Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 12 , Roma (1992), 975-996

Generalizzazione dei metodi di Nyström: formule immerse

F. COSTABILE - M.I. GUALTIERI - A. SCALISE

RIASSUNTO – *Per la soluzione numerica del problema di Cauchy* $y'' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ *si considera la classe di metodi di Nyström generalizzati proposta in [1] e si determinano coppie di formule immerse di ordine rispettivamente (2,1), (4,3), (5,4), (6,5) che risultano più economiche di quelle che compaiono in [2], [3]. Tali formule consentono un codice con scelta automatica del passo di integrazione in funzione della tolleranza prefissata, il quale è stato testato su quattro esempi. Si evidenzia una relazione interessante tra questa classe di metodi e quella classica di Nyström [7]. Infine si studiano gli intervalli di assoluta stabilità.*

ABSTRACT – *For the numerical initial value problem* $y'' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ *we consider the class of generalized Runge-Kutta-Nyström methods studied in [1]; for automatic stepsize control we proposed the embedded economical formulas of order (2,1), (4,3), (5,4), (6,5). We, also, determined an interesting relation with classica Nyström methods. Finally we consider the numerical stability and numerical examples.*

KEY WORDS – *One step methods - Numerical analysis - Ordinary differential equation.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 65L05

1 – Introduzione

Recentemente [1] per il problema di Cauchy

$$(1.0) \qquad \begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0\,, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

è stato proposto il metodo

$$
(1.1)\quad \begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2 \sum\limits_{i=0}^{s} \alpha_i K_{i,n} \\
y'_{n+1} = y'_n + h_n \sum\limits_{i=0}^{s} \alpha'_i K_{i,n} \\
K_{i,n} = \dfrac{1}{2} f\left(x_n + \mu_i h_n, y_n + \mu_i h_n y'_n + h_n^2 \left(\sum\limits_{j=0}^{s} \lambda_{ij} K_{j,n-1} + \sum\limits_{j=0}^{i-1} \rho_{ij} K_{j,n}\right)\right) \\
K_{i,-1} = \dfrac{1}{2} f(x_0, y_0)
\end{cases}
$$

esaminando i casi per $s = 0, 1, 2, 3$ si possono ottenere approssimazioni di ordine, rispettivamente, 2,4,5,6. Queste formule risultano a passo variabile, autoinnescate e se confrontate con le formule di Nyström [4] di uguale ordine, hanno uno stadio in meno, cioè valutano la funzione $f(x, y)$ una volta in meno per passo. Tale caratteristica di economicità ha suggerito e motivato lo studio della stima dell'errore di troncamento con formule immerse al fine della scelta automatica del passo di integrazione. In questa nota si determinano coppie di formule (1.1) di ordine (2,1), (4,3), (5,4), (6,5) che risultano più economiche di quelle di FHELBERG [2] e di DORMAND-PRINCE [3].

Un codice con scelta automatica del passo è stato costruito e testato su quattro esempi numerici.

Considereremo anche gli intervalli di assoluta stabilità, nonché evidenzieremo una relazione con i metodi classici di Nyström di sicuro interesse [7].

2 – Formule immerse

Con $(p, p-1)$ indicheremo la seguente quaterna di formule

$$
(2.1)\quad \begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2 \sum\limits_{i=0}^{s} \alpha_i K_{i,n} \\
\tilde{y}_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2 \left(\sum\limits_{i=0}^{s} \tilde{\alpha}_i K_{i,n} + \sum\limits_{i=0}^{s} \tilde{\beta}_i K_{i,n-1} \right) \\
y'_{n+1} = y'_n + h_n \sum\limits_{i=0}^{s} \alpha'_i K_{i,n} \\
\tilde{y}'_{n+1} = y'_n + h_n \left(\sum\limits_{i=0}^{s} \tilde{\alpha}'_i K_{i,n} + \sum\limits_{i=0}^{s} \tilde{\beta}'_i K_{i,n-1} \right)
\end{cases}
$$

dove $K_{i,n}$ è definito in (1.1), tale che

$$\left|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\right| \leq ch^{p+1}$$

$$\left|y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\right| \leq c_1 h^p$$

$$\left|y'(x_{n+1}) - y'_{n+1}\right| \leq c_2 h^p$$

$$\left|y'(x_{n+1}) - \tilde{y}'_{n+1}\right| \leq c_3 h^{p-1}.$$

I valori $\tilde{y}_{n+1}$ e $\tilde{y}'_{n+1}$ sono calcolati per la stima dell'errore di troncamento, infatti in analogia a FHELBERG [2], DORMAND-PRINCE [3] e FINE [6] considereremo $\|Y_n - \tilde{Y}_n\|$ dove

$$Y_n = \left[y_n, y'_n\right]^T, \qquad \tilde{Y}_n = \left[\tilde{y}_n, \tilde{y}'_n\right]^T \tag{2.2}$$

come stima dell'errore di troncamento essendo $\|\cdot\|$ una norma vettoriale.

La quaterna (2.1) è univocamente determinata dalle costanti che figurano nella tabella 1.

Tabella 1: Coefficienti del metodo (2.1)

μ_0		λ_{00} λ_{01} $\cdots$ $\cdots$ λ_{0s}
μ_1	ρ_{10}	λ_{10} $\cdots$ $\cdots$ λ_{1s}
$\vdots$	ρ_{20} ρ_{21}	$\vdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\vdots$
$\vdots$	$\cdots$ $\cdots$ $\ddots$	$\vdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\vdots$
μ_s	ρ_{s0} ρ_{s1} $\cdots$ $\rho_{s,s-1}$	λ_{s0} $\cdots$ $\cdots$ λ_{ss}
I	α_0 α_1 $\cdots$ $\cdots$ α_s	α'_0 α'_1 $\cdots$ $\cdots$ α'_s
	$\tilde{\alpha}_0$ $\tilde{\alpha}_1$ $\cdots$ $\cdots$ $\tilde{\alpha}_s$	$\tilde{\alpha}'_0$ $\tilde{\alpha}'_1$ $\cdots$ $\cdots$ $\tilde{\alpha}'_s$
	$\tilde{\beta}_0$ $\tilde{\beta}_1$ $\cdots$ $\cdots$ $\tilde{\beta}_s$	$\tilde{\beta}'_0$ $\tilde{\beta}'_1$ $\cdots$ $\cdots$ $\tilde{\beta}'_s$

Esamineremo ora l'ordine massimo p, in funzione del numero di stadi $s+1$.

s = 0

Per $s = 0$ si ottiene la coppia (2,1) riportata in tabella 2.

Tabella 2: Coefficienti della formula (2,1)

μ_0		μ_0^2
I	1	2
	$1-\tilde{\beta}_0$	$2-\tilde{\beta}'_0$
	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}'_0$

La migliore quaterna in funzione di $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}'_0$, si ottiene per $\mu_0 = \frac{1}{2}$ ed è data da

$$(2.3)\qquad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2 K_{0,n} \\ \tilde{y}_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2\Big[(1-\tilde{\beta}_0)K_{0,n} + \tilde{\beta}_0 K_{0,n-1}\Big] \\ y'_{n+1} = y'_n + 2h_n K_{0,n} \\ \tilde{y}'_{n+1} = y'_n + h_n\Big[(2-\tilde{\beta}'_0)K_{0,n} + \tilde{\beta}'_0 K_{0,n-1}\Big] \\ K_{0,n} = \dfrac{1}{2} f\Big(x_n + \dfrac{1}{2}h_n, y_n + \dfrac{1}{2}h_n/y'_n + \dfrac{1}{4}h_n^2 K_{0,n-1}\Big) \\ K_{0,-1} = \dfrac{1}{2} f(x_0, y_0) \end{cases}$$

Notiamo esplicitamente che risulta

$$\Big|y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\Big| \le Ch^3\,, \qquad \Big|y'(x_{n+1}) - \tilde{y}'_{n-1}\Big| \le C_1 h^2$$

e che inoltre la terza delle (2.3) riproduce la formula di quadratura di Gauss ad un punto se $f(x,y) \equiv f(x)$.

La stima dell'errore di troncamento, rispettivamente per la funzione e la derivata, è data da

$$(2.4)\qquad \begin{cases} y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} = h_n^2 \tilde{\beta}_0 (K_{0,n} - K_{0,n-1}) \\ y'_{n+1} - \tilde{y}'_{n+1} = h_n \tilde{\beta}'_0 (K_{0,n} - K_{0,n-1}) \end{cases}$$

s = 1

Con le stesse tecniche usate in [1] si ottiene la quaterna di formule (4,3) di tabella 3.

Tabella 3: Coefficienti della formula (4,3)

$\frac{3\mp\sqrt{3}}{6}$			$\frac{5\mp\sqrt{3}}{12}$	$\frac{-1\pm\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$		$\frac{-1\pm\sqrt{3}}{12}$	$\frac{-1\mp\sqrt{3}}{12}$
I	$\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3\mp\sqrt{3}}{6}$	1	1
	$\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}-\tilde{\beta}_1$	$\frac{3\mp\sqrt{3}}{6}+(2\mp\sqrt{3})\tilde{\beta}_1$	$1-\tilde{\beta}'_1$	$1+(2\mp\sqrt{3})\tilde{\beta}'_1$
	$-(2\mp\sqrt{3})\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_1$	$-(2\mp\sqrt{3})\tilde{\beta}'_1$	$\tilde{\beta}'_1$

Anche in questo caso per $f(x,y)\equiv f(x)$ si riproduce la formula di quadratura di Gauss a due punti per $y'(x)$.

Per la stima dell'errore di troncamento si ha

$$(2.5)\quad \begin{cases} y_{n+1}-\tilde{y}_{n+1} = h_n^2\tilde{\beta}_1\Big[(K_{0,n}-K_{1,n-1})+(2\mp\sqrt{3})\,(K_{0,n-1}-K_{1,n})\Big] \\ y'_{n+1}-\tilde{y}'_{n+1} = h_n\tilde{\beta}'_1\Big[(K_{0,n}-K_{1,n-1})+(2\mp\sqrt{3})\,(K_{0,n-1}-K_{1,n})\Big] \end{cases}$$

s = 2

Per $s=2$ in [1] si è determinata una famiglia di formule del quinto ordine, la cui formula più interessante, unitamente alle relative formule immerse, è riportata in tabella 4.
Se $f(x,y)\equiv f(x)$ si ottiene y'_{n+1} mediante la formula di quadratura di Radau a tre punti.

Per l'errore di troncamento abbiamo

$$(2.6)\quad \begin{cases} y_{n+1}-\tilde{y}_{n+1}=h_n^2\tilde{\beta}_2\left[\frac{2\pm3\sqrt{6}}{6}K_{0,n}+\frac{2\mp3\sqrt{6}}{6}K_{1,n}+\frac{1}{3}K_{2,n}-K_{2,n-1}\right] \\ y'_{n+1}-\tilde{y}'_{n+1}=h_n\tilde{\beta}'_2\left[\frac{2\pm3\sqrt{6}}{6}K_{0,n}+\frac{2\mp3\sqrt{6}}{6}K_{1,n}+\frac{1}{3}K_{2,n}-K_{2,n-1}\right] \end{cases}$$

Tabella 4: Coefficienti della formula (5,4)

$\frac{4\mp\sqrt{6}}{10}$				0	0	$\frac{11\mp4\sqrt{6}}{50}$
$\frac{4\pm\sqrt{6}}{10}$	$\frac{42\pm13\sqrt{6}}{125}$			0	0	$\frac{-28\mp6\sqrt{6}}{250}$
1	$\mp\frac{\sqrt{6}}{8}$	$\frac{12\mp3\sqrt{6}}{8}$		0	0	$\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}$
I	$\frac{9\pm\sqrt{6}}{18}$	$\frac{9\mp\sqrt{6}}{18}$	0	$\frac{16\mp\sqrt{6}}{18}$	$\frac{16\pm\sqrt{6}}{18}$	$\frac{2}{9}$
	$\frac{9\pm\sqrt{6}}{18}-\frac{2\pm3\sqrt{6}}{6}\tilde{\beta}_2$	$\frac{9\mp\sqrt{6}}{18}-\frac{2\mp3\sqrt{6}}{6}\tilde{\beta}_2$	$-\frac{1}{3}\tilde{\beta}_2$	$\frac{16\mp\sqrt{6}}{18}-\frac{2\pm3\sqrt{6}}{6}\tilde{\beta}'_2$	$\frac{16\pm\sqrt{6}}{18}-\frac{2\mp3\sqrt{6}}{6}\tilde{\beta}'_2$	$\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\tilde{\beta}'_2$
	0	0	$\tilde{\beta}_2$	0	0	$\tilde{\beta}'_2$

$\boxed{s = 3}$

Per $s = 3$ in [1] si è determinata una famiglia di formule del sesto ordine, per cui riportiamo il caso più interessante in tabella 5.

Tabella 5: Coefficienti della formula di ordine 6

$\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$					0	0	0	$\frac{3\pm\sqrt{5}}{10}$
$\frac{5\mp\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{15}$				0	0	0	$-\frac{1\pm\sqrt{5}}{30}$
0	$-\frac{5\pm 2\sqrt{5}}{15}$	$\frac{5\pm 2\sqrt{5}}{15}$			0	0	0	0
1	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{30}$	$\frac{35\pm 11\sqrt{5}}{30}$	1		0	0	0	$-\frac{4\pm\sqrt{5}}{3}$
I	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{12}$	$\frac{5\pm\sqrt{5}}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Se $f(x,y) \equiv f(x)$ si ottiene y'_{n+1} mediante la formula di quadratura di Radau a quattro punti.

Per questo caso non è stato possibile determinare la formula immersa corrispondente a I con $s=3$. Infatti il sistema di $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$, $\tilde{\alpha}'_i$, $\tilde{\beta}'_i$, ammette la sola soluzione banale $\tilde{\beta}_i = \tilde{\beta}'_i = 0 \; i = 0, \ldots, 3$. Sono state però determinate formule immerse aggiungendo una ulteriore valutazione funzionale:

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2 \Big(\sum\limits_{i=0}^{4} \tilde{\alpha}_i K_{i,n} + \sum\limits_{i=0}^{4} \tilde{\beta}_i K_{i,n-1} \Big) \\ \tilde{y}'_{n+1} = y'_n + h_n \Big(\sum\limits_{i=0}^{4} \tilde{\alpha}'_i K_{i,n} + \sum\limits_{i=0}^{4} \tilde{\beta}'_i K_{i,n-1} \Big) . \end{cases}$$

Procedendo con la tecnica consueta si ottiene la famiglia di formule

$$\mu_4, \rho_{40}, \rho_{41}, \rho_{42}, \rho_{43}, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}'_4 \qquad \text{liberi}$$

$$\lambda_{43} = \mu_4^2 - (\rho_{40} + \rho_{41} + \rho_{42} + \rho_{43})$$

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{1}{12}\Big\{ 5 \mp \sqrt{5} - 30(1 \mp \sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\mu_4 + 30(1 \mp 3\sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\mu_4^2 \pm 60\sqrt{5}\tilde{\alpha}_4\mu_4^3 \Big\}$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{12}\Big\{ 5 \pm \sqrt{5} - 30(1 \pm \sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\mu_4 + 30(1 \pm 3\sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\mu_4^2 \mp 60\sqrt{5}\tilde{\alpha}_4\mu_4^3 \Big\}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{6}\Big\{1 - 36\tilde{\alpha}_4\mu_4 + 120\tilde{\alpha}_4\mu_4^2 - 30(1 \pm \sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\mu_4^3 - 9(5 \mp 3\sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\rho_{40} +$$
$$- 9(15 \mp 7\sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\rho_{41} - 90(2 \mp \sqrt{5})\tilde{\alpha}_4\rho_{43}\Big\}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = (-1 + 5\mu_4 - 5\mu_4^2)\tilde{\alpha}_4\mu_4$$

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\tilde{\beta}_4\mu_4}{2}\Big\{ - 5(1 \mp \sqrt{5}) + 5(1 \mp 3\sqrt{5})\mu_4 \pm 10\sqrt{5}\mu_4^2\Big\}$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\tilde{\beta}_4\mu_4}{2}\Big\{ - 5(1 \pm \sqrt{5}) + 5(1 \pm 3\sqrt{5})\mu_4 \mp 10\sqrt{5}\mu_4^2\Big\}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_4(-1 + 6\mu_4 - 10\mu_4^2 + 5\mu_4^3)$$

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{\tilde{\beta}_4}{2}\Big\{ - 2 + 22\mu_4 - 50\mu_4^2 + 10(1 \pm \sqrt{5})\mu_4^3 + 3(5 \mp 3\sqrt{5})\rho_{40} +$$
$$+ 3(15 \mp 7\sqrt{5})\rho_{41} + 30(2 \mp \sqrt{5})\rho_{43}\Big\}$$

$$\tilde{\alpha}_4 = \tilde{\beta}_4$$

$$\tilde{\alpha}'_0 = \frac{1}{6}\Big\{5 - 15(1 \mp \sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\mu_4 + 15(1 \mp 3\sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\mu_4^2 \pm 30\sqrt{5}\tilde{\alpha}'_4\mu_4^3\Big\}$$

$$\tilde{\alpha}'_1 = \frac{1}{6}\Big\{5 - 15(1 \pm \sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\mu_4 + 15(1 \pm 3\sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\mu_4^2 \mp 30\sqrt{5}\tilde{\alpha}'_4\mu_4^3\Big\}$$

$$\tilde{\alpha}'_2 = \frac{1}{6}\Big\{1 - 36\tilde{\alpha}'_4\mu_4 + 120\tilde{\alpha}'_4\mu_4^2 - 30(1 \pm \sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\mu_4^3 - 9(5 \mp 3\sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\rho_{40} +$$
$$- 9(15 \mp 7\sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\rho_{41} - 90(2 \mp \sqrt{5})\tilde{\alpha}'_4\rho_{43}\Big\}$$

$$\tilde{\alpha}'_3 = \frac{1}{6}(1 - 6\tilde{\alpha}'_4\mu_4 + 30\tilde{\alpha}'_4\mu_4^2 - 30\tilde{\alpha}'_4\mu_4^3)$$

$$\tilde{\beta}'_0 = \frac{\tilde{\beta}'_4\mu_4}{2}\Big\{ - 5(1 \mp \sqrt{5}) + 5(1 \mp 3\sqrt{5})\mu_4 \pm 10\sqrt{5}\mu_4^2\Big\}$$

$$\tilde{\beta}'_1 = \frac{\tilde{\beta}'_4\mu_4}{2}\Big\{ - 5(1 \pm \sqrt{5}) + 5(1 \pm 3\sqrt{5})\mu_4 \mp 10\sqrt{5}\mu_4^2\Big\}$$

$$\tilde{\beta}'_2 = \tilde{\beta}'_4(-1 + 6\mu_4 - 10\mu_4^2 + 5\mu_4^3)$$

$$\tilde{\beta}'_3 = \frac{\tilde{\beta}'_4}{2}\Big\{ - 2 + 22\mu_4 - 50\mu_4^2 + 10(1 \pm \sqrt{5})\mu_4^3 + 3(5 \mp 3\sqrt{5})\rho_{40} +$$
$$+ 3(15 \mp 7\sqrt{5})\rho_{41} + 30(2 \mp \sqrt{5})\rho_{43}\Big\}$$

$$\tilde{\alpha}'_4 = \tilde{\beta}'_4$$

Scelti opportunamente i parametri liberi si ha infine la coppia di formule (6,5) di tabella 6.

Tabella 6 - Coefficienti della formula (6,5).

$\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$						0	0	0	$\frac{3\pm\sqrt{5}}{10}$	0
$\frac{5\mp\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{15}$					0	0	0	$-\frac{1\pm\sqrt{5}}{30}$	0
0	$-\frac{5\pm2\sqrt{5}}{15}$	$\frac{5\pm2\sqrt{5}}{15}$				0	0	0	0	0
1	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{30}$	$\frac{35\pm11\sqrt{5}}{30}$	1			0	0	0	$-\frac{4\pm\sqrt{5}}{3}$	0
$\frac{1}{4}$	$-\frac{3\mp\sqrt{5}}{30}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{61\pm28\sqrt{5}}{960}$		0	0	0	$-\frac{31\mp60\sqrt{5}}{960}$	0
I	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{12}$	$\frac{5\pm\sqrt{5}}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
	$\frac{5\mp\sqrt{5}}{12}-\frac{30\mp15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}_4$	$\frac{5\pm\sqrt{5}}{12}-\frac{30\pm15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}_4$	$\frac{1}{6}-\frac{3}{64}\bar{\beta}_4$	$-\frac{1}{64}\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_4$	$\frac{5}{6}-\frac{30\mp15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}'_4$	$\frac{5}{6}-\frac{30\pm15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}'_4$	$\frac{1}{6}-\frac{3}{64}\bar{\beta}'_4$	$\frac{1}{6}-\frac{1}{64}\bar{\beta}'_4$	$\bar{\beta}'_4$
	$-\frac{30\mp15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}_4$	$-\frac{30\pm15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}_4$	$-\frac{3}{64}\bar{\beta}_4$	$\frac{1}{64}\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_4$	$-\frac{30\mp15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}'_4$	$-\frac{30\pm15\sqrt{5}}{64}\bar{\beta}'_4$	$-\frac{3}{64}\bar{\beta}'_4$	$-\frac{1}{64}\bar{\beta}'_4$	$\bar{\beta}'_4$

Per l'errore di troncamento abbiamo

$$
(2.8)\qquad
\begin{cases}
y_{n+1}-\tilde{y}_{n+1}=h_n^2\dfrac{\tilde{\beta}_4}{64}\Big[(30\mp 15\sqrt{5})(K_{0,n}+K_{0,n-1})+\\
\qquad +(30\pm 15\sqrt{5})(K_{1,n}+K_{1,n-1})+\\
\qquad +3(K_{2,n}+K_{2,n-1})+(K_{3,n}+K_{3,n-1})\Big]\\
y'_{n+1}-\tilde{y}'_{n+1}=h_n\dfrac{\tilde{\beta}'_4}{64}\Big[(30\mp 15\sqrt{5})(K_{0,n}+K_{0,n-1})+\\
\qquad +(30\pm 15\sqrt{5})(K_{1,n}+K_{1,n-1})+\\
\qquad +3(K_{2,n}+K_{2,n-1})+(K_{3,n}+K_{3,n-1})\Big]
\end{cases}
$$

3 – Implementazione ed esempi numerici

Il metodo (1.1), come abbiamo detto, si presenta a passo variabile ed autoinnescato. Le formule immerse, (2.1), consentono inoltre la stima dell'errore di troncamento data da (2.2). È possibile allora scrivere un codice con scelta automatica del passo di integrazione in funzione della stima dell'errore di troncamento locale. Tale scelta, in analogia alla letteratura ([3] [5]) esistente è data da

$$h_{n+1}=0.9*h*\left(\frac{\varepsilon}{\|E\|}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

dove p è l'ordine della formula di ordine più elevato, ε è la tolleranza prefissata, $E=Y-\widetilde{Y}$, $\|\cdot\|$ è la norma infinito.

La stima (2.2) così come è data dalle formule (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) si presenta in funzione dei parametri $\tilde{\beta}_i, \tilde{\beta}'_i$, di cui una buona scelta sembra essere $\tilde{\beta}_i=\tilde{\beta}'_i=\frac{1}{60}$. Per tali valori si considerano i metodi presentati nel paragrafo 2 indicando con

A il metodo in tabella 2

B il metodo in tabella 3

C il metodo in tabella 4

D il metodo in tabella 6

Il codice costruito per tali metodi viene applicato ai seguenti problemi:

$$
\text{(P1)} \qquad \begin{cases} y'' = 2\cos x - y \\ y(0) = 0\,, & y'(0) = 0 \\ \textit{con soluzione esatta} & y(x) = x\sin x \end{cases}
$$

$$
\text{(P2)} \qquad \begin{cases} y'' = (x^2+1)y \\ y(0) = 1\,, & y'(0) = 0 \\ \textit{con soluzione esatta} & y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \end{cases}
$$

$$
\text{(P3)} \qquad \begin{cases} y'' = \frac{1}{3}\Big(2 - x)e^{2y} + \dfrac{1}{1+x}\Big) \\ y(0) = 0\,, & y'(0) = -1 \\ \textit{con soluzione esatta} & y(x) = \ln\dfrac{1}{1+x} \end{cases}
$$

$$
\text{(P4)} \qquad \begin{cases} y'' = \dfrac{(1-x)y+1}{(1+x)^2} \\ y(0) = 1\,, & y'(0) = -1 \\ \textit{con soluzione esatta} & y(x) = \dfrac{1}{1+x} \end{cases}
$$

I risultati ottenuti in funzione di diverse tolleranze sono riportati nelle tabelle 7-10, in cui con Err. è indicata la norma (del max) dell'errore effettivo, cioè soluzione esatta meno soluzione approssimata, e con v.f. il numero complessivo delle valutazioni funzionali, inoltre nella didascalia è indicata l'ampiezza del passo iniziale. Tutti gli esempi sono integrati tra 0 e 1.

Tabella 7 - Risultati relativi all'esempio P1 con passo iniziale $h = 0.05$.

toll. met.	10^{-3}		10^{-4}		10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}		10^{-10}		10^{-11}		10^{-12}	
	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.
A	10^{-7}	3	10^{-7}	3																
B	10^{-4}	8	10^{-5}	10	10^{-5}	14	10^{-8}	22	10^{-8}	48	10^{-9}	88	10^{-9}	204						
C	10^{-11}	9	10^{-11}	9	10^{-6}	18	10^{-7}	30	10^{-8}	45	10^{-10}	81	10^{-11}	138	10^{-11}	255				
D	10^{-14}	15	10^{-14}	20	10^{-6}	25	10^{-6}	30	10^{-8}	40	10^{-9}	55	10^{-10}	80	10^{-11}	125	10^{-12}	190	10^{-12}	295

Tabella 8 - Risultati relativi all'esempio P2 con passo iniziale $h = 0.02$.

toll. met.	10^{-3}		10^{-4}		10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}		10^{-10}		10^{-11}		10^{-12}	
	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.
A	10^{-9}	3	10^{-9}	3	10^{-9}	3														
B	10^{-4}	8	10^{-6}	10	10^{-5}	16	10^{-6}	30	10^{-8}	52	10^{-9}	114	10^{-11}	272						
C	10^{-13}	5	10^{-13}	18	10^{-5}	21	10^{-6}	30	10^{-8}	45	10^{-9}	72	10^{-10}	120	10^{-12}	204	10^{-12}	339		
D	0.0	15	10^{-4}	20	10^{-5}	25	10^{-7}	30	10^{-8}	45	10^{-9}	65	10^{-10}	95	10^{-11}	145	10^{-13}	220	10^{-14}	345

Tabella 9 - Risultati relativi all'esempio P3 con passo iniziale $h = 0.01$.

toll. met.	10^{-3}		10^{-4}		10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}		10^{-10}		10^{-11}		10^{-12}	
	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.
A	10^{-7}	3	10^{-7}	3	10^{-7}	3														
B	10^{-4}	8	10^{-5}	10	10^{-5}	14	10^{-6}	22	10^{-7}	40	10^{-7}	72	10^{-9}	156						
C	10^{-14}	12	10^{-5}	15	10^{-6}	18	10^{-7}	27	10^{-8}	39	10^{-9}	60	10^{-11}	99	10^{-12}	168	10^{-13}	450		
D	10^{-17}	15	10^{-17}	20	10^{-5}	20	10^{-6}	25	10^{-7}	30	10^{-8}	40	10^{-9}	50	10^{-10}	70	10^{-11}	100	10^{-12}	155

Tabella 10 - Risultati relativi all'esempio P4 con passo iniziale $h = 0.01$.

toll. met.	10^{-3}		10^{-4}		10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}		10^{-10}		10^{-11}		10^{-12}	
	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.	Err.	v.f.
A	10^{-7}	3	10^{-2}	9	10^{-4}	39														
B	10^{-4}	10	10^{-5}	12	10^{-5}	18	10^{-5}	30	10^{-8}	48	10^{-8}	106	10^{-9}	218						
C	10^{-4}	12	10^{-5}	18	10^{-6}	21	10^{-7}	33	10^{-8}	48	10^{-10}	81	10^{-11}	132	10^{-12}	228	10^{-13}	669		
D	10^{-16}	15	10^{-16}	20	10^{-6}	20	10^{-7}	30	10^{-8}	35	10^{-9}	45	10^{-9}	65	10^{-10}	90	10^{-12}	135	10^{-13}	205

4 – Relazione con i metodi classici di Nyström

I metodi di Nyström sono definiti da ([4])

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hy'_n + h^2 \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} K_i \\ y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{i=1}^{s-1} \bar{a}_{si} K_i \\ K_i = f\left(x_n + \alpha_i h, y_n + \alpha_i h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right) \end{cases}
$$

TEOREMA 1. *Per $s \geq 5$, se il metodo è di ordine $p \geq 2$, allora risulta*

$$
\left.\begin{aligned} \bar{a}_{s1} &= 0 \\ \alpha_{s-1} &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} a_{s1} = 0 & (i) \\ \sum_{i=1}^{s-1} \bar{a}_{si} a_{i1} = 0 & (ii) \\ \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} a_{i1} = 0 & (iii) \end{cases}
$$

DIM. Risultando ([4]) $a_{s1} = \bar{a}_{s1}(1 - \alpha_1) = 0$, da $\bar{a}_{s1} = 0$, segue immediatamente $a_{s1} = 0$ cioè la (i). Da ([4]) per $s \geq 5$ si ha

$$
\alpha_{s-1} = 1 \iff \sum_{i=1}^{s-1} \bar{a}_{si} a_{ij} = \bar{a}_{sj}\left(\frac{1}{2}\alpha_j^2 - \alpha_j + \frac{1}{2}\right).
$$

Per $j = 1$ troviamo la (ii), mentre per la (iii)

$$
\begin{aligned} \sum a_{si} a_{i1} &= \sum \bar{a}_{si}(1 - \alpha_i) a_{i1} = \sum \bar{a}_{si} a_{i1} - \sum \bar{a}_{si} \alpha_i a_{i1} = \\ &= -\sum \bar{a}_{si} \alpha_i \left[\frac{\alpha_i^2}{2} - \sum a_{ij}\right] = -\sum \bar{a}_{si} \frac{\alpha_i^3}{2} + \sum \bar{a}_{si} \alpha_i \sum a_{ij} = \\ &= (\text{essendo } p \geq 2) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0. \end{aligned}
$$

□

TEOREMA 2. *Sia il metodo (4.1) di ordine p, soddisfacente le ipotesi del teorema 1, sostituendo K_1 del passo corrente con K_{s-1} del passo precedente il metodo resta dello stesso ordine p.*

DIM. Osserviamo anzitutto che essendo $\bar{a}_{s1} = a_{s1} = 0$, K_1 non compare, all'esterno delle K_i $i = 2, \ldots, s$, nella definizione di y_{n+1}, y'_{n+1}. Inoltre

$$\begin{aligned} K_{s-1} &= \frac{1}{2} f\left(x_{n-1} + h, y_{n-1} + h y'_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^{s-2} a_{s-1,j} K_j \right) = \\ &= \frac{1}{2} f\left(x_n, y_n + y_{n-1} + h y'_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^{s-2} a_{s-1,j} K_j - y_n \right) = \\ &= \frac{1}{2} f(x_n, y_n) + h^2 T = K_1 + h^2 T \end{aligned}$$

con T quantità opportuna.
Allora la tesi segue applicando le (*ii*) e (*iii*) della proposizione 1 al consueto sviluppo in serie di Taylor della soluzione approssimata y_{n+1}, y'_{n+1}.

□

DEFINIZIONE 1. *Chiameremo metodo di Nyström economizzato, che indichiamo con NE, un metodo della classe* (4.1) *che soddisfa le ipotesi del teorema 1.*

Osserviamo che per il teorema 2 possiamo sostituire K_1 del passo corrente con K_{s-1} del passo precedente, quindi dopo il primo i NE calcolano uno stadio in meno per passo.

TEOREMA 3. *Per $s = 5, 6$, i metodi di Nyström economizzati coincidono con le prime formule delle tabelle* 4, 6.

DIM. Da ([4]), per i casi considerati, si verifica che per opportuna scelta dei parametri liberi, i metodi classici di Nyström soddisfacenti le ipotesi del teorema 1, coincidono con la prima formula delle tabelle 4, 6.

□

5 – Stabilità numerica

Per studiare le proprietà di stabilità numerica, applichiamo il metodo

$$(5.1)\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hy'_n+h^2\sum\limits_{i=0}^{s}\alpha_iK_{i,n} \\ hy'_{n+1}=hy'_n+h^2\sum\limits_{i=0}^{s}\alpha'_iK_{i,n} \\ h^2K_{i,n}=\frac{h^2}{2}f\left(x_n+\mu_ih,\, y_n+\mu_ihy'_n+h^2\sum\limits_{j=0}^{s}\lambda_{ij}K_{j,n-1}+h^2\sum\limits_{j=0}^{i-1}\rho_{ij}K_{j,n}\right) \end{cases}$$

al problema test

$$(5.2)\qquad \begin{cases} y''=-\lambda^2y & \lambda>0 \\ y(0)=y_0 \\ y'(0)=y'_0 \end{cases}$$

TEOREMA 4. *Applicando il metodo* (5.1) *al problema test* (5.2) *si ottiene*

$$(5.3)\qquad \begin{cases} y_{n+1}=P(z)y_n+Q(z)hy'_n+h^2\sum\limits_{i=0}^{s}T_i(z)K_{i,n-1} \\ hy'_{n+1}=P'(z)y_n+Q'(z)hy'_n+h^2\sum\limits_{i=0}^{s}T'_i(z)K_{i,n-1} \\ h^2K_{in}=L_i(z)y_n+M_i(z)hy'_n+h^2\sum\limits_{j=0}^{s}V_{ij}(z)K_{i,n-1} \end{cases}$$

dove $z=h\lambda$

$$(5.4)\begin{cases} P(z)=1+\sum\limits_{i=0}^{s}\alpha_iL_i(z) \\ Q(z)=1+\sum\limits_{i=0}^{s}\alpha_iM_i(z) \\ T_i(z)=\sum\limits_{j=0}^{s}\alpha_jV_{ji}(z)\quad i=0,\dots,s \end{cases} \qquad \begin{cases} P'(z)=\sum\limits_{i=0}^{s}\alpha'_iL_i(z) \\ Q'(z)=1+\sum\limits_{i=0}^{s}\alpha'_iM_i(z) \\ T'_i(z)=\sum\limits_{j=0}^{s}\alpha'_jV_{ji}(z)\quad i=0,\dots,s \end{cases}$$

e

$$
(5.5)\quad \begin{cases} L_i(z) = L_0(z)\left[1 + \sum\limits_{j=0}^{i-1} \rho_{ij} L_j(z)\right] & i = 1, \dots, s \\[2ex] M_i(z) = L_0(z)\left[\mu_i + \sum\limits_{j=0}^{i-1} \rho_{ij} M_j(z)\right] & i = 1, \dots, s \\[2ex] V_{ij}(z) = L_0(z)\left[\lambda_{ij} + \sum\limits_{l=0}^{i-1} \rho_{il} V_{lj}(z)\right] & i = 1, \dots, s \quad j = 0, \dots, s \end{cases}
$$

dove

$$
(5.6)\quad \begin{cases} L_0(z) = -\dfrac{z^2}{2} \\ M_0(z) = L_0(z)\mu_0 \\ V_{0j}(z) = L_0(z)\lambda_{0j} \quad j = 0, \dots, s \end{cases}
$$

DIM. Poniamo $z = h\lambda$, applichiamo (5.1) e (5.2) e calcoliamo

$$
(5.7)\quad \begin{aligned} h^2 K_{0n} &= -\frac{z^2}{2} y_n - \frac{z^2}{2} \mu_0 h y_n' - \frac{z^2}{2} h^2 \sum_{j=0}^{s} \lambda_{0j} K_{j,n-1} = \\ &= L_0(z) y_n + M_0(z) h y_n' + h^2 \sum_{j=0}^{s} V_{0j} K_{j,n-1} \end{aligned}
$$

da cui (5.6).
Analogamente calcoliamo $h^2 K_{1n}$ tenendo conto di (5.7)

$$
\begin{aligned} h^2 K_{1n} &= -\frac{z^2}{2}\left[y_n + h\mu_1 y_n' + h^2 \sum_{j=0}^{s} \lambda_{1j} K_{j,n-1} + h^2 \rho_{10} K_{0n}\right] = \\ &= L_1(z) y_n + M_1(z) h y_n' + h^2 \sum_{j=0}^{s} V_{1j} K_{j,n-1} \end{aligned}
$$

con $L_1(z)$, $M_1(z)$, $V_{1j}(z)$ come in (5.5) per $i = 1$.

Supponiamo ora le (5.5) vere per i e calcoliamo

$$h^2K_{i+1,n}=-\frac{z^2}{2}\left[y_n+h\mu_{i+1}y'_n+h^2\sum_{j=0}^{s}\lambda_{i+1,j}K_{j,n-1}+h^2\sum_{j=0}^{i}\rho_{i+1,j}K_{jn}\right]=$$

$$=y_nL_0(z)\left[1+\sum_{j=0}^{i}\rho_{i+1,j}L_j(z)\right]+hy'_nL_0(z)\left[\mu_{i+1}+\sum_{j=0}^{i}\rho_{i+1,j}M_j(z)\right]+$$

$$+h^2\sum_{j=0}^{s}L_0(z)\left[\lambda_{i+1,j}+\sum_{r=0}^{i}\rho_{i+1,r}V_{rj}(z)\right]K_{j,n-1}=$$

$$=L_{i+1}(z)y_n+M_{i+1}(z)hy'_n+h^2\sum_{j=0}^{s}V_{i+1,j}(z)K_{j,n-1}\,. \qquad \square$$

Posto

$$u_n=\left[y_n,hy'_n,h^2K_{0,n-1},\dots,h^2K_{s,n-1}\right]^T$$

da (5.3) troviamo

$$u_{n+1}=Cu_n$$

con

$$C=\begin{pmatrix} P(z) & Q(z) & T_0(z) & T_1(z) & \cdots & \cdots & T_s(z)\\ P'(z) & Q'(z) & T'_0(z) & T'_1(z) & \cdots & \cdots & T'_s(z)\\ L_0(z) & M_0(z) & V_{00}(z) & V_{01}(z) & \cdots & \cdots & V_{0s}(z)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ L_s(z) & M_s(z) & V_{s0}(z) & V_{s1}(z) & \cdots & \cdots & V_{ss}(z) \end{pmatrix}$$

Ricordando che, posto

$$Y_k=\left[y(x_k),y'(x_k)\right]^T$$

per la soluzione di (5.2) si ha

$$Y_{k+1}=e^{Ah\lambda}Y_k$$
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda^2 & 0\end{pmatrix}$$

diremo che il metodo (5.1) è assolutamente stabile nell'intervallo

$$S = \left\{ z \in \mathbb{R} / |\lambda_i(z)| \leq 1 \right\}$$

dove $\lambda_i(z)$ $i = 1, s+3$ sono gli autovalori della matrice C.

6 – Esempi

$\boxed{\mathbf{s = 0}}$

Per il metodo

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2 K_{0,n} \\ y'_{n+1} = y'_n + 2h_n K_{0,n} \\ K_{0,n} = \frac{1}{2} f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}h_n y'_n + \frac{1}{4}h_n^2 K_{0,n-1}\right) \\ K_{0,-1} = \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \end{cases}$$

posto

$$u_n = \left[y_n, hy'_n, h^2 K_{0,n-1}\right]^T$$

si ha

$$C = \begin{pmatrix} P(z) & Q(z) & T_0(z) \\ P'(z) & Q'(z) & T'_0(z) \\ L_0(z) & M_0(z) & V_{00}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z^2}{2} & 1 - \frac{z^2}{4} & -\frac{z^2}{8} \\ -z^2 & 1 - \frac{z^2}{2} & -\frac{z^2}{4} \\ -\frac{z^2}{2} & -\frac{z^2}{4} & -\frac{z^2}{8} \end{pmatrix}$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^3 + a(z)\lambda^2 + b(z)\lambda + c(z) = 0$$

con

$$a(z) = \frac{9}{8}z^2 - 2 \qquad b(z) = 1 - \frac{z^2}{4} \qquad c(z) = \frac{z^2}{8}.$$

Effettuando la trasformazione $\lambda = \dfrac{1+w}{1-w}$ che trasforma $|\lambda| \leq 1$ in $\mathrm{Re}(w) \leq 0$ si ha

$$d_0(z)w^3 + d_1(z)w^2 + d_2(z)w + d_3(z) = 0$$

con

$$\begin{aligned} d_0(z) &= 1 - a(z) + b(z) - c(z) = 4 - \frac{3}{2}z^2 \\ d_1(z) &= 3 - a(z) - b(z) + 3c(z) = 4 - \frac{z^2}{2} \\ d_2(z) &= 3 + a(z) - b(z) - 3c(z) = z^2 \\ d_3(z) &= 1 + a(z) + b(z) + c(z) = z^2 \end{aligned}$$

Applicando il criterio di Hurwitz, risulta $\mathrm{Re}(w) \leq 0$ se e solo se $d_0(z) > 0$, $d_1(z) \geq 0$, $d_3(z) \geq 0$, $d_1(z)d_2(z) - d_0(z)d_3(z) \geq 0$ da cui ricaviamo l'intervallo di stabilità

$$0 < z < \sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 1.632993\,.$$

Tale intervallo, se confrontato con l'analogo del metodo di Nyström, ([5]) del secondo ordine, $0 < z < 2$, risulta di poco meno ampio.

$\boxed{s = 1}$

Per il metodo

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n y'_n + h_n^2(\alpha_0 K_{0,n} + \alpha_1 K_{1,n}) \\ y'_{n+1} = y'_n + h_n(\alpha'_0 K_{0,n} + \alpha'_1 K_{1,n}) \\ K_{0,n} = \frac{1}{2} f(x_n + \mu_0 h_n, y_n + \mu_0 h_n y'_n + h_n^2(\lambda_{00} K_{0,n-1} + \lambda_{01} K_{1,n-1})) \\ K_{1,n} = \frac{1}{2} f(x_n + \mu_1 h_n, y_n + \mu_1 h_n y'_n + h_n^2(\rho_{10} K_{0,n} + \lambda_{10} K_{0,n-1} + \lambda_{11} K_{1,n-1})) \\ K_{i,-1} = \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \qquad i = 0, 1 \end{cases}$$

(con i coefficienti come in tabella 3) risulta

$$C=\begin{pmatrix} 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24} & 1-\frac{z^2}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{144}z^4 & -\frac{1+\sqrt{3}}{24}z^2+\frac{5-\sqrt{3}}{288}z^4 & -\frac{1-\sqrt{3}}{288}z^4 \\ -z^2+\frac{3+\sqrt{3}}{24}z^4 & 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24} & -\frac{1}{6}z^2+\frac{6+\sqrt{3}}{144}z^4 & \frac{z^2}{12}+\frac{\sqrt{3}}{144}z^4 \\ -\frac{z^2}{2} & -\frac{3-\sqrt{3}}{12}z^2 & -\frac{5-\sqrt{3}}{24}z^2 & \frac{1-\sqrt{3}}{24}z^2 \\ -\frac{z^2}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{24}z^4 & -\frac{3+\sqrt{3}}{12}z^2+\frac{z^4}{24} & \frac{1-\sqrt{3}}{24}z^2+\frac{6+\sqrt{3}}{144}z^4 & \frac{1+\sqrt{3}}{24}z^2+\frac{\sqrt{3}}{144}z^4 \end{pmatrix}$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda(\lambda^3+a(z)\lambda^2+b(z)\lambda+c(z))=0$$

con

$$a(z)=-\frac{12+\sqrt{3}}{144}z^4+\frac{14-\sqrt{3}}{12}z^2-2$$

$$b(z)=\frac{15-11\sqrt{3}}{96}z^4-\frac{2-\sqrt{3}}{6}z^2+1$$

$$c(z)=\frac{1}{48}z^4+\frac{2-\sqrt{3}}{12}z^2$$

$$d(z)=-\frac{3+\sqrt{3}}{288}z^4.$$

Effettuiamo la trasformazione $\lambda=\frac{1+w}{1-w}$ e studiamo le radici del polinomio

$$d_0(z)w^4+d_1(z)w^3+d_2(z)2+d_3(z)w+d_4(z)=0$$

con

$$d_0(z)=\frac{15-8\sqrt{3}}{72}z^4-\frac{5-\sqrt{3}}{3}z^2+4$$

$$d_1(z)=\frac{9+\sqrt{3}}{36}z^4-2z^2+8$$

$$d_2(z)=-\frac{9-5\sqrt{3}}{24}z^4+\frac{2-\sqrt{3}}{3}z^2+4$$

$$d_3(z)=-\frac{1}{6}z^4+2z^2$$

$$d_4(z)=\frac{1-3\sqrt{3}}{24}z^4+z^2.$$

Procedendo come nel caso precedente si trova l'intervallo di stabilità

$$0 < z < 1.97307\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] C. COSTABILE - F. COSTABILE - M.I. GUALTIERI: *Generalizzazione dei metodi di Nyström*, Rend. di Matem. Serie VII Vol. 11, Roma (1991), 447-469.

[2] E. FEHLBERG: *Classical eight and lower order Runge-Kutta-Nyström formulas with stepsize control for special second order differential equations*, NASA T.R. (1972), 381.

[3] J. DORMAND - P. PRINCE: *New Runge-Kutta algorithmes for numerical simulations in Dinamical Astronomy*, Celestial Mechanics vol. 18 (1978), 223.

[4] E. HAIRER: *Méthodes de Nyström pour l'équation différentielle $y'' = f(x,y)$*, Numer. Math. 27 (1977), 283-300.

[5] M. CHAWLA - S. SHARMA: *Intervals of periodicity and absolute stability of explicit Nyström methods for $y'' = f(x,y)$*, BIT 21 (1981), 455-464.

[6] J.M. FINE: *Low order practical Runge-Kutta-Nyström methods*, Computing 28 (1987), 281-297.

[7] F. COSTABILE - M.I. GUALTIERI: *Metodi economizzati di Nyström*, XIV Congresso U.M.I. Catania 1991.

Lavoro pervenuto alla redazione il 20 dicembre 1991
ed accettato per la pubblicazione il 7 maggio 1992
su parere favorevole di L. Gori e di D. Trigiante

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

F. Costabile - M.I. Gualtieri - A. Scalise - Dipartimento di Matematica - Università della Calabria - 87030 Rende (CS) - Italia