Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 749-768

Dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema singolare di Goursat

B. FIRMANI

RIASSUNTO – *Si considera il problema di Goursat per l'equazione* $u_{xy} = f(x, y, u)$ *quando le due curve* Γ_1 *e* Γ_2*, sulle quali sono assegnati i valori della* u*, sono tangenti nel loro punto in comune. Si dimostra la dipendenza continua della soluzione* u *dai dati, che sono la funzione* f*, le curve* Γ_1 *e* Γ_2 *ed i valori assegnati alla funzione* u *su* Γ_1 *e* Γ_2*. In particolare si calcolano esplicitamente tutte le costanti che compaiono nelle stime che garantiscono la dipendenza continua dai dati. La dipendenza continua viene stabilita in opportuni spazi di Banach.*

ABSTRACT – *In this paper we consider the Goursat's problem for the equation when the two curves* Γ_1 *and* Γ_2*, on which the function is prescribed, are tangent at their common point. We prove the continuous dependence of the solution* u *on the data, namely on the function* $f(x, y, u)$*, on the curves* Γ_1 *and* Γ_2 *and on the values of* u *restricted to* Γ_1 *and* Γ_2*. In particular, we explicitly calculate the constants appearing in the estimates which guarantee the continuous dependence. A basic tool in the proof is provided by the introduction of some suitable Banach spaces.*

KEY WORDS – *Hyperbolic equations - Goursat problem - Continuous dependence on the data.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 35L70 - 35B30 - 35L15 - 35L20

1 – Introduzione

Il problema di Goursat considerato in questo lavoro consiste nel determinare la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$u_{xy} = f(x, y, u) \tag{1.1}$$

la quale, lungo le curve regolari Γ_1 e Γ_2 di equazione, rispettivamente, $y = \alpha(x)$ ($x \in [0, \sigma']$) e $x = \beta(y)$ ($y \in [0, \sigma'']$) ed aventi in comune solo l'origine degli assi, assuma valori assegnati. Risulti, cioè

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} u(x, \alpha(x)) = \varphi_1(x) & 0 \leq x \leq \sigma' \\ u(\beta(y), y) = \varphi_2(y) & 0 \leq y \leq \sigma'' \end{cases}$$

Quando le tangenti alle curve Γ_1 e Γ_2 nel punto in comune sono coincidenti, e questo è il problema qui trattato, si ha uno dei cosiddetti "casi singolari".

In un recente lavoro, [3], è stata studiata, nel caso non singolare, la dipendenza continua dai dati della soluzione dello stesso problema; nel presente lavoro la dipendenza continua dai dati verrà, invece, considerata nel caso singolare. Per questo scopo verranno introdotti spazi di Banach che "evidenzino" il contatto tra le curve Γ_1 e Γ_2 ed opportune condizioni da imporre alle funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(y)$. Per quanto riguarda il significato di tutti i simboli che non verranno qui definiti si rimanda al lavoro [3].

2 – Spazio $\mathcal{D}_q^1(I)$

Sia

$$\text{(2.1)} \qquad \tau(x) = \beta(\alpha(x)).$$

Per le ipotesi di regolarità assunte sulle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ la funzione $\tau(x)$ appartiene alla classe $C^1[0, \sigma']$ mentre per l'ipotesi di contatto tra le curve Γ_1 e Γ_2 si ha

$$\text{(2.2)} \qquad \tau'(0) = \alpha'(0)\beta'(0) = 1.$$

Nel lavoro [2] è dimostrato che per ottenere un teorema di esistenza e di unicità per la soluzione del problema (1.1) (1.2) è sufficiente supporre, oltre ad opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y, s)$ precisate anche in [3], l'esistenza di un numero q tale che (cfr. [2], formula (55)):

$$\text{(2.3)} \qquad 0 < \min \lim_{x \to 0} [1 - \tau'(x)] x^{-q}$$

e di un numero $r > 0$ tale che, posto

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(\alpha(x)) \tag{2.4}$$

risulti

$$\varphi'(x) = \mathcal{O}(x^{q+r}). \tag{2.5}$$

Dalla (2.3) si deduce che, in un opportuno intervallo $[0, \rho]$, risulta

$$[1 - \tau'(x)]x^{-q} > \lambda$$

da cui

$$1 - \lambda x^q > \tau'(x) \quad x \in (0, \rho] \tag{2.6}$$

e quindi, poiché risulta $\tau(0) = 0$, si ha

$$x - \frac{\lambda}{q+1}x^{1+q} > \tau(x) \quad x \in (0, \rho] \tag{2.7}$$

Sia $\gamma_{q,c}(x) = x/(1 + cx^q)^{1/q}$ la funzione introdotta in [1]. Come già dimostrato risulta $\gamma^k_{q,c}(x) = x/(1 + ckx^q)^{1/q}$ ed inoltre si ha

$$\gamma^k_{q,c}(x) \leq \frac{1}{c^{1/q}x^q}. \tag{2.8}$$

Sussiste il seguente

LEMMA 1. *Esistono due costanti $\vartheta > 0$ e $\Theta > 0$ ed un intervallo $[0, \rho] \subset [0, \sigma']$ tali che*

$$0 \leq \tau'(x) < \gamma'_{q,\vartheta}(x) \quad x \in (0, \rho] \tag{2.9}$$

$$\tau'(x) < \Theta \quad x \in [0, \sigma'] \tag{2.10}$$

$$0 \leq \tau(x) < \gamma_{q,\vartheta}(x) \quad x \in (0, \sigma'] \tag{2.11}$$

DIM. La (2.10) è immediata conseguenza della regolarità della funzione $\tau(x)$. Posto $\Psi(x) - \frac{\vartheta}{q}x^{1+q} - \gamma_{q,\vartheta}(x)$ si ha:

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = 0,\ \Psi''(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in [0, \sigma'].$$

Risulta pertanto

$$x - \frac{\vartheta}{q}x^{1+q} < \gamma_{q,\vartheta}(x) \quad \forall x \in (0, \sigma'] \tag{2.12}$$

$$1 - \vartheta\frac{1+q}{q}x^q < \gamma'_{q,\vartheta}(x) \quad \forall x \in (0, \sigma'] \tag{2.13}$$

Dalle (2.6) e (2.13) si ha immediatamente la (2.9). Dalle (2.7) e (2.12), tenuto presente che risulta $\lim_{c \to +\infty} \gamma_{q,c}(x) = x$, uniformemente in $[\rho, \sigma']$, si ha la (2.11).

Introduciamo ora lo spazio $\mathcal{D}^1_q(I)$.

Siano I l'intervallo $[0, \sigma']$ e q un numero positivo. Lo spazio $\mathcal{D}^1_q(I)$ è lo spazio di tutte le funzioni $h(x)$ tali che

(a) $h(x) \in C^1[0, \sigma']$, $\sup \frac{|h'(x) - h'(0)|}{x^q} < +\infty$

(b) la funzione $h^*(x) = \frac{h'(x) - h'(0)}{x^q}$ coincida, in $(0, \sigma']$, con una funzione continua in tutto $[0, \sigma']$[1].

Nello spazio $\mathcal{D}^1_q(I)$ si introduca la seguente norma:

$$\|h(x)\|_{1,q} = \|h(x)\|_1 + \|h^*(x)\|_0 \tag{2.14}$$

Mostriamo ora il seguente teorema.

TEOREMA I. *Lo spazio $\mathcal{D}^1_q(I)$ è completo.*

---

[1] Si osservi che $C^2(I) \subset \mathcal{D}^1_1(I)$. Appartengono a $\mathcal{D}^1_{n-1}$ (con $n > 2$) tutte le funzioni $h(x) \in C^n(I)$, con $h''(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0) = 0$.

DIM. Sia $\{t_n(x)\}$ una successione di Cauchy. Dalla disuguaglianza $\|t\|_{1,q} \geq \|t\|_1$ ne segue che la funzione $t(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x)$ appartiene alla classe $C^1[0,\sigma']$ e risulta $\lim_{n\to\infty} \|t(x)-t_n(x)\|_1 = 0$. Indicato con n_ε un indice tale da avere, per $m, n > n_\varepsilon$, $\|t_m(x) - t_n(x)\|_{1,q} < \varepsilon$, si ha che la funzione $t^*(x)$ è prolungabile, per continuità, in tutto $(0,\sigma']$ ed inoltre risulta:

$$|t^*(x) - t^*_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |t^*_m(x) - t^*_n(x)| \leq \sup_{m;n>n_\varepsilon} \|t^*_m(x) - t^*_n(x)\|_{1,q} \leq \varepsilon.$$

La tesi è così dimostrata.

Analogamente si definisce lo spazio $\mathcal{D}^1_q(J)$, se $J = [0,\sigma'']$, e se ne dimostra la completezza.

OSSERVAZIONE 1. Sia $h(x) \in \mathcal{D}^1_q(I)$, esiste allora una funzione $\bar{h}(x) \in C^0[0,\sigma'] \cap C^1(0,\sigma']$ tale che

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + x^{q+1}\bar{h}(x) \tag{2.15}$$

ed inoltre risulta:

$$\bar{h}(0) = \frac{1}{q+1}h^*(0), \quad \|\bar{h}(x)\|_0 \leq \frac{1}{q+1}\|h^*(x)\|_0 \tag{2.16}$$

Infatti posto, per $x \in (0,\sigma']$: $\bar{h}(x) = 1/(x^{q+1}) \int_0^x t^q h^*(t)dt$, risulta, per il teorema della media integrale, $\bar{h}(x) = 1/(q+1)h^*(t(x))$. Ne segue $\lim_{x\to 0} \bar{h}(x) = 1/(q+1)h^*(0)$. La restante parte della tesi è immediata.

Indicate con ϑ, Θ e q le costanti che compaiono nel lemma 1 sia c una costante maggiore di ϑ. Con $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_q[0,\sigma']$ indicheremo il sottoinsieme dello spazio $\mathcal{D}^1_q[0,\sigma']$ composto da tutte le funzioni $t(x)$ tali che

$$t'(0) = 1 \tag{2.17}$$

$$0 \leq t'(x) \leq \Theta \quad x \in [0,\sigma'] \tag{2.18}$$

$$t'(x) \leq \gamma'_{q,c}(x) \quad x \in [0,\rho] \tag{2.19}$$

$$0 \leq t(x) \leq \gamma_{q,c}(x) \quad x \in [0, \sigma']. \tag{2.20}$$

Dalle (2.2), (2.9), (2.10) e (2.11) segue ovviamente che $\tau(x) \in \mathcal{M}_q$. Mostriamo ora il seguente

LEMMA 2. *Esiste una costante $\delta > 0$ (dipendente da $\tau(x)$ e dalla classe $\mathcal{M}_q$ ed esplicitamente calcolabile) tale che se risulta*

$$\|\tau(x) - t(x)\|_{1,q} \leq \delta$$

con $t(x)$ non decrescente e soddisfacente la (2.17) allora $t(x) \in \mathcal{M}_q$.

DIM. Dalle (2.9), (2.10), e (2.11) e dalle (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) segue immediatamente

$$\|\tau(x) - t(x)\|_{1,q} \geq \|\gamma_{q,\vartheta}(x) - \gamma_{q,c}(x)\|_{1,q}$$

$$\geq \lim_{x \to 0} \frac{(\gamma'_{q,\vartheta}(x) - \gamma'_{q,c}(x))}{x^q} \geq (\vartheta - c)\frac{q+1}{q}$$

Si ha inoltre $\left\|\frac{(\gamma'_{q,\vartheta}(x) - \gamma'_{q,c}(x))}{x^q}\right\| \geq \lim_{x \to 0} \frac{(\gamma'_{q,\vartheta}(x) - \gamma'_{q,c}(x))}{x^q} \geq \vartheta - c$

Assunto, quindi,

$$\delta < \min\{\Theta - \|\tau'(x)\|_0, (\vartheta - c)\}$$

si ha:

$$t'(x) \leq \tau'(x) + \delta < \Theta$$

$$t'(x) \leq \tau'(x) + \delta x^q \leq \gamma'_{q,\vartheta}(x) + \delta x^q \leq \gamma'_{q,c}(x), \quad \text{per} \quad x \in [0, \rho]$$

$$t(x) \leq \int_0^x t'(\xi)d\xi \leq \int_0^x (\tau'(\xi) + \delta\xi^q)d\xi \leq \tau(x) + \frac{\delta}{q+1}x^{q+1} \leq$$

$$\leq \gamma_{q,\vartheta}(x) + \frac{\delta}{q+1}x^{q+1} \leq \gamma_{q,c}(x), \quad \text{per} \quad x \in [0, \sigma']$$

che è la tesi.

Sia $s > q$. Indichiamo con $\mathcal{N}_s = \mathcal{N}_s[0,\sigma']$ il sottospazio delle funzioni di $\mathcal{D}^1_q[0,\sigma']$ composto da tutte le funzioni $\eta(x)$ tali che:

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0. \tag{2.21}$$

dalla (2.5) segue ovviamente che $\eta(x) \in \mathcal{N}_s$ per $s = q + r$.

Sussistono i seguenti risultati.

LEMMA 3. *Se le funzioni $\tau(x)$ e $t(x)$ appartengono ad $\mathcal{M}_q$ allora le funzioni*

$$\tilde{\tau}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau^k(x))^{s+1}, \quad \tilde{t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (t^k(x))^{s+1} \tag{2.22}$$

appartengono alla classe $C^1[0,\sigma']$ e risulta

(2.23)

$$\|\tilde{\tau}(x)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(\tau^k(x))^{s+1}\|_1 < K_2, \quad \|\tilde{t}(x)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(t^k(x))^{s+1}\|_1 < K_2$$

con K_2 costante dipendente solo dalla famiglia $\mathcal{M}_q$ e da s ed esplicitamente calcolabile.

DIM. Sia m il numero intero tale che

$$\frac{1}{c\rho^q} \leq m < \frac{1}{c\rho^q} + 1 \tag{2.24}$$

Per $k \geq m$ risulta, dalle (2.20) e (2.8): $\tau^k(x) < \gamma^k_{q,c}(x) \leq \dfrac{1}{c^{1/q}k^{1/q}} \leq \rho$, dalla (2.19) si ha anche: $\tau'(\tau^k(x)) < \gamma'_{q,c}(x)$.

Si ha quindi, per $k = 0, \dots, m$:

(2.25)

$$\frac{d(\tau^k(x))^{s+1}}{dx} = (s+1)(\tau^k(x))^s \tau'(\tau^{k-1}(x)) \cdot \dots \cdot \tau'(\tau(x))\tau'(x) <$$

$$< (s+1)(\tau^k(x))^s \Theta^k < (s+1)(\gamma_{q,c}(x))^s \Theta^k < (s+1)\Theta^k.$$

e per $k > m$ si ottiene

$$\frac{d(\tau^k(x))^{s+1}}{dx} < (s+1)(\gamma_{q,c}(x))^s \Theta^m < \frac{s+1}{c^{s/q}} \Theta^m \frac{1}{k^{s/q}}$$

Ne segue: $\tilde{r}'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k(x)}{dx} \leq (s+1)\sum_{k=0}^{m} \Theta^k + \frac{s+1}{c^{s/q}}\Theta^m \frac{q}{s-q} m^{q-s}$.

Pertanto posto

$$K_2 = (1+\sigma')\Big[(s+1)\sum_{k=0}^{m} \Theta^k + \frac{s+1}{c^{s/q}}\theta^m \frac{q}{s-q} m^{q-s}\Big] \tag{2.27}$$

si ha la prima delle (2.23). Lo stesso risultato sussiste per la funzione $\tilde{t}(x)$ risultando soddisfatte le seguenti relazioni, analoghe alle (2.25) e (2.26):

$$\begin{aligned} &\frac{d(t^k(x))^{s+1}}{dx} < (s+1)\Theta^k \quad \text{per} \quad k = 0,\dots,m \\ &\frac{d(t^k(x))^{s+1}}{dx} < \frac{s+1}{c^{s/q}}\Theta^m \frac{1}{k^{s/q}} \quad \text{per} \quad k > m \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dalla totale convergenza delle serie (2.23) segue immediatamente l'appartenenza delle funzioni $\tilde{r}(x)$ e $\tilde{t}(x)$ alla classe $C^1[0,\sigma']$.

Corollario 1. *Dalla* (2.17) *segue che la costante Θ introdotta nella* (2.18) *è maggiore di uno. Dalla dimostrazione del precedente lemma si osserva subito che risulta, per ogni $t(x) \in \mathcal{M}_1$:*

$$\frac{dt^k(x)}{dx} < \Theta^m \quad per \quad k = 0.1\dots$$

ove m è dato dalla (2.24).

Lemma 4. *Siano $a_0,\dots,a_n$, $b_0,\dots,b_n$, numeri reali appartenenti all'intervallo $[0,\sigma]$ e sia s un numero positivo. Risulta:*

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k^s - b_k^s| \leq \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k|\Big)^s + s\sigma^{s-1}\sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k|$$

DIM. Sia $0 < s \leq 1$, si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k^s - b_k^s| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k|^s \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| \Big)^s$$

Se invece risulta $1 < s$, si ha, avendo indicato con c_k un opportuno numero appartenente all'intervallo di estremi a_k e b_k:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k^s - b_k^s| \leq s \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| c_k^{s-1} \leq s\sigma^{s-1} \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k|$$

LEMMA 5. *Si ha:*

$$\sum_{k=0}^{n} \|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s\|_0 \leq$$

$$\leq \begin{cases} (n+1)^s \Big(\sum_{k=0}^{n} \|\tau^k(x) - t^k(x)\|_0 \Big)^s & 0 < s < 1 \\ s(\sigma')^{s-1} \sum_{k=0}^{n} \|\tau^k(x) - t^k(x)\|_0 & 1 \leq s \end{cases}$$

DIM. Se $0 < s < 1$, risulta: $|\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s| \leq \tau^k(x) - t^k(x)|^s$.

Ne segue $\sum\limits_{k=0}^{n} \|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s\|_0 \leq \sum_{k=0}^{n}(|\tau^k(x) - t^k(x)|^s) \leq ((n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} \|\tau^k(x) - t^k(x)\|_0)^s$

Se $1 \leq s$, risulta: $|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s| \leq s(\max\{\tau^k(x), t^k(x)\}^s |\tau^k(x) - t^k(x)|$.

Ne segue $\sum\limits_{k=0}^{n} \|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s\|_0 \leq s(\max\{\tau^k(x), t^k(x)\}^s \sum\limits_{k=0}^{n} \| \tau^k(x) - t^k(x)\|_0$

LEMMA 6. *In corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $\mu = \mu(\varepsilon)$ (dipendente da $\tau(x)$ e da $\mathcal{M}_q$ ed esplicitamente calcolabile) tale che, se risulta:*

$$\|\tau(x) - t(x)\|_{1,q} \leq \mu, \tag{2.29}$$

si ha:

$$\|\tilde{\tau}(x) - \tilde{t}(x)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(\tau^k(x))^{s+1} - (t^k(x))^{s+1}\|_1 < \varepsilon. \tag{2.30}$$

DIM. Risulta:

$$|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s| \leq s(\sigma')^s |\tau^k(x) - t^k(x)| \tag{2.31}$$

$$|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s| \leq 2(\gamma_{q,c}^k(x))^s \leq 2\frac{1}{c^{s/q}k^{s/q}} \tag{2.32}$$

$$|(t^k(x))^s| \leq (\gamma_{q,c}^k(\sigma'))^s \leq \frac{1}{c^{s/q}k^{s/q}} \tag{2.33}$$

Ne segue, tenendo presente il corollario 1:

$$\frac{1}{s+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{d(\tau^k(x))^{s+1}}{dx} - \frac{d(t^k(x))^{s+1}}{dx}\right\| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\|(\tau^k(x))^s \frac{d\tau^k(x)^{s+1}}{dx} - (t^k(x))^s \frac{dt^k(x)}{dx}\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s\|_0 \left\|\frac{d\tau^k(x)}{dx}\right\|_0 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\|(\tau^k(x))^s\|_0 \left\|\frac{d\tau^k(x)}{dx} - \frac{dt^k(x)}{dx}\right\|_0 \leq$$

$$\leq \Theta^m \sum_{k=0}^{n}\|(\tau^k(x))^s - (t^k(x))^s\|_0 + (\sigma')^s \sum_{k=0}^{n}\left\|\frac{d\tau^k(x)}{dx} - \frac{dt^k(x)}{dx}\right\|_0 +$$

$$+ 4\Theta^m \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{c^{s/q}k^{s/q}}.$$

Fissato n tale che $4\Theta^m \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{c^{s/q}k^{s/q}} < \varepsilon$, la tesi segue dal precedente lemma 5 e dal teorema I del lavoro [3].

Assegnate le funzioni $\varphi(x), \eta(x) \in \mathcal{N}_s$ e $\tau(x), t(x) \in \mathcal{M}_q$ le funzioni

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\tau^k(x)) \quad B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(t^k(x)). \tag{2.34}$$

appartengono alla classe $C^1[0, \sigma']$, cfr. [1], ed inoltre sussiste il seguente teorema.

TEOREMA II. *Siano $A(x)$ e $B(x)$ le funzioni definite dalle* (2.34). *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$ (dipendente anche da $\varphi(x)$ e $\tau(x)$ ed esplicitamente calcolabile) tale che se*

$$\|\varphi(x) - \eta(x)\|_{1,s} < \mu \quad \|\tau(x) - t(x)\|_{1,q} < \mu \tag{2.35}$$

si ha

$$\|A(x) - B(x)\|_1 < \varepsilon$$

DIM. Introdotte le funzioni $\varphi^*(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{x^s}$ e $\eta^*(x) = \dfrac{\eta'(x)}{x^s}$ si ha, con facili calcoli:

$$(s+1)\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{d\varphi(\tau^k(x))}{dx} - \frac{d\eta(t^k(x))}{dx} \right\|_0 \leq$$

$$\leq \|\varphi^*(x)\|_0 \|\bar{\tau}(x) - \bar{\tau}(x)\|_1 + \|\varphi^*(x) - \eta^*(x)\|_0 \|\tilde{(x)}\|_1 +$$

$$+ \|\bar{\tau}(x)\|_1 \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi^*(\tau^k(x)) - \varphi^*(t^k(x))| + \|\varphi^*(x)\|_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d(\tau^k(x))^{s+1}}{dx}.$$

Sia m determinato dalla (2.24), si fissi $n > m$ in maniera tale da avere $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{c^{s/q} k^{s/q}} < \varepsilon$. Indicato inoltre con $\bar{\rho}_\lambda$ il modulo di uniforme continuità della funzione $\varphi^*(x)$ e con $\delta(\rho, k)$ le costanti introdotte nel teorema I del lavoro [3], si scelga μ in maniera tale da soddisfare l'enunciato del lemma 4 e le condizioni:

$$\mu < \delta(\bar{\rho}_{\varepsilon/(n+1)}, k), \quad k = 0, \ldots, n;$$

$$\mu < \delta(\frac{\varepsilon}{n+1}, k) \quad k = 0, \ldots, n.$$

Per le maggiorazioni precedentemente acquisite, per le (2.21) e (2.26) e per la (2.14) si ha:

$$(s+1)\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{d\varphi(\tau^k(x))}{dx} - \frac{d\eta(t^k(x))}{dx}\right| \leq$$

$$\leq (2\|\varphi(x)\|_1 + K_2) + K_2\|\varphi(x) - \eta(x)\|_{1,s}$$

COROLLARIO 3. *La funzione* $A(x)$ *definita dalla* (2.34) *verifica la seguente diseguaglianza*

$$\|A(x)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|\varphi(\tau^k(x))\|_1 \leq K_3\|\varphi(x)\|_{1,s} \tag{2.37}$$

con

$$K_3 = \Theta^m \frac{2(s-q)+1}{s-q}.$$

DIM. Si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{d\varphi(\tau^k(x))}{dx}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|\varphi'(\tau^k(x))|\frac{d\tau^k(x)}{dx} \leq$$

$$\leq \|\varphi^*(x)\|_0 \sum_{k=0}^{\infty}(\tau^k(x))^s \frac{d\tau^k(x)}{dx} \leq$$

$$\leq \|\varphi(x)\|_{1,s}\Theta^m\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{c^{s/q}k^{s/q}}\Big) <$$

$$< \|\varphi(x)\|_{1,s}\Theta^m \frac{2(s-q)+1}{s-q}$$

LEMMA 7. *La funzione* $A'(x)$ *è uniformemente continua, il suo modulo di uniforme continuità è esplicitamente calcolabile e dipende soltanto dalle funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\tau(x)$ *e dalle classi* $\mathcal{M}_q$ *e* $\mathcal{N}_s$.

DIM. Risulta

$$
\begin{aligned}
&|A'(x)-A'(\xi)| = \\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi^*(\tau^k(x))(\tau^k(x))^s\frac{d\tau^k(x)}{dx}-\varphi^*(\tau^k(\xi))(\tau^K(\xi))^s\frac{d\tau^k(\xi)}{dx}\right|\leq \\
&\leq\sum_{k=0}^{n}|(\tau^k(x))-\varphi^*(\tau^k(\xi))|(\tau^k(x))^s\frac{d\tau^k(x)}{dx}+ \\
&+\sum_{k=0}^{n}|\varphi^*(\tau^k(\xi))||(\tau^k(x))^s-(\tau^k(\xi))^s|\frac{d\tau^k(x)}{dx}+ \\
&+\sum_{k=0}^{n}|(\tau^k(x))^s|(\tau^k(x))^s\left|\frac{d\tau^k(x)}{dx}-\frac{d\tau^k(x)}{dx}\right|+ \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi^*(\tau^k(x))|(\tau^k(x))^s\frac{d\tau^k(x)}{dx}+\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi^*(\tau^k(\xi))|(\tau^k(\xi))^s\frac{d\tau^k(\xi)}{dx}\leq \\
&\leq K_3\sum_{k=0}^{n}|\varphi^*(\tau^k(x))-\varphi^*(\tau^k(\xi))|+ \\
&+\|\varphi(x)\|_{1,s}\Theta^m\sum_{k=0}^{n}|(\tau^k(x))^s_(\tau^k(\xi))^s|+ \\
&+(\sigma')^s\|\varphi(x)\|_{1,s}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{d\tau^k(x)}{dx}-\frac{d\tau^k(\xi)}{dx}\right|+ \\
&+2\Theta^m\|\varphi(x)\|_{1,s}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{c^{s/q}k^{s/q}}
\end{aligned}
$$

3 – Dipendenza continua dai dati della soluzione del problema di Goursat in $C^0(R)$

Siano $y=\alpha(x)$ ed $x=\beta(y)$ le rappresentazioni cartesiane delle curve Γ_1 e Γ_2. Su queste funzioni verranno assunte le seguenti ipotesi:

I) $\alpha(x)\in\mathcal{D}^1_{q'}[0,\sigma']$, $\beta(y)\in\mathcal{D}^1_{q''}[0,\sigma'']$

II) $\alpha^*(x)<0\quad\beta^*(x)<0$

III) $\beta'(0)\alpha'(0)=1$

L'ipotesi III) è la trascrizione analitica della condizione di contatto tra le due curve; le ipotesi II) sono assunzioni tecniche e servono ad evidenziare che il contatto tra le due curve deve essere di un certo ordine.

Per le funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(y)$ si assumono le ipotesi:

IV) $\varphi_1(x) \in \mathcal{D}^1_{s'}[0,\sigma'] \quad \varphi_2(y) \in \mathcal{D}^1_{s''}[0,\sigma'']$

V) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0$

VI) $q' < s' \quad q'' < s''$

Sussistono i seguenti lemmi.

LEMMA 8. *Siano $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ soddisfacenti le ipotesi I), II), III). Allora la funzione $\tau(x)$ definita dalla (2.1) appartiene alla classe $\mathcal{M}_q \subset \mathcal{D}^1_q[0,\sigma']$ con $q = \min\{q', q''\}$.*

DIM. Posto $y = \alpha(x)$ risulta, tenendo presente la condizione III):

$$\tau'(x) = \beta'(y)\alpha'(x) = (\beta'(0) + \beta^*(y)y^{q''})(\alpha'(0) + \alpha^*(x)x^q) =$$

$$=1 + \alpha'(0)\beta^*(y)x^{q''}(\alpha'(0) + \bar{\alpha}(x)^{q'})^{q''} + \beta'(0)\alpha^*(x)x^{q'} +$$

$$+\alpha^*(x)\beta^*(y)x^{q'+q''}(\alpha'(0) + \bar{\alpha}(x)x^{q'})^{q''}.$$

Risulterà pertanto

$$\tau^*(x) = \alpha'(0)\beta^*(y)x^{q''-q}(\alpha(0) + \bar{\alpha}(x)x^{q'})^{q''} + \beta'(0)\alpha^*(x)x^{q'-q}$$
$$+ \alpha^*(x)\beta^*(y)x^{q'+q''-q}(\alpha'(0) + \bar{\alpha}(x)x^{q'})^{q''}.$$

da cui

$$\tau^*(0) = \begin{cases} \beta'(0)\alpha^*(0) & q'' < q' \\ \beta^*(0)(\alpha'(0))^2 & q' < q'' \\ \beta'(0)\alpha^*(0) + \beta^*(0)(\alpha'(0))^2 & q' = q'' \end{cases}$$

Risulta in ogni caso $\tau^*(0) \neq 0$ e pertanto è verificata la (2.13).

In dipendenza dalla funzione $\tau(x)$ (e quindi dalle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(y)$) si definisce la classe $\mathcal{M}_q$ introdotta dalle (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20).

Sussistono i seguenti lemmi.

LEMMA 9. *Siano $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(y)$ soddisfacenti le condizioni IV), V), VI), allora la funzione $\varphi(x)$ definita dalla (2.4) appartiene alla classe $\mathcal{N}_s \subset \mathcal{D}_s^1[0,\sigma']$ con $s = \min\{s', s''\}$.*

DIM. Posto $y = \alpha(x)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) =&\varphi_1'(x) - \varphi_2'(y)\alpha'(x) = \\
=&\varphi_1^*(x)x^{s'} + \varphi_2^*(y)y^{s''}(\alpha'(0) + \alpha^*(x)x^{q'}) = \\
=&\varphi_1^*(x)x^{s'-s} + \varphi_2^*(\alpha(x)) + \\
&+(\alpha'(0)x + \bar{\alpha}(x)x^{1+q'})^{s''}(\alpha'(0) + \alpha^*(x)x^{q'} = \\
=&x^s(\varphi_1^*(x)x^{s'-s} + \varphi_2^*(\alpha(x)) + \\
&+x^{s''-s}(\alpha'(0) + \bar{\alpha}(x)x^{q'})^{s''}(\alpha'(0) + \alpha^*(x)x^{q'})).
\end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$\varphi^*(x) = \varphi_1^*(x)x^{s'-s} + \varphi_2^*(\alpha(x)) + x^{s''-s}(\alpha'(0) + \bar{\alpha}(x)x^{q'})^{s''}(\alpha'(0) + \alpha^*(x)x^{q'}).$$

In corrispondenza delle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ introduciamo le due seguenti classi di funzioni:

$$\mathcal{M}_{q'}[0,\sigma'] = \{a(x)/a(x) \in \mathcal{D}_{q'}^1[0,\sigma'], a(0) = 0, a'(0) = \alpha'(0)\},$$
$$\mathcal{M}_{q''}[0,\sigma''] = \{b(x) \in \mathcal{D}_{q'}^1[0,\sigma'], b(0) = 0, b'(0) = \beta'(0)\}.$$

In corrispondenza delle funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(y)$ introduciamo le due seguenti classi di funzioni, assumendo $s' > q'$ e $s'' > q''$.

$$\mathcal{N}_{s'}[0,\sigma'] = \{\eta_1(x)/\eta_1(x) \in \mathcal{D}_{q'}^1[0,\sigma'], \eta_1(0) = \varphi_1(0), \eta_1'(0) = 0\},$$
$$\mathcal{N}_{s''}[0,\sigma''] = \{\eta_2(x)/\eta_2(x) \in \mathcal{D}_{q'}^1[0,\sigma'], \eta_2(0) = \varphi_2(0), \eta_2'(0) = 0\},$$

LEMMA 10. *In corrispondenza ad ogni numero $\mu > 0$ esiste una costante $\delta = \delta(\mu) > 0$ (dipendente anche dalle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ e dalle classi $\mathcal{M}_{q'}[0,\sigma']$ ed $\mathcal{M}_{q''}[0,\sigma'']$ ed esplicitamente calcolabile) tale che se risulta*

$$\|\alpha(x) - a(x)\|_{1,q'} < \delta, \quad \|\beta(y) - b(y)\|_{1,q''} < \delta$$

con $a(x) \in \mathcal{M}_{q'}$ *e* $b(y) \in \mathcal{M}_{q''}$, *allora la funzione* $t(x)$, *definita dalla* (2.1), *appartiene alla classe* $\mathcal{M}_q[0, \sigma']$ *e soddisfa la condizione*

$$\|\tau(x) - t(x)\|_{1,q} < \mu$$

con $q = \min\{q', q''\}$ *e la (2.30).*

Inoltre la funzione $\bar{\tau}(x)$ *verifica la (2.23).*

DIM. Dal lemma 5 di [3] segue $\|\tau(x) - t(x)\|_1 < \mu$. La disuguaglianza $\|\tau^*(x) - t^*(x)\|_0 < \mu$ segue facilmente dalla (3.1) e dalla osservazione 1. La tesi è così dimostrata.

LEMMA 11. *In corrispondenza ad ogni* $\mu > 0$ *esiste una costante* $\delta = \delta(\mu) > 0$ *(dipendente anche dalle funzioni* $\alpha(x), \beta(y), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ *e dalle classi* $\mathcal{M}_{q'}[0, \sigma'], \mathcal{M}_{q''}[0, \sigma''], \mathcal{M}_{s'}[0, \sigma'], \mathcal{M}_{s''}[0, \sigma'']$ *ed esplicitamente calcolabile) tale che se risulta*

$$\begin{aligned} &\|\alpha(x) - a(x)\|_{1,q'} < \delta, \quad \|\beta(y) - b(y)\|_{1,q''} < \delta, \\ &\|\varphi_1(x) - \eta_1(x)\|_{1,s'} < \delta, \quad \|\varphi_2(y) - \eta_2(y)\|_{1,s''} < \delta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

si ha che le funzioni $\varphi_0(x, y)$ *e* $\eta_0(x, y)$ *appartengono alla classe* $C^1(R)$ *e verificano la disuguaglianza*

$$\|\varphi_0(x, y) - \eta_0(x, y)\|_1 < \mu \tag{3.4}$$

con $\varphi_0(x, y)$ *ed* $\eta_0(x, y)$ *date rispettivamente dalle* (2.14) *e* (2.23) *di [3].*

DIM. Risulta

$$\|\varphi_0(x, y) - \eta_0(x, y)\|_1 \leq \|\varphi_2(y) - \eta_2(y)\|_1 +$$
$$+ \|\Phi(x) - H(x)\|_1 + \|\Phi(\beta(y)) - H(\beta(y))\|_1$$

Dal teorema II, ove si assumano le funzioni $\Phi(x)$ e $H(x)$ al posto delle $A(x)$ e $B(x)$, segue immediatamente

$$\|\Phi(x) - H(x)\|_1 < \varepsilon.$$

Risulta inoltre

$$\left\| \frac{d\Phi(\beta(y))}{dy} - \frac{dH(\beta(y))}{dy} \right\|_0 \le \|\beta(y)\|_1 \|\Phi'(\beta(y)) - H'(\beta(y))\|_0 +$$

$$+ \|\Phi(x)\|_1 \|\beta(y) - b(y)\|_1 + \|b(y)\|_1 + \|b(y)\|_1 \|\Phi(x) - H(x)\|_1$$

La tesi segue immediatamente dal lemma 7 e dal corollario 3.

LEMMA 12. *Sia $w(x,y) \in C^0(R)$, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (dipendente anche dalle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ e dalla norma $\|w(x,y)\|_0$ ed esplicitamente calcolabile) tale che se risulta:*

$$\|\alpha(x) - a(x)\|_{1,s} < \delta, \quad \|\beta(y) - b(y)\|_{1,s} < \delta$$

si ha:

$$\|\Psi[x;w] - \Psi_0[x;w]\|_0 < \varepsilon. \tag{3.5}$$

$$\|\Psi[\beta(y);w] - \Psi_0[b(y);w]\|_0 < \varepsilon. \tag{3.6}$$

DIM. Assegnato un numero $r > 0$, sia m tale che $\gamma^m_{q,\vartheta}(\sigma') < r$. Per ogni $n > m$ risulta (con passaggi analoghi a quelli seguiti per la dimostrazione del lemma 7 di [3]):

$$|\Psi[x;w] - \Psi_0[x;w]| \le \Big(\sum_{k=0}^{n} |\tau^k(x) - t^k(x)| \alpha(\tau^k(x)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} |\tau^{k+1}(x) - t^{k+1}(x)| \alpha(\tau^k(x)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} |t^k(x) - t^{k+1}(x)|\, |\alpha(\tau^k(x)) -$$

$$- a(t^k(x))| + r\sigma' \Big) \|w(x,y)\|_0$$

La (3.5) segue immediatamente dal teorema I di [3].

Dalla uniforme continuità della funzione $\Psi[x;w]$, dimostrata nel lemma, si ha:

$$
\begin{aligned}
&|\Psi[\beta(y);w] - \Psi_0[b(y);w]| \leq \\
\leq &|\Psi[\beta(y);w] - \Psi[b(y);w]| + |\Psi[b(y);w] - \Psi_0[b(y);w]| \leq \\
\leq &|\Psi[\beta(y);w] - \Psi[b(y);w]| + \|\Psi[x;w] - \Psi_0[x;w]\|_0
\end{aligned}
$$

La tesi è così dimostrata.

OSSERVAZIONE 2. Dal corollario 3, dal lemma 8 e dalla osservazione 4 di [3] segue facilmente l'esistenza di una costante K_4 (esplicitamente calcolabile) tale che:

$$\|\Phi(x)\|_1 \leq K_4 \|\varphi(x)\|_{1,s}.$$

A questo punto possono essere considerati i due seguenti problemi di Goursat:

$$u_{xy} = f(x,y,u) \quad (x,y) \in R \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} u(x,\alpha(x)) = \varphi_1(x) & 0 \leq x \leq \sigma' \\ u(\beta(y),y) = \varphi_2(y) & 0 \leq y \leq \sigma'' \end{cases} \tag{3.8}$$

$$v_{xy} = g(x,y,v) \quad (x,y) \in R \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} v(x,a(x)) = \eta_1(x) & 0 \leq x \leq \sigma' \\ v(b(y),y) = \eta_2(y) & 0 \leq y \leq \sigma'' \end{cases} \tag{3.10}$$

e sviluppare tutta la teoria esposta nel lavoro [3] a partire dalla osservazione 5. Sussistono quindi i due seguenti teoremi (analoghi ai teoremi IV e V di [3]).

TEOREMA. *Assegnato il problema* (3.7) (3.8) *in corrispondenza ad ogni numero* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *(dipendente anche* *dai lati del problema ed esplicitamente calcolabile) tale che se le funzioni* $f(x,y,s)$ *e* $g(x,y,s)$ *appartengono alla classe* $\mathcal{F}$ *e se risulta*

$$\|\alpha(x) - a(x)\|_{1,q'} < \delta, \quad \|\beta(y) - b(y)\|_{1,q''} < \delta$$

$$\|\varphi_1(x) - \eta_1(x)\|_{1,s'} < \delta, \quad \|\varphi_2(y) - \eta_2(y)\|_{1,s''} < \delta,$$

$$E_v < \delta$$

(ove le costanti v *ed* E_v *sono definite, rispettivamente, dalle* (4.10) *e* (4.13) *di [3]) allora la soluzione* $v(x,y)$ *del problema* (3.9) (3.10) *soddisfa la diseguaglianza*

$$\|u(x,y) - v(x,y)\|_0 < \varepsilon$$

TEOREMA. *Assegnato il problema* (3.7) (3.8), *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *dipendente dai dati del problema ed esplicitamente calcolabile, tale che se risulta*

$$\|\alpha(x) - a(x)\|_{1,q'} < \delta, \quad \|\beta(y) - b(y)\|_{1,q''} < \delta$$

$$\|\varphi_1(x) - \eta_1(x)\|_{1,s'} < \delta, \quad \|\varphi_2(y) - \eta_2(y)\|_{1,s''} < \delta,$$

$$E_v < \delta$$

(ove le costanti v *ed* E_v *sono definite, rispettivamente, dalle* (4.10) *e* (4.13) *di [3]) e se anche la funzione* $g(x,y,s)$ *appartiene alla classe* $\mathcal{F}$ *allora la soluzione* $v(x,y)$ *del problema* [2.16] (3.9) *soddisfa la diseguaglianza*

$$\|u(x,y) - v(x,y)\|_1 < \varepsilon.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] B. FIRMANI: *Sui casi singolari del problema di Goursat*, Rend. Mat., (VII) 2 (1982), 237-256.

[2] B. FIRMANI: *Su un problema di Dirichlet per un'equazione del secondo ordine di tipo iperbolico*, Ann. Mat. Pura Appl., (IV) 135 (1983), 133-150.

[3] B. FIRMANI: *Dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema di Goursat*, Rend. Mat. (VII) 10 (1990), 949-986.

Lavoro pervenuto alla redazione il 5 dicembre 1991
ed accettato per la pubblicazione il 5 marzo 1992
su parere favorevole di G. Fichera e di A. Tesei

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Bruno Firmani -Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - via Vanvitelli 1 - I-06100 Perugia.