $X \in \gamma(Y)$ esiste esattamente un cerchio tangente a γ in X e contenente Y.

Ricordiamo inoltre che la (A.1) ci assicura che in L_n vale la seguente proprietà:

(L.2) Per ogni terna di punti di $\mathcal{E}$ a due a due indipendenti passa uno ed un solo cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$.

La (2.2) e l'osservazione fatta subito dopo la (3.2) ci permettono, infine, di affermare che in $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ vale anche la seguente proprietà:

(L.3) esiste un punto $X \in \mathcal{E}$ ed un cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ non contenente X. Inoltre, ogni cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ contiene almeno tre punti.

Essendo $m = 1$ e $q = s = n - 1$, e quindi $\mathcal{B}_1 = \emptyset$, dalla (3.12) si ricava:

(5.3) $v = |\mathcal{E}| = n(n-1) = q(q+1)$.

D'altro canto, la (3.13) ci assicura che vale la seguente proprietà:

(5.4) ogni partizione $\mathcal{P}$ di $\mathcal{F}$ contiene esattamente $q = n - 1$ cerchi.

Sia, dunque, $\mathcal{P}$ una fissata partizione di $\mathcal{F}$. Se $X \in \mathcal{E}$, denotiamo con $r(X)$ la famiglia di tutti i punti di $\mathcal{E}$ dipendenti con X, con l'aggiunta dello stesso punto X. Poiché P è una partizione di $\mathcal{E}$ e, per (A.3), in ogni cerchio $\gamma \in \mathcal{P}$ esiste un unico punto, X_γ, dipendente con X, dalla (5.2) discende che:

(5.5) Per ogni $X \in \mathcal{E}$, $r(X)$ ha cardinalità $q = n - 1$.

Possiamo, inoltre, provare che vale la

(5.6) Siano X e Y due punti distinti di $\mathcal{E}$ tali che $Y \notin r(X)$. Allora, $r(X) \cap r(Y) = \emptyset$.

Infatti, poiché Y non è dipendente con X, esiste un cerchio γ che contiene sia X che Y. Se Z fosse un punto di $r(X) \cap r(Y)$, allora $Z \notin \gamma$ ed in γ esisterebbero due punti distinti, X e Y, dipendenti con Z, contro l'ipotesi fatta che vuole $m = 1$.

Dalle (5.3) e (5.6), si deduce che $\mathcal{E}$ risulta ripartito in $q+1$ sottoinsiemi del tipo $r(X)$ a due a due disgiunti. Denotiamo con $\mathcal{L}$ tale partizione. Dalla stessa definizione di $r(X)$ e dalla (A.3), discende che:

(L.4) Per ogni cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ e per ogni $r(X) \in \mathcal{L}$, si ha che $|r(X) \cap \gamma| = 1$.

Poiché in $(\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$ valgono (L.1) - (L.4), tale struttura di incidenza è un piano di Laguerre (cfr. [12], pag. 330) di ordine $q = n - 1$ ed il Teorema 1 è provato.

Per dimostrare il Teorema 5.2, si osservi innanzitutto che, fissato un punto $X \in \mathcal{E}$ ed un cerchio γ contenente X, poichè (per il precedente Teorema 5.1) $L_n \equiv (\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$ è un piano di Laguerre, l'insieme $\mathcal{E} \setminus \{r(X)\}$ si ripartisce in una famiglia di n sottoinsiemi ognuno dei quali è contenuto in un cerchio tangente a tutti gli altri in X stesso; per dimostrare ciò basta applicare ripetutamente (5.3) e (L.1). Se γ' è un cerchio tangente a γ in X e γ'' è un cerchio anch'esso tangente a γ in X allora anche γ'' è tangente a γ' nello stesso X. Infatti, se $X, Y \in \gamma' \cap \gamma''$, con $X \neq Y$, allora per Y passano due cerchi distinti, γ' e γ'', tangenti entrambi a γ in X il che è assurdo per (L.1). Tale famiglia di cerchi in unione con il punto X sarà anche detta T-fascio di centro X e denotata con $T(X)$. Pertanto, il fascio $T(X)$ è un insieme, massimale in $\mathcal{B}$, di cerchi a due a due tangenti in X. Dalla (i) discende pertanto che, per qualsiasi terna di T-fasci $T(X_1), T(X_2), T(X_3)$, i cui centri non appartengono ad uno stesso generatore $r(X) \in \mathcal{L}$, esiste un T-fascio $T(X)$ avente intersezione non vuota con $T(X_i)$, $i = 1, 2, 3$. Inoltre, dalla (ii) discende che per ogni $r(X) \in \mathcal{L}$ e per ogni coppia di fasci $T(X_1)$, $T(X_2)$ tali che $X_i \notin r(X)$, $i = 1, 2$, e X_1 indipendente con X_2, esiste un T-fascio $T(Y)$ avente intersezione non vuota con $r(X)$, $T(X_1)$ e $T(X_2)$. Allora il nostro Teorema è una conseguenza di un recente risultato di J.A. Thas (cfr [12], pag. 340), ottenuto mediante l'applicazione della teoria dei Quadrangoli Generalizzati.

6 – Le $(2, n, n-2)$-quadriche ed i piani di Minkowski

In questo paragrafo studieremo le (m, n, s)-quadriche $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ per le quali valgano le seguenti uguaglianze: $m = 2$, $s = n - 2$. D'ora in avanti, per brevità, denoteremo tali strutture d'incidenza con M_n.

In virtù di (A.3) e del fatto che $m = 2$, fissato un qualsiasi cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$, si può definire almeno una applicazione

$$\varphi(\gamma) : \mathcal{E} \setminus \gamma \to \gamma \times \gamma$$

tale che ad ogni punto X del dominio faccia corrispondere una coppia ordinata $(X_{1\gamma}, X_{2\gamma})$ di punti di γ dipendenti con X stesso.

Allora, fissate una qualsiasi partizione $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ ed una qualsiasi famiglia $\Psi = \{\varphi(\beta) | \beta \in \mathcal{P}\}$ di applicazioni, denoteremo con $r_i(\Psi)(X)$, [o, se il contesto lo permetterà, semplicemente con $r_i(X)$] l'insieme $\{X_{i\beta} | \beta \in \mathcal{P}, X \notin \beta\} \cup \{X\}$, $i = 1, 2$, dove $(X_{1\beta}, X_{2\beta}) = \varphi(\beta)(X)$.

Una M_n, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, si dice *regolare* se ogni $\varphi(\gamma)$ è iniettiva ($\gamma \in \mathcal{B}$) e se, rispetto ad almeno una partizione $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$, esiste una famiglia $\Psi = \{\varphi(\gamma) | \gamma \in \mathcal{P}\}$ tale che $r_i(\Psi)(X) = r_i(\Psi)(X_{i\partial})$ per ogni $\partial \in \mathcal{P}$.

Scopo principale di questo paragrafo è quello di dimostrare i seguenti risultati:

TEOREMA 6.1. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una L_n regolare, allora esiste in $\mathcal{E}$ una famiglia $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ di sottoinsiemi tale che la struttura d'incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, |)$, dove con $|$ si indica la naturale relazione d'incidenza, è un piano di Minkowski di ordine $q = n - 1$.*

Dal Teorema 6.1 e dal fondamentale Teorema di W. HEISE [5] e N. PERCSY [10], segue immediatamente che vale il seguente

TEOREMA 6.2. *Se $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ è una M_n regolare con $q = n - 1$ pari, allora $(\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$ è un piano di Minkowski classico ed $\mathcal{E}$ è l'insieme dei punti di una quadrica iperbolica di $PG(3, q)$.*

Data una M_n regolare e fissato un qualsiasi cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ ed un qualsiasi punto $X \in \mathcal{E} \setminus \gamma$, se esiste un punto $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma$ tale che, con riferimento ad una particolare $\Psi, X_{1\gamma} = Y_{2\gamma}$ e $X_{2\gamma} = Y_{1\gamma}$, allora diremo che X ed Y sono *opposti* rispetto a γ. Se X ed Y sono opposti rispetto a γ allora essi sono indipendenti. Infatti, se $X \| Y$, allora si avrebbe che o $X_{1\gamma} = Y_{1\gamma}$ o $X_{2\gamma} = Y_{1\gamma}$ e quindi che $X_{1\gamma} = X_{2\gamma}$ il che è assurdo.

TEOREMA 6.3. *Sia $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ una M_n regolare e tale che, per ogni coppia di punti X, Y di $\mathcal{E}$ tra loro opposti rispetto ad un fissato cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ e per ogni cerchio ∂ contenente sia X che Y si verifichi che:*

se $Z \in \partial$, allora esiste un punto $U \in \partial$ opposto a Z rispetto a γ.

Allora la struttura d'incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$ è un piano di Minkowski di ordine $q = n - 1$ ed $\mathcal{E}$ è l'insieme dei punti di una quadrica iperbolica di $PG(3, q)$.

Dimostriamo, innanzitutto il Teorema 6.1. Dalla (A.1) segue che:

(M.1) per ogni terna di punti a due a due indipendenti passa esattamente un cerchio di $\mathcal{B}$.

Dalla (3.6) e dal fatto che $m = 2$ ed $s = n - 2$, si ricava che:

(M.2) per ogni cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$, per ogni punto $Y \in \mathcal{E} \setminus \gamma$ e per ogni punto $X \in \gamma(Y)$ esiste un unico cerchio $\beta \in \mathcal{B}$ contenente Y e tangente a γ in X.

Dalla (2.2) e dal fatto che $n \geq 3$, discende che:

(M.3) esiste un cerchio in $\mathcal{B}$ contenente almeno tre punti.

Dalla (3.12) si ricava inoltre che:

$$|\mathcal{E}| = v = n^2 = q^2 + 2q + 1. \tag{6.4}$$

Poiché $m = 2$, abbiamo già provato che deve essere $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ e quindi, per la (3.13), si può concludere che:

(6.5) ogni partizione di $\mathcal{F}$ contiene esattamente $n = q + 1$ cerchi.

Siamo ora in grado di provare che:

(6.6) per ogni $\gamma \in \mathcal{B}$, l'applicazione $\varphi(\gamma)$ è biiettiva.

Infatti, essendo $|\mathcal{E}| = n^2$ e $|\gamma| = n$, si ha anche che $|\gamma \times \gamma| = n(n-1)$ e $|\mathcal{E} \setminus \gamma| = n^2 - n = n(n-1)$. Pertanto, dalla iniettività della $\varphi(\gamma)$, discende necessariamente la sua suriettività.

Sia $\mathcal{P}$ una fissata partizione di F ed X un punto di $\mathcal{E}$. Dalla definizione di $r_i(X)$ e dalle (6.5) e (6.6), si ricava che:

$$|r_i(X)| = n. \tag{6.7}$$

Osserviamo, inoltre, che se X ed Y sono due punti distinti e dipendenti, allora esiste un cerchio $\gamma \in \mathcal{P}$ tale che $Y \in \gamma$ e quindi, o $Y = X_{1\gamma}$ o $Y = X_{2\gamma}$; pertanto $Y \in r(X): = r_1(X) \cup r_2(X)$. Possiamo allora affermare che:

(6.8) $r(X)$ è l'insieme costituito da X stesso e da tutti e soli i punti di $\mathcal{E}$ dipendenti con X e $|r(X)| = 2n - 1 = 2q + 1$.

Proviamo ora che:

(6.9) se $Y \in r_i(X)$ e $Y \neq X$, allora $r_i(Y) \equiv r_i(X)$.

Infatti, se $Y \in r_i(X)$, allora esiste un cerchio $\beta \in \mathcal{P}$ tale che $Y = X_{i\beta}$. Quindi, per la condizione di regolarità, $r_i(X) \equiv r_i(X_{i\beta}) \equiv r_i(Y)$.

(6.10) Se $Y \notin r(X)$, allora $r_i(Y) \cap r_i(X) = \emptyset$.

Infatti, se $z \in r_i(Y) \cap r_i(X)$, allora esiste un cerchio $\beta \in \mathcal{P}$ tale che $Z = X_{i\beta} = Y_{i\beta}$. Pertanto, dalla regolarità, segue che
$r_i(X) = r_i(X_{i\beta}) = r_i(Y_{i\beta}) = r_i(Y)$, vale a dire che $Y \in r_i(X)$, contro l'ipotesi.

(6.11) Se $Y \notin r(X)$, allora $|r_i(Y) \cap r_j(X)| = 1$, per $i \neq j$ e $i, j = 1, 2$.

Infatti, sia ∂ un cerchio contenente sia X che Y, la cui esistenza è assicurata dal fatto che $Y \notin r(X)$. Siano, inoltre, A e B due punti distinti di $r_i(Y) \cap r_j(X)$. Allora A è dipendente sia con X che con Y e poiché $X \neq Y$, si avrà che $\varphi(\partial)(A) = (X,Y)$ oppure $\varphi(\partial)(A) = (Y,X)$. Analogamente, si avrà che $\varphi(\partial)(B) = (X,Y)$ oppure che $\varphi(\partial)(B) = (Y,X)$; ed, in ogni caso, che $\varphi(\partial)(A) = \varphi(\partial)(B)$. Ma ciò è assurdo in quanto $A \neq B$ e $\varphi(\partial)$ è iniettiva. D'altro canto, grazie alla (6.6), esistono un punto $Z \in \mathcal{E} \setminus \partial$ tale che $\varphi(\partial)(Z) = (X,Y)$ ed un punto $U \in \mathcal{E} \setminus \partial$ tale che $\varphi(\partial)(U) = (Y,X)$ e quindi o $Z \in r_i(Y) \cap r_j(X)$ oppure $U \in r_i(Y) \cap r_j(X)$.

In virtù della (6.10), fissata una partizione $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$, restano definite due partizioni $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$ di $\mathcal{E}$ ognuna delle quali è formata dagli n sottoinsiemi (a due a due disgiunti) $r_i(X^{(1)}), r_i(X^{(2)}), \dots, r_i(X^{(n)})$, $i = 1,2$, dove $r_i(X^{(1)})$ è definita a partire da un qualsiasi punto X di $\mathcal{E}$ ed $r_i(X^{(h)})$, con $h = 2, \dots, n$, è definita a partire da un qualsiasi punto $X^{(h)}$ di

$$\mathcal{E} \setminus \bigcup_{k=1}^{h-1} r_i(X^{(k)}).$$

Denotata con $\mathcal{L}$ l'unione di $\mathcal{L}_1$ ed $\mathcal{L}_2$, i cui elementi saranno anche detti *generatori* di $\mathcal{E}$, e considerata la struttura di incidenza $M = (\mathcal{E}, \mathcal{L} \cup \mathcal{B}, I)$ di cui all'enunciato, grazie alle (M.1),(M.2) ed (M.3), per provare che M è un piano di Minkowski è sufficiente provare che ogni generatore interseca ogni cerchio in esattamente un punto. Sia, dunque, $\gamma \in \mathcal{B}$ ed $r_i(X^{(h)}) \in \mathcal{L}$, $i = 1,2$ ed $h = 1,2,\dots,n$. Se $|\gamma \cap r_i(X^{(h)})| \geq 2$, allora esisterebbero in $r_i(X^{(h)})$ almeno due punti indipendenti, in quanto appartenenti al cerchio γ, contro l'ipotesi che vuole tutti i punti di $r_i(X^{(h)})$ a due a due dipendenti. Pertanto, $|\gamma \cap r_i(X^{(h)})| \leq 1$. D'altro canto, se γ è un qualsiasi cerchio di $\mathcal{B}$, comunque si prenda un generatore $r_i(X^{(h)})$, esistono in γ due punti distinti, A e B, dipendenti con $X^{(h)}$. Se A, $B \in r_i(X^{(h)})$, allora esisteranno due cerchi $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ tali che $X^{(h)}_{1,\alpha} = A$ e $X^{(h)}_{1,\beta} = B$ e quindi esisterà un cerchio ∂ che interseca un generatore in almeno due punti, il che è già stato dimostrato essere assurdo e, di conseguenza, A e B devono appartenere necessariamente ad $r_1(X^{(h)})$ e $r_2(X^{(h)})$, rispettivamente. Il Teorema è, pertanto, provato.

Per dimostrare il Teorema 6.3, in base a (6.6) definiamo una famiglia Γ di permutazioni involutorie di $\mathcal{E}$ nel modo seguente:

per ogni $\gamma \in \mathcal{B}$, $J_\gamma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tale che $J_\gamma(X) = X$ se $X \in \gamma$ e $J_\gamma(X) = X'$, con $X' = \varphi(\gamma)^{-1}(X_{2\gamma}, X_{1\gamma})$ se $X \notin \gamma$.

La famiglia Γ gode allora delle seguenti proprietà:

(Γ.1) ogni involuzione J_γ possiede almeno un punto fisso e trasforma ogni punto non fissato X in un punto X' indipendente con X.

Infatti, se fosse $X \| X'$, allora si può provare che $r_i(X) = r_i(X')$ e, quindi, $X_{i\gamma} = X'_{i\gamma} = X_{j\gamma}(i \neq j)$ contro l'ipotesi $m = 2$.

(Γ.2) Se J_γ fissa un punto X, allora J_γ scambia tra loro i due generatori passanti per X.

Infatti, se $J_\gamma(X) = X$, allora $X \in \gamma$. Se $Y \in r_1(X)$ e $Y \neq X$, allora $J_\gamma(Y) = Y'$ dove $\varphi(\gamma)(Y') = (Y_{2\gamma}, X)$ e quindi $Y' \in r_2(X)$.

(Γ.3) Ogni terna di punti di $\mathcal{E}$, a due a due indipendenti, è fissata da un'unica involuzione di Γ.

Questo è una semplice conseguenza della (M.1) e della definizione di Γ.

(Γ.4) Per ogni punto $X \in \mathcal{E}$ e per ogni coppia di punti indipendenti $Y, Z \in \mathcal{E}$ entrambi indipendenti con X, esiste un'unica involuzione che fissa X e scambia Y con Z.

Infatti, si considerino i due punti $A :=r_1(Z) \cap r_2(Y)$ e $B :=r_2(Z) \cap r_1(Y)$. Se una involuzione J_γ fissa X, allora γ deve contenere X stesso e se J_γ scambia Y con Z allora γ deve contenere sia A che B. Poiché si può dimostrare che A, B e X sono a due a due indipendenti, per la (Γ.3), l'asserto è provato.

(Γ.5) Ogni involuzione J_α che scambia tra loro due punti indipendenti di $\mathcal{E}$ commuta con ogni involuzione J_β che fissa entrambi tali punti.

Infatti, siano X e Y due punti indipendenti e J_α scambi X con Y. Allora α è un cerchio che contiene i punti A e B definiti in relazione ad X e Y come nelle dimostrazione di (Γ.4). Si osservi che ogni involuzione J_β che fissa sia X che Y è relativa ad un cerchio che contiene sia X che Y e quindi i punti fissati da tale involuzione sono tutti e soli i punti di β. Allora, in virtù del Teorema 6.3, per ogni $Z \in \beta$, $(J_\alpha \circ J_\beta)(Z) = J_\alpha(Z) = Z' \in \beta$, mentre, poiché $Z' \in \beta$, $(J_\beta \circ J_\alpha)(Z) = J_\beta(Z') = Z'$. L'asserto è così completamente provato.

Dalle osservazioni fatte nella parte conclusiva della dimostrazione di (3.7) segue che se $m = 2$, allora $|\mathcal{E}| \geq 7$ e quindi la struttura di incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \Gamma)$ è una *abstract ruled quadric* nel senso di Lo Re-Olanda (cfr. [9], pag.141), e quindi, per il Teorema 1.5 dello stesso articolo [9], il Teorema è completamente provato.

7 – Conclusione

Molte sono ancora le ricerche che si possono condurre sulla teoria delle (m, n, s)-quadriche introdotta in questa nota.

In un successivo articolo verranno approfonditi gli studi di alcuni dei più importanti tipi di (m, n, s)-quadriche ed in particolare verranno messe in evidenza alcune limitazioni di carattere aritmetico relative all'esistenza di tali strutture. Il problema che per ora sembra più interessante è quello relativo all'esistenza di $(2, n, s)$-quadriche con $s \neq n - 2$.

A tal proposito è importante osservare che da un piano a cerchi (Möbius, Laguerre, Minkowski) non deriva necessariamente una (m, n, s)-quadrica. Infatti, mentre tutti i piani di Möbius e di Laguerre finiti sono ovoidali (cfr. [12]), e quindi generano una $(0, n, n)$-quadrica o una $(1, n, n-1)$-quadrica rispettivamente, è stata provata l'esistenza di piani di Minkowski finiti tali che dati due loro cerchi disgiunti non esiste alcuna partizione in cerchi (o flock) dell'insieme dei punti che contiene contemporaneamente tali cerchi (cfr. A. Bonisoli, Insiemi di permutazioni e (B)-geometrie, Tesi di dottorato 1988). Perciò, da tali piani di Minkowski non può derivare in modo naturale alcuna (m, n, s)- quadrica.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Barlotti: *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, Boll. Un. Mat. Ital. 10(1955), 498-506.

[2] F. Buekenhout: *Characterizations of semi quadrics. A survery*, Atti Convegni Lincei 17(1976), 393-421.

[3] P. Dembowski: *Finite geometries*, Springer Berlin, 1968.

[4] G. Faina: *Ovoidi generalizzati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 46(1988), 247-257.

[5] W. Heise: *Minkowski-Ebenen gerader Ordnung*, J. Geom. 5(1974), 83.

[6] J.W.P. Hirschfeld: *Projective Geometries over Finite Fields*, Clarendon Press, Oxford 1979.

[7] J.W.P. Hirschfeld: *Finite Projective Spaces of Three Dimensions*, Clarendon Press, Oxford 1985.

[8] G. Korchmaros - D. Olanda: *On egglike inversive planes*, J. of Geom. 21 (1983), 53-58.

[9] P.M. Lo Re - D. Olanda: *On Embeddable Minkowski Planes*, J. Geom. 21 (1983), 138-145.

[10] N. Percsy: *Announcement at Finite Geometries Session*, Oberwolfach 1974.

[11] G. Tallini: *Ovoids and caps in planar spaces*, Annals Discrete Math. 30(1986), 347-354.

[12] J.A. Thas: *Circles Geometries and Generalized Quadrangles*, Finite Geometries, L.N. Pure Appl. Math. 103(Baker and Batten ed.s), Dekker, New York 1985, 327-352.

[13] J. Tits: *Ovoïdes a translation*, Rend. Mat. Appl. 21(1962), 37-59.

[14] J. Tits: *Ovoïdes et groupes de Suzuki*, Arch. Math. 13(1962), 187-198.

Lavoro pervenuto alla redazione il 5 novembre 1991
ed accettato per la pubblicazione il 5 marzo 1992
su parere favorevole di G. Tallini e di G. Korchmaros

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

G. Faina - Dipartimento di Matematica - Università - Via Vanvitelli, 1 - 06100 Perugia.