Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 805-815

Su una proprietà delle curve stazionarie rispetto a funzionali dipendenti dalle curvature

E. MUSSO

RIASSUNTO – *In questa nota dimostriamo che se γ è una curva di $\mathbb{E}^h$ stazionaria rispetto ad una Lagrangiana che dipende solo dalle prime $(j-1)$ curvature di γ, allora la curva è contenuta in un sottospazio affine di dimensione $2j-1$.*

ABSTRACT – *The purpose of the present paper is to show that, given a curve γ in an affine Euclidean space $\mathbb{E}^n$ which is stationary with respect to a functional whose Lagrangian depends only on the first $(j-1)$ curvatures of γ, then the image of the curve must be contained in some $2j-1$ dimensional affine subspace of $\mathbb{E}^n$.*

KEY WORDS – *Curve di tipo costante - Curve estremali.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 53A04 - 58A15

– Introduzione

In questa nota ci proponiamo di dimostrare un teorema enunciato, ma solo parzialmente dimostrato da P. GRIFFITHS nel libro "Exterior Differential Systems and Calculus of Variations" [2].

Una parte non trascurabile degli esempi considerati in [2] consiste nello studio delle curve di uno spazio affine Euclideo $\mathbb{E}^n$ che sono stazionarie rispetto a funzionali del tipo

$$\Phi(\gamma) = \int_\gamma L(k_1, \dots, k_{n-1})ds,$$

dove la Lagrangiana L dipende differenziabilmente dalle curvature $k_1, \dots, k_{n-1}$ di γ. Nelle considerazioni che faremo occorre tenere ben presente che la nozione di "curva estremale del funzionale Φ" ha un ben preciso significato tecnico ed è da intendersi nel senso precisato da Griffiths, cioè come soluzione dell'associato sistema differenziale di Eulero-Lagrange.

Più in generale, data una varietà differenziabile M ed una funzione L definita sullo spazio dei getti $J^k(\mathbb{R}, M)$ si può definire un funzionale Φ che ad ogni curva $g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ associa l'integrale (posto che converga) su $(-\varepsilon, \varepsilon)$ della forma differenziale $L(j^k(g))dt$, dove $j^k(g)$ denota il getto d'ordine k della curva. Con un ragionamento euristico Griffiths associa al problema variazionale un'opportuna sottovarietà di $J^k(\mathbb{R}, M)$ costruita a partire dalla funzione L. La restrizione su tale sottovarietà del sistema differenziale canonico di $J^k(\mathbb{R}, M)$ definisce il sistema di Eulero-Lagrange del problema variazionale considerato. Le proiezioni su M delle curve integrali del sistema di Eulero-Lagrange vengono dette curve estremali del funzionale Φ. Inoltre, ogni curva estremale è un punto critico del funzionale Φ relativamente a variazioni con supporto compatto. Il problema inverso, cioè se ogni punto critico del funzionale è una curva estremale, viene considerato negli articoli [1] e [3].

Nel corso della nostra esposizione daremo una definizione adattata al problema considerato. Questa scelta è dettata dal desiderio di contenere il lavoro entro limiti accettabili, ma ha il difetto di sembrare artificiosa per chi non ha familiarità con la costruzione data da Griffiths. Quindi, il lettore che desiderasse maggiori ragguagli sull'argomento è rinviato all'opera citata. Inoltre, il libro di Griffiths contiene la giustificazione della definizione ad hoc che adotteremo.

Il teorema dimostrato da Griffiths può essere enunciato come segue: *se la Lagrangiana L dipende solo dalla prima curvatura k_1, allora ogni curva stazionaria giace in un sottospazio affine tridimensionale* ([2], teorema III.b.17, pag. 181 e seguenti). Dopo aver dimostrato questo teorema Griffiths afferma (senza darne dimostrazione) che probabilmente esiste una generalizzazione al caso in cui L dipende dalle prime $j-1$ curvature $k_1, \dots, k_{j-1}$. Più precisamente egli afferma che *se la Lagrangiana dipende solo da $k_1, \dots, k_{j-1}$, allora gli estremali del funzionale Φ sono contenuti in un sottospazio affine $(2j-1)$-dimensionale dello spazio ambiente.* Lo scopo della presente nota è quello di dimostrare quest'ultima affermazione.

1 – Preliminari

Indicheremo con $\mathbb{E}^n$ lo spazio affine Euclideo delle n-uple $(x^1, \dots, x^n)$ di numeri reali dotato della metrica piatta standard $(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$. Un riferimento $u = (x, e_1, \dots, e_n)$ di $\mathbb{E}^n$ è dato da un punto x di $\mathbb{E}^n$ e da una base ortonormale $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$. Useremo il simbolo $F(\mathbb{E}^n)$ per denotare l'insieme di tutti i riferimenti di $\mathbb{E}^n$. Fissando il riferimento $(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, dove 0 è l'origine di $\mathbb{R}^n$ ed $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, l'insieme $F(\mathbb{E}^n)$ può essere identificato con il gruppo Euclideo $\mathbb{E}(n)$, cioè con il prodotto semidiretto $O(n) \times |\mathbb{R}^n$. Pertanto $F(\mathbb{E}^n)$ risulta dotato di struttura differenziabile.

Le applicazioni $P, E_1, \dots, E_n \colon F(\mathbb{E}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definite ponendo

$$P \colon u = (x, e_1, \dots, e_n) \longmapsto x \tag{1.1}$$

$$E_i \colon u = (x, e_1, \dots, e_n) \longmapsto e_i\,, \tag{1.2}$$

sono ovviamente differenziabili. Prendendo i differenziali di (1.1) e (1.2) si ottiene

$$dP = \sum_{k=1\dots n} \omega^k E_k \tag{1.3}$$

$$dE_i = \sum_{k=1\dots n} \omega_i^k E_k\,, \tag{1.4}$$

dove le 1-forme ω^i ed ω_j^i sono univocamente determinate da (1.3) e (1.4) e verificano $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$, per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Si osservi che, tramite l'identificazione di $F(\mathbb{E}^n)$ con $\mathbb{E}(n)$, le forme ora definite vengono a coincidere con le componenti della forma Maurer-Cartan del gruppo Euclideo.

Differenziando ulteriormente (1.3) e (1.4) si ricavano le equazioni strutturali di $F(\mathbb{E}^n)$:

$$d\omega^i = -\sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega^k\,,$$

$$d\omega_h^i = -\sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_h^k\,.$$

Indichiamo con X la varietà $F(\mathbb{E}^n) \times \mathbb{R}^{n+1}$, dove $\mathbb{R}^{n+1}$ ha coordinate $(t, q, r_1, \dots, r_{n-1})$. Nel seguito faremo variare gli indici delle coordinate

r_h da 0 ad n, convenendo che $r_0 = r_n = 0$. Su X si considera il sistema differenziale (I, ω) definito dalle equazioni

$$
\begin{aligned}
&\theta^1 = \omega^1 - q dt = 0 && \\
&\theta^p = \omega^p = 0\,, && p = 2, \dots, n \\
(1.5)\qquad &\theta_h^{h+1} = \omega_h^{h+1} - r_h dt = 0\,, && h = 1, \dots, n-1 \\
&\theta_h^k = \omega_h^k = 0\,, && k \geq h+2 \\
&\omega = dt \neq 0\,. &&
\end{aligned}
$$

Le curve integrali $\Gamma(t) = (\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t), t, q(t), r_1(t), \dots, r_{n-1}(t))$ di (I, ω) devono essere interpretate come riferimenti mobili di Frenet lungo la curva $\gamma(t)$ di $\mathbb{E}^n$ con parametro t. Dalle equazioni (1.5) si ottengono infatti le formule di Frenet

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\gamma}{dt} = q(t) e_1(t) \\
(1.6)\qquad &\frac{de_h}{dt} = r_h(t) e_{h+1}(t) - r_{h-1}(t) e_{h-1}(t)\,. \qquad h = 1, \dots, n\,.
\end{aligned}
$$

Da (1.6) segue che l'ascissa curvilinea s della curva è data da $ds/dt = q$ e che le curvature $k_1, \dots, k_{n-1}$ sono esprimibili nel modo seguente.

$$k_1(s) = \frac{r_1(t)}{q(t)}, \dots, k_{n-1}(s) = \frac{r_{n-1}(t)}{q(t)}\,.$$

Conveniamo di chiamare *curva regolare* (*o di tipo costante*) di $\mathbb{E}^n$ ogni curva parametrizzata $\gamma(t) \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{E}^n$ che ammette un sollevamento $\Gamma(t)$ su X che soddisfa sia le equazioni (1.6) sia la condizione

$$(1.7)\quad \text{se } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ e } r_h(t) = 0 \text{ allora } r_{h+1}(t) = \ldots = r_{n-1}(t) = 0\,.$$

Dalla teoria elementare delle curve degli spazi affini Euclidei seguirà che se γ è una curva di tipo costante, allora il sollevamento Γ è essenzialmente unico. Per brevità conveniamo di chiamare Γ *il riferimento di Frenet* della curva γ.

Una curva viene detta *non-degenere* se tutte le sue curvature $k_1, \dots, k_{n-1}$ sono ovunque non nulle, mentre diremo che la curva è "*linearly* *full*" se la sua immagine non è contenuta in nessun sottospazio affine proprio di $\mathbb{E}^n$. Non è difficile rendersi conto che curve non-degeneri sono automaticamente di tipo costante. Similmente, curve "linearly full" sono non-degeneri su un aperto non vuoto del loro dominio di definizione.

Sia ora L una funzione differenziabile di $n-1$ variabili reali, a valori reali ed indichiamo con $l(q, r_1, \dots, r_{n-1})$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $(q, r_1, \dots, r_{n-1})$

$$l(q, r_1, \dots, r_{n-1}) =: qL\Big(\frac{r_1}{q}, \dots, \frac{r_{n-1}}{q}\Big).$$

DEFINIZIONE 1.1. *Sia $\gamma(t)$ una curva regolare di $\mathbb{E}^n$. Diremo che γ è stazionaria (nel senso di Griffiths) relativamente al funzionale*

$$\Phi(\gamma) = \int_\gamma L(k_1, \dots, k_{n-1})ds,$$

se esiste una funzione differenziabile $(\zeta(t), \mu(t))$ a valori nell'algebra di Lie $e(n) = o(n) \times \mathbb{R}^n$ di $\mathbb{E}(n)$ che verifica le equazioni

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \frac{\partial l}{\partial q}\Big|_{(q(t), r_1(t), \dots, r_{n-1}(t))} = \mu_1(t),\\
&\text{(b)} \quad \frac{\partial l}{\partial r_h}\Big|_{(q(t), r_1(t), \dots, r_{n-1}(t))} = \zeta^h_{h+1}(t), \quad h = 1, \dots, n-1,\\
&\text{(c)} \quad \frac{d\mu_h}{dt} = \sum_{p=1}^n R^h_p(t)\mu_p(t), \quad h = 1, \dots, n,\\
&\text{(d)} \quad \frac{d\zeta^p_k}{dt} = \sum_{q=1}^n \zeta^p_q(t)R^q_k(t) - \sum_{q=1}^n R^p_q(t)\zeta^q_k(t) + \mu_k(t)\delta^p_1 -\\
&\qquad\qquad - \mu_p(t)\delta^k_1, \quad k, p = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Le funzioni $R^p_k(t)$ sono definite da

$$\begin{aligned}
R^{h+1}_h(t) &= -r_h(t) & h &= 1, \dots, n-1,\\
R^k_h &= 0, & k &\geq h+2, h = 1, \dots, n,\\
R^k_h &= -R^h_k & k, h &= 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

e $\Gamma(t) = (\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t), t, q(t), r_1(t), \dots, r_{n-1}(t))$ è il riferimento di Frenet lungo γ.

OSSERVAZIONE 1.2. Si noti che Φ può essere interpretato come un funzionale definito sullo spazio delle curve integrali del sistema differenziale (I, ω) di X. In questo senso, le equazioni di cui alla definizione precedente sono proprio le equazioni che si ottengono dal sistema di Eulero-Lagrange. In generale, tali equazioni sono condizione sufficiente affinché la curva Γ sia stazionaria rispetto a variazioni con supporto compatto (vedi [1] e [2]). Per stabilire la necessità della condizione occorrerebbe un'analisi più approfondita della struttura del sistema differenziale (I, ω) (per maggiori informazioni sull'argomento rinviamo a [3]).

2 – Dimostrazione del Teorema

A questo punto possiamo enunciare nel modo per noi più conveniente il Teorema di cui abbiamo parlato nell'introduzione.

TEOREMA 2.1. *Sia $\gamma(t)$ una curva di tipo costante che supponiamo stazionaria rispetto al funzionale Φ. Se la lagrangiana L dipende solo dalle prime $j-1$ variabili ($1 \leq j-1 \leq n$) allora $r_{2j+a} = 0$, per ogni $a \geq 0$ e quindi l'immagine della curva deve essere contenuta in un sottospazio affine $2j-1$ dimensionale di $\mathbb{E}^n$. Evidentemente, se $2j-1 \geq n$ allora il risultato non presenta alcun interesse.*

Per dimostrare il teorema si assumerà che la Lagrangiana L (rispettivamente l) dipende effettivamente da k_{j-1} (rispettivamente da r_{j-1}) e quindi che la derivata parziale $\frac{\partial l}{\partial r_{j-1}}$ non è identicamente nulla. Si porrà quindi $n = 2j + s, s \geq 0$, e si farà vedere che l'esistenza di una curva regolare con $r_{2j+a} \neq 0$, $a = 0, \dots, s$, implica una contraddizione.

Si osservi a tal proposito che se fosse $r_{2j+a} \neq 0$ per $a = 0, \dots, s'$, con $s' \leq s$ e $r_{2j+b} = 0$ per $b > s'$ allora ci si potrebbe ricondurre al caso precedente tenendo presente che in questo caso la curva sarebbe interamente contenuta in un sottospazio affine n' dimensionale ($n' = 2j + s'$).

Prima di giungere al risultato desiderato avremo bisogno di alcuni lemmi preliminari nel corso dei quali useremo le notazioni introdotte precedentemente (specialmente quelle della Definizione 1.1).

In alcune formule faremo variare gli indici di ζ^A_B e di R^A_B da 0 ad $n+1$, sottointendendo che se uno almeno degli indici A, B è 0 oppure $n+1$, allora $\zeta^A_B = 0$ ed $R^A_B = 0$.

LEMMA 2.2. *Per ogni intero* $k = 0, \dots, j+s-1$ *si ha*

$a_k)$ $\zeta^{j+\alpha-2k}_{j+1+\alpha} = 0$, $\forall\alpha = k, \dots, j+s-1$ *tale che* $j+\alpha-2k > 1$;

$b_k)$ $\zeta^{j+\alpha-(2k+1)}_{j+1+\alpha} = 0$, $\forall\alpha = k, \dots, j+s-1$ *tale che* $j+\alpha-(2k+1) > 1$.

DIM. Per induzione su k. Per quanto riguarda $k = 0$ iniziamo con l'osservare che (a_0) segue immediatamente da (b) della Definizione 1.1. Per ottenere (b_0) basterà differenziare le equazioni forniteci dalla (a_0). Infatti, usando (d) della Definizione 1.1 si ottiene:

$$0 = d\zeta^{j+\alpha}_{j+\alpha+1} = \Big(\sum_{q=1}^{n} \zeta^{j+\alpha}_q R^q_{j+\alpha+1} - \sum_{q=1}^{n} \zeta^q_{j+\alpha+1} R^{j+\alpha}_q\Big)dt =$$
$$= \Big(\zeta^{j+\alpha}_{j+2+\alpha} R^{j+2+\alpha}_{j+1+\alpha} - \zeta^{j-1+\alpha}_{j+1+\alpha} R^{j+\alpha}_{j-1+\alpha}\Big)dt,$$

per ogni $\alpha = 0, 1, \dots, j+s-1$. Si osservi che le equazioni di cui sopra possono essere riscritte nella forma:

$$\zeta^{j+(\alpha+1)-1}_{(j+1)+(\alpha+1)} R^{j+2+\alpha}_{j+1+\alpha} - \zeta^{j+(\alpha-1)}_{j+1+\alpha} R^{j+\alpha}_{j+\alpha-1} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, j+s-1.$$

Posto $\alpha = j+s-1$, tenuto conto che $R^{n+1}_n = 0$ si ottiene $\zeta^{2j+s-2}_{2j+s} R^{2j+s-1}_{2j+s-2} = 0$, e quindi $\zeta^{2j+s-2}_{2j+s} = 0$. Prendendo $\alpha = j+s-2$ si ha $\zeta^{2j+s-3}_{2j+s-1} R^{j+s-2}_{j+s-3} = 0$, da cui $\zeta^{2j+s-3}_{2j+s-1} = 0$. Procedendo ricorsivamente si deduce

$$\zeta^{j+(\alpha-1)}_{j+1+\alpha} = 0, \quad \forall\alpha = 0, 1, \dots, j+s-1.$$

Supponiamo che (a_k) e (b_k) siano state verificate per ogni $k = 0, \dots, h$.

Differenziando

$$\zeta^{j+\alpha-(2h+1)}_{j+1+\alpha} = 0, \quad \forall\alpha = h, \dots, j+s-1 \text{ tale che } j+\alpha-(2h+1) > 1$$

avremo

$$0 = d\zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-(2h+1)} = \Big(\sum_{q=1}^{n} \zeta_q^{j+\alpha-(2h+1)} R_{j+1+\alpha}^{q} +$$

$$- \sum_{q=1}^{n} R_q^{j+\alpha-(2h+1)} \zeta_{j+1+\alpha}^{q}\Big) dt =$$

$$= \Big[\zeta_{j+\alpha}^{j+\alpha-(2h+1)} R_{j+1+\alpha}^{j+\alpha} + \zeta_{j+2+\alpha}^{j+\alpha-(2h+1)} R_{j+1+\alpha}^{j+2+\alpha} +$$

$$- R_{j+\alpha-2h}^{j+\alpha-(2h+1)} \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2h} - R_{j+\alpha-2(h+1)}^{j+\alpha-(2h+1)} \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)}\Big] dt$$

per ogni $\alpha = h, \dots, j+s-1$ tale che $j+\alpha-(2h+1) > 1$.

Tenendo conto dell'ipotesi induttiva si ricavano le identità

$$\zeta_{j+\alpha}^{j+\alpha-(2h+1)} = \zeta_{(j+1)+(\alpha-1)}^{j+(\alpha-1)-2h} = 0\,, \quad \forall \alpha = h+1, \dots, j+s-1$$

e

$$\zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2h} = 0\,, \quad \forall \alpha = h, \dots, j+s-1\,.$$

Allora, sostituendo nelle equazioni precedenti, si deduce

$$\zeta_{(j+1)+(\alpha+1)}^{j+(\alpha+1)-2(h+1)} R_{j+1+\alpha}^{j+2+\alpha} - R_{j+\alpha-2(h+1)}^{j+\alpha-(2h+1)} \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)} = 0,$$

$$\forall \alpha = h+1, \dots, j+s-1 \text{ tale che } j+\alpha-(2h+1) > 1\,.$$

Posto $\alpha = j+s-1$, si ha $\zeta_{2j+s}^{2j+s-1-2(h+1)} = 0$. Quindi, prendendo $\alpha = j+s-2$, si ricava $\zeta_{2j+s-1}^{2j+s-2-2(h+1)} = 0$. Procedendo ricorsivamente si deduce

$$\zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-(2h+1)} = 0\,, \quad \alpha = h+1, \dots, j+s-1\,, j+\alpha-(2h+1) > 1\,,$$

che è proprio la (a_{h+1}).

Per ottenere la (b_{h+1}) si differenziano le equazioni di (a_{h+1}) e si ricava

$$0 = d\zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)} = \Big[\zeta_{j+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)} R_{j+1+\alpha}^{j+\alpha} + \zeta_{j+2+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)} R_{j+1+\alpha}^{j+2+\alpha} +$$

$$- R_{j+\alpha-2(h+1)+1}^{j+\alpha-2(h+1)} \zeta_{j+\alpha+1}^{j+\alpha-2(h+1)+1} - R_{j+\alpha-2(h+1)-1}^{j+\alpha-2(h+1)} \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)-1}\Big] dt$$

D'altro canto, per ipotesi induttiva si ha

$$\zeta_{j+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)} = \zeta_{(j+1)+(\alpha-1)}^{j+(\alpha-1)-(2h+1)} = 0, \quad \forall\alpha = h+1,\dots,j+s-1,$$

$$\zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-2(h+1)+1} = 0, \qquad \forall\alpha = h,\dots,j+s-1.$$

Sostituendo si ricava che

$$\zeta_{(j+1)+(\alpha+1)}^{j+(\alpha+1)-(2h+3)} R_{j+1+\alpha}^{j+2+\alpha} - R_{j+\alpha-(2h+3)}^{j+\alpha-2(h+1)} \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-(2h+3)} = 0,$$

$$\forall\alpha = h+1,\dots,j+s-1 \text{ tale che } j+\alpha-2(h+1) \geq 1.$$

Prendendo successivamente $\alpha = j+s-1, \alpha = j+s-2, \dots, \alpha = h+1$, si deduce la (b_{h+1}). □

LEMMA 2.3. *Per ogni intero r tale che $2j-1 \leq r \leq 2j+s$ si ha*

$$\zeta_r^1 = 0.$$

DIM. Sia h un intero tale che $h \geq j-2$ e $2h+3 \leq 2j+s$. Allora, usando (a_h) e prendendo $\alpha = 2(h+1)-j$ (si noti che $\alpha \geq h$) risulta

$$\zeta_{2h+3}^2 = 0.$$

Differenziando questa equazione si ottiene

$$0 = d\zeta_{2h+3}^2 = \left[\zeta_{2h+4}^2 R_{2h+3}^{2h+4} + \zeta_{2h+2}^2 R_{2h+3}^{2h+2} - R_1^2 \zeta_{2h+3}^1 - R_3^2 \zeta_{2h+3}^3\right] dt.$$

Dal Lemma 2.2. si deducono le seguenti informazioni:

i) Se $2h+4 \leq 2j+s, \zeta_{2h+4}^2 = \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-(2h+1)} = 0$ (dove si è posto $\alpha = 2h+3-j$)

ii) Se $2h+4 = 2j+s+1$, allora il termine $\zeta_{2h+4}^2 R_{2h+3}^{2h+4}$ non compare,

iii) $\zeta_{2h+2}^2 = \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-(2k+1)} = 0$ (dove si è posto $\alpha = 2h+1-j$ e $k = h-1$),

iv) $\zeta_{2h+3}^3 = \zeta_{j+1+\alpha}^{j+\alpha-(2k+1)} = 0$ (dove si è posto $\alpha = 2(h+1)-j$ e $k = h-1$).

Se ne può concludere che

$$\zeta_{2h+3}^1 = 0, \quad \text{per ogni} \quad h \geq j-2. \tag{2.1}$$

Sia ora h un intero tale che $h \geq j-2$ e $2h+4 \leq 2j+s$. Prendendo $\alpha = (2h+3)-j$ nella (b_h) si ha $\zeta^2_{2h+4} = 0$.

Procedendo come nel caso precedente si ottiene

$$(2.2) \qquad \zeta^1_{2h+4} = 0\,, \quad \text{per ogni} \quad h \geq j-2\,.$$

Il lemma segue immediatamente combinando la (2.1) e la (2.2). □

LEMMA 2.4. *Per ogni* $B = 1,\dots,2j+s$ *si ha* $\mu_B = 0$.

DIM. Derivando le equazioni $\zeta^1_r = 0, r = 2j-1,\dots,2j+s$, ed usando (d) della definizione 1.1 si può concludere che

$$-R^1_2\zeta^2_r + \mu_r = 0\,, \quad \forall r = 2j,\dots,2j+s\,.$$

D'altro canto, dal Lemma 2.2 segue che $\zeta^2_r = 0$ per ogni $r = 2j,\dots,2j+s$. Quindi $\mu_r = 0$, per ogni $r > 2j-1$. Per completare la dimostrazione è sufficiente differenziare le equazioni $\mu_r = 0, r = 2j,\dots 2j+s$ e tener presente le equazioni (c) della Definizione 1.1. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Dai Lemmi 2.2 e 2.3 si deducono le equazioni

$$(2.3) \qquad \zeta^r_p = 0\,, \quad \forall r = 1,\dots,2j+s \quad \text{e} \quad \forall p = 2j-r,\dots,2j+s\,.$$

Differenziando e tenendo conto sia del Lemma 2.4 sia della Definizione 1.1 si ricava la formula

$$\zeta^r_{p-1}R^{p-1}_p + \zeta^r_{p+1}R^{p+1}_p - R^r_{r-1}\zeta^{r-1}_p - R^r_{r+1}\zeta^{r+1}_p = 0\,,$$
$$\forall r = 1,\dots,2j+s, \quad \forall p = 2j-r,\dots,2j+s\,.$$

Dalla (2.3) segue che $\zeta^r_{p+1} = \zeta^{r+1}_p = 0$, per ogni $r = 1,\dots,2j+s$ e per ogni $p = 2j-r,\dots,2j+s$. Quindi

$$\zeta^r_{p-1}R^{p-1}_p - R^r_{r-1}\zeta^{r-1}_p = 0\,, \ \forall r = 1,\dots,2j+s-1\,, \ \forall p = 2j-r,\dots,2j+s\,.$$

In particolare:

$$(2.4) \qquad \zeta^r_{2j-r-1}R^{2j-r-1}_{2j-r} - R^r_{r-1}\zeta^{r-1}_{2j-r} = 0\,, \quad \forall r = 1,\dots,2j-1\,.$$

Ponendo successivamente $r = 2j-1, 2j-2, \ldots, 1$ nella formula (2.4) si ricava $\zeta_{2j-r}^{r-1} = 0 \ \forall r = 1, \ldots, 2j-1$. Quindi, prendendo $r = j-1$ si ha $\zeta_j^{j-1} = 0$.

Il che contraddice le ipotesi: infatti si era assunto

$$\frac{\partial l}{\partial r_{j-1}} \neq 0 .$$

e

$$\zeta_j^{j-1} = \frac{\partial l}{\partial r_{j-1}} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BRYANT: *On the notions of equivalence for variational problems with independent variable*, Contemporary Mathematics 68 (1987), 65-76.

[2] P. GRIFFITHS: *Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations*, Progress in Mathematics 25, Birkhauser, 1983.

[3] L. HSU: *Calculus of Variations via the Griffiths formalism*, Preprint 1990.

Lavoro pervenuto alla redazione il 19 marzo 1992
ed accettato per la pubblicazione il 9 aprile 1992
su parere favorevole di F. Succi e di S. Marchiafava

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Emilio Musso - Dipartimento di Matematica "U. Dini" - Viale Morgagni 67/A - Firenze - Italy