Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 17, Roma (1997), 265-304

Solution d'une équation différentielle non linéaire avec un terme qui explose

P. LANCIANI

RIASSUNTO: *Si dimostra l'esistenza della soluzione di un problema ellittico unidimensionale con un termine non lineare sul quale si fanno delle ipotesi molto deboli (né di continuità né di crescenza): questo termine può "esplodere", assumendo i valori* $\pm\infty$.

ABSTRACT: *We prove the existence of a solution for an elliptic problem in dimension* $n = 1$, *which involves a non linear term for which neither continuity nor growth condition is assumed: this term can "blow up", taking values* $\pm\infty$.

1 – Introduction et énoncé des résultats

On s'intéresse au problème suivant

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(a(x)\dfrac{du}{dx} + \Phi(u)\Big) = -\dfrac{dg}{dx} & \text{dans } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où Φ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et où g appartient à $L^2(0,1)$.

KEY WORDS AND PHRASES: *Non linear elliptic partial differential equations – Existence – Unbounded perturbation*
A.M.S. CLASSIFICATION: 35J20 – 35J25 – 35J60

L'objectif de cet article est d'essayer de montrer qu'il existe une solution du problème (1.1) sans faire d'hypothèse de continuité ni de croissance sur la fonction Φ, et d'étudier la stabilité de cette solution par rapport aux données.

Il est naturel de chercher la solution dans l'espace $H_0^1(0,1)$, car $\frac{dg}{dx}$ appartient à $H^{-1}(0,1)$ et, pour des problèmes approchés, on obtient une estimation a priori dans $H_0^1(0,1)$. Alors u est définie en tout point de $[0,1]$, car on est en dimension 1 et $H_0^1(0,1)$ est inclus dans $C^0([0,1])$. Et puisque dans toute cet article, la fonction Φ sera considérée comme une fonction définie en tout point de $\mathbb{R}$ (et non comme une classe de fonctions définies presque partout), $\Phi(u)$ est une fonction définie en tout point de $[0,1]$. Mais même dans le cas où Φ est bornée et constante par morceaux, le problème (1.1) peut ne pas avoir de solutions (voir un contre exemple au paragraphe 4).

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 3 on démontre l'existence d'une solution pour un problème qui est une formulation affaiblie du problème (1.1). Plus précisément on démontre qu'il existe un couple (u,ψ) qui vérifie

$$u \in H_0^1(0,1) \quad \text{et} \quad \psi \in L^2(0,1) \tag{1.2}$$

$$-\frac{d}{dx}\Big(a(x)\frac{du}{dx} + \psi\Big) = -\frac{dg}{dx} \quad \text{dans } H^{-1}(0,1) \tag{1.3}$$

$$\underline{\Phi}(u(x)) \le \psi(x) \le \overline{\Phi}(u(x)) \quad \text{p.p. } x \in (0,1) \tag{1.4}$$

où $\underline{\Phi}$ et $\overline{\Phi}$ sont définis par

$$\underline{\Phi}(t) = \liminf_{s \longrightarrow t} \Phi(s) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi}(t) = \limsup_{s \longrightarrow t} \Phi(s)$$

ainsi que l'inégalité d'énergie

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)dx \le \int_0^1 g(x)\,\frac{du}{dx}\,S'(u)dx \tag{1.5}$$

pour chaque fonction $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, C^1 par morceaux, croissante, telle que $S(0) = 0$.

Remarquons que si Φ est continue en tout point $t \in \mathbb{R}$, alors $\underline{\Phi}(t) = \overline{\Phi}(t)$ et que l'on a $\psi(x) = \Phi(u(x))$: la contrainte (1.4) est donc bien une version affaiblie de $\psi = \Phi(u)$. Notons aussi que la solution, dont nous démontrons l'existence, vérifie l'inégalité d'énergie (1.5).

La démonstration de ce résultat est basée sur la méthode directe du calcul des variations. On considère des approximations de (1.1), on démontre des estimations a priori et on passe à la limite (dans $H_0^1(0,1)$ faible pour ce qui concerne la suite u_ε). Ensuite si on fait des hypothèse plus fortes sur la fonction Φ (plus précisément si on suppose que l'ensemble des points de discontinuité de Φ est négligeable dans $\mathbb{R}$), on montre que la suite u_ε converge fortement dans $H_0^1(0,1)$ (voir corollaire 3.2). De plus on montre que, sous cette hypothèse sur l'ensemble de discontinuité de Φ, la solution u de (1.2)-(1.4) vérifie l'égalité d'énergie suivante:

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)dx = \int_0^1 g(x)\,\frac{du}{dx}\,S'(u)dx \tag{1.6}$$

pour chaque fonction $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, C^1 par morceaux, telle que $S(0) = 0$ (voir corollaire 3.1).

Au paragraphe 4 on donne un contre exemple à l'existence d'une solution de (1.1), ce qui correspondrait à prendre $\psi = \Phi(u)$ dans (1.3).

Au paragraphe 2 on démontre un lemme qui sera utilisé ensuite pour démontrer l'existence et aussi la stabilité des solutions de (1.1) (solutions prises au sens de (1.2)-(1.4) et (1.5) ou (1.6)).

Cette stabilité est étudiée dans le paragraphe 5: on commence par le cas où le second membre de (1.3) converge dans $H^{-1}(0,1)$ faible (théorème 5.1); on montre alors la stabilité des solutions de (1.2)-(1.4). Ensuite on montre la stabilité des solutions de (1.2)-(1.4) qui vérifient aussi l'inégalité d'énergie (1.5), quand le deuxième membre de (1.3) converge dans $H^{-1}(0,1)$ fort (théorème 5.2). Le théorème 5.3 montre la stabilité des solutions qui vérifient l'égalité d'énergie (1.6), dans le cas où l'ensemble des points de discontinuité de Φ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

Enfin dans le paragraphe 6, on démontre la stabilité de la solution de (1.2)-(1.5) quand le second membre g est fixe et quand la fonction a est remplacée par une suite a_n telle que a_n^{-1} converge dans $L^\infty(0,1)$ faible-étoile.

L'existence de solutions faibles pour des problèmes analogues à (1.1), en dimension $n \geq 1$, a été démontrée dans [4], pour Φ continue et satisfaisant une condition de croissance du type $|\Phi(t)| \leq c(1 + |t|^\gamma)$, avec

$\gamma > 0$; dans le même article est demontrée l'existence de solutions renormalisées quand Φ est seulement continue. L'existence et l'unicité d'une solution renormalisée, quand $\frac{dg}{dx}$ appartient à $H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$, pour Ω domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et Φ fonction localement lipschitzienne, ont été montrées en dimension $n \geq 1$ dans [11]. Dans [5] un problème voisin du problème (1.1) a été étudié, en dimension $n = 2$, pour Φ fonction de Heaviside et un résultat d'existence analogue à celui du théorème 3.1 a été démontré. Dans [7] on donne un résultat d'existence de la solution de (1.1) en dimension $n \geq 1$ et pour une fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue; si de plus la fonction ϕ est lipschitzienne ou hölderienne d'ordre $\beta \leq \frac{1}{2}$, on démontre dans le même article que la solution est unique; on y donne aussi des contre exemples à l'unicité de la solution, pour des conditions aux limites non homogènes, pour une fonction Φ qui n'est pas continue ou pour une Φ continue, mais ni lipschitzienne ni monotone. Dans [8] on étudie le problème (1.1), en dimension $n \geq 1$, avec $\Phi = \beta + \mu H$, où β est une fonction continue, μ un vecteur constant de $\mathbb{R}^n$ et H la fonction de Heaviside. On démontre alors qu'il existe une solution du problème (1.1) au sens de (1.2), (1.3) et (1.4), plus précisément on démontre qu'il existe une solution du problème

$$(1.7) \qquad \begin{cases} (u,h) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad \text{tel que} \\ -\triangle\, u - \operatorname{div}(\beta(u) + \mu h) = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad (f \in L^2(\Omega)) \\ h \in \mathrm{sgn}^+(\mathrm{u}) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\,, \end{cases}$$

où $\mathrm{sgn}^+(\mathrm{u}) = 1$ si $u > 0$, $\mathrm{sgn}^+(\mathrm{u}) = 0$ si $\mathrm{u} < 0$, $\mathrm{sgn}^+(\mathrm{u}) \in [0,1]$ si $\mathrm{u} = 0$; ensuite, si $f \geq 0$, on démontre l'existence et l'unicité de la solution de Kruskov, c'est à dire d'un couple (u,h), solution du problème (1.7), qui vérifie l'inégalité

$$\int_\Omega (Du + \beta(u) + (h-\lambda)^+\mu) \cdot D\xi \leq \int_{[|\mu| g \geq |\mu|\lambda]} f\xi$$

pout tout $\lambda \in [0,1]$, pour tout $\xi \in H^1(\Omega)$, $\xi \geq 0$.

2 – Un lemme

Dans ce paragraphe on démontre un lemme qui sera utilisé dans les démontrations d'existence et de stabilité.

Lemme 2.1. *Soit u_n une suite de fonctions continues dans $[0,1]$ telle que*

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{dans} \quad C^0([0,1])\,. \tag{2.1}$$

Soit $\hat{\Phi}$ et $\check{\Phi}$ deux fonctions boréliennes et soit $\Phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions boréliennes telle que

$$\check{\Phi}(t) \leq \liminf_n (\underline{\Phi}_n(t)) \leq \limsup_n (\overline{\Phi_n}(t)) \leq \hat{\Phi}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.2}$$

Soit enfin ψ_n une suite de fonctions mesurables telles que

$$\underline{\Phi}_n(u_n(x)) \leq \psi_n(x) \leq \overline{\Phi_n}(u_n(x)) \quad p.p. \quad x \in (0,1)\,. \tag{2.3}$$

Alors pour tout point $x_0 \in (0,1)$ fixé et pour chaque $k > 0$, il existe N_k^0 et β_k^0 (qui dépendent de k et de la valeur de u au point x_0) tels que

$$\begin{cases} \check{\Phi}(u(x_0)) - \dfrac{1}{k} \leq \psi_n(x) \leq \hat{\Phi}(u(x_0)) + \dfrac{1}{k} \\ \forall\, n \geq N_k^0 \quad et \quad p.p. \quad x \in (x_0 - \beta_k^0, x_0 + \beta_k^0)\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Démonstration. Puisque la suite des u_n converge uniformément vers u dans $[0,1]$ on a pour tout point $x_0 \in (0,1)$

$$\begin{cases} \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, n_\delta \quad \text{et} \quad \exists\, \beta_\delta \quad \text{tels que} \\ |u_n(x) - u(x_0)| < \delta\,, \quad \forall\, x \in (x_0 - \beta_\delta, x_0 + \beta_\delta) \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq n_\delta\,, \end{cases} \tag{2.5}$$

où n_δ et β_δ ne dépendent pas de x_0. Si on prend $\varepsilon \leq \delta$ on obtient

$$\begin{cases} (u_n(x) - \varepsilon, u_n(x) + \varepsilon) \subseteq (u(x_0) - 2\delta, u(x_0) + 2\delta) \\ \forall\, x \in (x_0 - \beta_\delta, x_0 + \beta_\delta) \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq n_\delta \quad \text{et} \quad \forall\, \varepsilon \leq \delta\,, \end{cases} \tag{2.6}$$

donc on a

$$\begin{cases} \displaystyle\sup_{|t - u_n(x)| \leq \varepsilon} \Phi_n(t) \leq \sup_{|t - u(x_0)| \leq 2\delta} \Phi_n(t) \\ \forall\, n \geq n_\delta \quad \forall\, x \in (x_0 - \beta_\delta, x_0 + \beta_\delta) \quad \forall\, \varepsilon \leq \delta\,. \end{cases}$$

En passant à la limite quand ε tend vers zéro, on obtient, par la définition de la limite supérieure,

$$\overline{\Phi_n}(u_n(x)) \leq \sup_{|t-u(x_0)|\leq 2\delta} \Phi_n(t)\,,$$

ce qui, d'après (2.3), implique que pour tout $x_0 \in (0,1)$

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \psi_n(x) \leq \sup\limits_{|t-u(x_0)|\leq 2\delta} \Phi_n(t) \\ \forall\, n \geq n_\delta \quad \text{et} \quad \text{p.p.} \quad x \in (x_0-\beta_\delta, x_0+\beta_\delta)\,. \end{cases}$$

D'autre part, d'après (2.2) on sait que pour x_0 fixé

$$(2.8) \quad \begin{cases} \forall\, k>0 \quad \exists\, n_k^0 \quad \text{et} \quad \exists\, \delta_k^0 \quad \text{tels que} \\ \sup\limits_{|t-u(x_0)|\leq 2\delta} \Phi_n(t) \leq \hat{\Phi}(u(x_0)) + \dfrac{1}{k} \qquad \forall\, n \geq n_k^0 \quad \text{et} \quad \forall\, \delta \leq \delta_k^0\,, \end{cases}$$

où n_k^0 et δ_k^0 dépendent de la valeur $u(x_0)$. Une fois fixés $x_0 \in (0,1)$ et $k>0$, on choisit un N_k^0 =max$(n_k^0, n_{\delta_k^0})$ et $\beta_k = \beta_{\delta_k^0}$, où $n_{\delta_k^0}$ et $\beta_{\delta_k^0}$ sont définis en (2.5) en fonction de δ_k^0, et on a d'après (2.7) et (2.8)

$$(2.9) \quad \psi_n(x) \leq \hat{\Phi}(u(x_0)) + \frac{1}{k} \quad \forall\, n \geq N_k^0 \;\text{ et }\; \text{p.p.} \;\; x \in (x_0-\beta_k^0, x_0+\beta_k^0)\,.$$

On procède de la même façon avec la limite inférieure et on obtient pour tout $x_0 \in (0,1)$ fixé

$$(2.10) \quad \psi_n(x) \geq \check{\Phi}(u(x_0)) - \frac{1}{k} \quad \forall\, n \geq N_k^0 \;\text{ et }\; \text{p.p.} \;\; x \in (x_0-\beta_k^0, x_0+\beta_k^0)\,.$$

Le lemme est ainsi démontré. $\square$

3 – Existence d'une solution

Dans ce paragraphe on montre l'existence d'une solution du problème (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5), qui est une formulation affaiblie du problème (1.1). De plus, quand l'ensemble des points de discontinuité de Φ est négligeable dans $\mathbb{R}$, on montre des proprietés de convergence forte et l'égalité d'énergie (1.6).

Théorème 3.1. *On suppose que*

(3.1) $$g \in L^2(0,1)$$

(3.2) $$a \in L^\infty(0,1) \quad \textit{avec} \quad a(x) \geq \alpha > 0 \quad \textit{p.p. } x \in (0,1)\,, \ (\alpha > 0 \quad \textit{donné})$$

(3.3) $$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{borélienne}\,,$$

(3.4) $$|\Phi(t)| \leq m \quad \forall\, t \in [-\gamma, \gamma]$$

pour $m > 0$ et $\gamma > 0$ donnés.

Alors il existe u et ψ tels que

(3.5) $$u \in H_0^1(0,1) \quad \textit{et} \quad \psi \in L^2(0,1)$$

(3.6) $$-\frac{d}{dx}\Big(a(x)\frac{du}{dx} + \psi\Big) = -\frac{dg}{dx} \quad \textit{dans } H^{-1}(0,1)$$

(3.7) $$\underline{\Phi}(u(x)) \leq \psi(x) \leq \overline{\Phi}(u(x)) \quad \textit{p.p.}\, x \in (0,1)$$

où $\underline{\Phi}$ et $\overline{\Phi}$ sont définis par

$$\underline{\Phi}(t) = \liminf_{s \longrightarrow t} \Phi(s) \quad \textit{et} \quad \overline{\Phi}(t) = \limsup_{s \longrightarrow t} \Phi(s)\,;$$

de plus cette solution u vérifie

(3.8) $$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)dx \leq \int_0^1 g(x)\,\frac{du}{dx}\,S'(u)dx$$

pour tout $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, C^1 par morceaux, croissante, telle que $S(0) = 0$.

Ce théorème assure l'existence d'une solution de (1.1) au sens de (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8). L'unicité de cette solution est, en général, un problème ouvert.

Remarque 3.1. Si on prend $S(u) = u$ dans (3.8), ce qui est possible, on obtient

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 dx \leq \int_0^1 g(x)\frac{du}{dx}\,dx$$

ce qui entraîne, grâce à la coercivité, une estimation sur la norme de u dans $H_0^1(0,1)$ par rapport à la donnée g:

$$\left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \, \|g\|_{L^2(0,1)} \,. \tag{3.9}$$ ∎

Remarque 3.2. En général on ne peut pas espérer avoir $\psi = \Phi(u)$, même dans le cas où Φ est bornée (voir un contre exemple au paragraphe 4).

Par contre on peut remarquer que si Φ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\underline{\Phi}\ (t) = \overline{\Phi}\ (t)$ en tout point de $\mathbb{R}$ et le théorème 3.1 implique que

$$\psi(x) = \Phi(u)(x) \qquad \text{p.p. } x \in (0,1)\,,$$

donc

$$\Phi(u) \in L^2(0,1) \quad \text{et donc} \ \ \mathrm{mes}\{x \in (0,1) \mid \quad |\Phi(u)(x)| = \infty\} = 0\,.$$ ∎

Remarque 3.3. L'hypothèse (3.4) peut être considerée comme minimale pour l'existence d'une solution du problème (1.1).

On va en effet expliciter une fonction Φ continue (de sorte que ψ serait égal à $\Phi(u)$ à cause de (3.7)), non bornée au voisinage de zéro, pour laquelle le problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(0,1) \quad \Phi(u) \in L^1_{loc}(0,1) \\ -\dfrac{d}{dx}\Big(a(x)\dfrac{du}{dx} + \Phi(u)\Big) = -\dfrac{dg}{dx} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,1) \end{cases} \tag{3.10}$$

n'a pas de solution.

Pour construire ce contre exemple on remarque d'abord que si u est une solution de (3.10), il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$a(x)\frac{du}{dx} + \Phi(u) \;=\; g + c\,.$$

et donc, par différence, $\Phi(u)$ doit appartenir à $L^2(0,1)$. Mais si on considère par exemple la fonction

$$\Phi(t) = \frac{1}{|t|^\beta} \quad \text{avec} \quad \beta \geq 1\,,$$

alors pour chaque $u \in H_0^1(0,1)$ la fonction $\Phi(u)$ n'appartient pas à $L^2(0,1)$, parce que $H_0^1(0,1)$ est inclus dans $C^{0,\frac{1}{2}}([0,1])$, ce qui implique

$$|u(x)| \leq C|x|^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, x \in [0,1]\,,$$

et

$$\int_0^1 |\Phi(u)(x)|^2\, dx = \int_0^1 \frac{1}{|u(x)|^{2\beta}} dx \geq \frac{1}{C}\int_0^1 \frac{1}{|x|^{\beta}} dx = +\infty\,. \qquad \square$$

Remarque 3.4. On vient de voir que l'hypothèse (3.4) est en un certain sens minimale. Mais s'il existe un intervalle $[a,b]$, avec $-\infty < a < 0 < b < +\infty$, tel que

$$\Phi(t) \text{ est fini } \forall\, t \in (a,b) \tag{3.11}$$

$$|\Phi(a)| = +\infty \quad |\Phi(b)| = +\infty \tag{3.12}$$

$$\Phi \text{ est continue en } a \text{ et } b \tag{3.13}$$

alors, si g appartient à $L^\infty(0,1)$, on peut montrer que toute solution u de (3.5)-(3.7) vérifie

$$a < u(x) < b \quad \forall\, x \in [0,1]\,. \tag{3.14}$$

Sous les hypothèses (3.11)-(3.13) on est donc dans une situation où $\Phi(u(x))$ appartient à $L^\infty(0,1)$.

Démontrons que sous les hypothèses (3.11)-(3.13), si par exemple $\Phi(a) = +\infty$, on a $u(x) > a$ dans $[0,1]$. Soit x_0 un point dans $[0,1]$ tel que $u(x_0) = a$. Puisque Φ est continue au point a et $\Phi(a) = +\infty$, on a

$$\forall\, M > 0\; \exists\, \delta_M > 0 \quad \text{tel que} \quad \underline{\Phi}(t) \geq M, \quad \forall\, t \in (a-\delta_M, a+\delta_M)\,.$$

Puisque u est continue dans $[0,1]$ alors, d'après (3.7), on a

$$\begin{cases} \forall\, M > 0\; \exists\, \delta_M > 0 \quad \text{et} \quad \exists\, \eta_M > 0 \quad \text{tels que} \\ |u(x) - a| < \delta_M \quad \text{et} \quad \psi(x) \geq M, \quad \text{p.p. } x \in (x_0 - \eta_M, x_0 + \eta_M)\,. \end{cases}$$

Si u est une solution de (3.5)-(3.7), il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$a(x)\frac{du}{dx} + \psi \;=\; g + c \quad \text{dans } L^2(0,1)\,.$$

Alors, puisque $(g+c)$ est bornée dans $(0,1)$ et puisque $\psi(x) \geq M = \|g+c\|_{L^\infty(0,1)}$ au voisinage de x_0, la fonction u est strictement décroissante dans $(x_0 - \eta_M, x_0 + \eta_M)$. On a donc montré que u est décroissante au voisinage de tout point x_0 tel que $u(x_0) = a$. S'il existe un tel point x_0, puisque $u(0) = u(1) = 0$ et $a < 0$, il existe forcément un autre point $x_1 > x_0$, tel que $u(x_1) = a$ avec u croissante dans un voisinage de x_1, ce qui est impossible. Donc

$$u(x) > a \quad \forall\, x \in \,[0,1]\,.$$

Les cas $\Phi(a) = -\infty$ et $\Phi(b) = \underline{+}\infty$ se traitent de la même façon. $\square$

Démonstration du Théorème 3.1. La démonstration de ce théorème comporte plusieurs étapes: on approche Φ par une suite de fonctions Φ_ε continues et bornées dans $\mathbb{R}$ et on montre qu'il existe une solution u_ε des problèmes correspondants; on démontre que u_ε est borné dans $H_0^1(0,1)$, puis que $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est borné dans $L^2(0,1)$ (ceci est un des points clé de la démonstration); finalement on passe à limite, quand ε tend vers zéro, dans le problème approché et on obtient (3.6). L'inégalité (3.7) découle du fait que l'on a choisit une approximation Φ_ε de Φ qui vérifie, par exemple dans le cas où $\overline{\Phi}(t_0)$ est fini, $|\Phi_\varepsilon(t)|\leq \overline{\Phi}(t_0) + \frac{1}{n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour ε et $|t - t_0|$ suffisamment petits: il suffit alors d'utiliser le lemme 2.1 pour passer à limite dans cette inégalité.

Première étape (approximation). On remarque que pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, le problème

$$\text{(3.15)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(a(x)\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\Big) - \dfrac{d}{dx}(\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)) = -\dfrac{dg}{dx} & \text{dans} \quad H^{-1}(0,1) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(0,1) \end{cases}$$

admet au moins une solution, quand Φ_ε est une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (utiliser par exemple le théorème de point fixe de Schauder).

On choisit désormais, comme fonction Φ_ε, la régularisée de la fonction Φ définie par

$$\Phi_\varepsilon(t) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi) * \rho_\varepsilon)(t)$$

où ρ_ε est une suite régularisante, qui vérifie donc

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \quad \rho_\varepsilon \geq 0, \quad supp\,(\rho_\varepsilon) \subseteq B(0,\varepsilon) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(s)\,ds = 1$$

et où la fonction $T_{\frac{1}{\varepsilon}}$ est définie par

$$T_{\frac{1}{\varepsilon}}(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad |t| \leq \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\,\text{sign (t)} & \text{si} \quad |t| \geq \dfrac{1}{\varepsilon}\,. \end{cases}$$

Deuxième étape (estimation $H_0^1(0,1)$). En prenant u_ε comme fonction test dans (3.15), on obtient

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big|^2 + \int_0^1 \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)\frac{du_\varepsilon}{dx} = \int_0^1 g\,\frac{du_\varepsilon}{dx}\,.$$

Si on défini la fonction

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(t) = \Big(\int_0^t \Phi_\varepsilon(s)\,ds\Big)\,,$$

alors $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ est $C^1(\mathbb{R})$ et lipschitzienne, et on a donc

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)\frac{du_\varepsilon}{dx} = \frac{d}{dx}(\tilde{\Phi}_\varepsilon(u_\varepsilon))\,,$$

alors

$$\int_0^1 \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)\frac{du_\varepsilon}{dx} = \tilde{\Phi}_\varepsilon(u_\varepsilon(1)) - \tilde{\Phi}_\varepsilon(u_\varepsilon(0)) = 0\,, \quad \text{car} \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0\,.$$

Grâce à la coercivité, on a donc

$$\alpha\int_0^1 \Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big|^2 \leq \|g\|_{L^2(0,1)}\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)} \qquad \forall\,\varepsilon > 0\,.$$

La suite u_ε est donc bornée dans $H_0^1(0,1)$ et il existe une fonction $u \in H_0^1(0,1)$ et une sous suite, encore notée ε, telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(0,1) \text{ faible et } u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ dans } C^0([0,1]) \text{ fort}. \tag{3.16}$$

Troisième étape (démonstration de (3.8)). On sait que si S est une fonction lipschitzienne, C^1 par morceaux, et telle que $S(0) = 0$, alors $S(v) \in H_0^1(0,1)$ pour chaque $v \in H_0^1(0,1)$ (voir par exemple [3], lemme 2.1). En prenant donc $S(u_\varepsilon)$ comme fonction test dans (3.15) on obtient

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big|^2 S'(u_\varepsilon)dx+\int_0^1 \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)\frac{du_\varepsilon}{dx}\, S'(u_\varepsilon)dx = \int_0^1 g\,\frac{du_\varepsilon}{dx}\, S'(u_\varepsilon)dx\,. \tag{3.17}$$

Si on pose

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(t) = \int_0^t \Phi_\varepsilon(s)S'(s)ds$$

alors

$$\int_0^1 \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)\frac{du_\varepsilon}{dx}S'(u_\varepsilon)dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\tilde{\phi}_\varepsilon(u_\varepsilon)dx = 0\,.$$

D'autre part, en utilisant le théorème de la convergence dominée pour la suite $S'(u_\varepsilon)$ et la convergence faible de $\frac{du_\varepsilon}{dx}$ dans $L^2(0,1)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^1 g\,\frac{du_\varepsilon}{dx}S'(u_\varepsilon)dx = \int_0^1 g\frac{du}{dx}\, S'(u)dx\,;$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^1 a(x)\,\Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big|^2 S'(u_\varepsilon)dx &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^1 g\,\frac{du_\varepsilon}{dx}\, S'(u_\varepsilon)dx = \\ &= \int_0^1 g\,\frac{du}{dx}\, S'(u)dx\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Or

$$\int_0^1 a(x)\,\Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}-\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u_\varepsilon)\,dx \geq 0$$

car, S étant croissante par hypothèse, $a(x)S'(u_\varepsilon(x)) \geq 0$ p.p. dans $(0,1)$; donc

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big|^2 S'(u_\varepsilon)dx \geq 2\int_0^1 a(x)\frac{du_\varepsilon}{dx}\frac{du}{dx}S'(u_\varepsilon)dx - \int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u_\varepsilon)dx$$

et en utilisant le théorème de la convergence dominée respectivement pour les suites $a(x)S'(u_\varepsilon)\frac{du}{dx}$ et $S'(u_\varepsilon)$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big|^2 S'(u_\varepsilon)\,dx \geq \int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)\,dx \tag{3.19}$$

et donc, d'après (3.18), on a l'inégalité d'énergie (3.8):

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S^{'}(u)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\frac{du}{dx}S^{'}(u)\,dx\,.$$

pour chaque fonction S croissante, lipschitzienne, C^1 par morceaux, telle que $S(0) = 0$.

Quatrième étape. On va montrer que la suite $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0,1)$. C'est une étape essentielle de la démonstration et la seule où l'on utilise l'hypothèse que Φ est bornée sur $[-\gamma,+\gamma]$.

On remarque que le problème (3.15) peut s'écrire:

$$a(x)\frac{du_\varepsilon}{dx} + \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = g + c_\varepsilon \tag{3.20}$$

où c_ε est une constante réelle. Puisque u_ε converge uniformément vers u dans $[0,1]$ et puisque $u(0) = 0$, on peut trouver un intervalle $(0,\delta^\gamma)$ et un ε_γ tels que

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \frac{\gamma}{2} \qquad \forall\, x \in [0,\delta^\gamma] \quad \text{et} \ \forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_\gamma\,.$$

Or par définition de Φ_ε,

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi(u_\varepsilon(x)-t))\rho_\varepsilon(t)\,dt\,;$$

et donc, puisque pour chaque $\varepsilon \leq \inf(\varepsilon_\gamma, \frac{\gamma}{2})$, $x \in [0,\delta^\gamma]$ et $t \in [-\varepsilon,+\varepsilon]$, on a

$$|u_\varepsilon(x) - t\,| \leq |u_\varepsilon(x)| + |t\,| < \Big(\frac{\gamma}{2} + \varepsilon\Big) < \gamma\,,$$

alors

$$|\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon(x))| \leq \sup_{s\in[-\gamma,\gamma]} |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi(s))|\,, \quad \forall\, \varepsilon \leq \inf\Big(\varepsilon_\gamma, \frac{\gamma}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0,\delta^\gamma]\,.$$

Si maintenant on prend ε suffisamment petit, plus précisément tel que $\frac{1}{\varepsilon} > \sup_{s\in[-\gamma,\gamma]}|\Phi(s)|$, alors on a, par définition de la fonction $T_{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\sup_{s\in[-\gamma,\gamma]}|T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi(s))| = \sup_{s\in[-\gamma,\gamma]}|\Phi(s)|$ et donc

$$|\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon(x))| \le \sup_{s\in[-\gamma,\gamma]}|\Phi(s)|\,, \quad \forall\,\varepsilon \le \inf\Big(\varepsilon_\gamma, \frac{\gamma}{2}, \Big(\sup_{s\in[-\gamma,\gamma]}|\Phi(s)|\Big)^{-1}\Big)$$
$$\text{et} \quad \forall\, x \in [0,\delta^\gamma]\,.$$

On a donc démontré que la suite $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est bornée sur l'intervalle $[0,\delta^\gamma]$. Grâce à (3.16) on déduit de (3.20) que la suite des constantes c_ε est bornée dans $L^2(0,\delta^\gamma)$ et donc dans $\mathbb{R}$, ce qui implique, encore par (3.16) et (3.20), que $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0,1)$.

Il existe alors une fonction ψ dans $L^2(0,1)$ et une nouvelle sous suite, encore notée ε, telle que

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup \psi \quad \text{dans } L^2(0,1)\,\text{faible}\,. \tag{3.21}$$

Cinquième étape. En utilisant (3.16) et (3.21) on peut maintenant passer à limite dans (3.15), quand ε qui tend vers zéro, et on obtient (3.6).

Sisième étape (démonstration de (3.7)). On considère le représentant de la fonction ψ, défini par ses points de Lebesgue: il existe un ensemble $Z \subseteq (0,1)$, de mesure nulle, tel que $\psi(x_0)$ est la limite des moyennes $\frac{1}{2R}\int_{x_0-R}^{x_0+R}\psi(x)dx$ en chaque point $x_0 \in ((0,1)-Z)$.

Soit $x_0 \in ((0,1)-Z)$. On va démontrer que $\psi(x_0) \le \overline{\Phi}(u(x_0))$. Pour cela on va d'abord montrer que

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, \varepsilon_n^0 \ \text{ et } \exists\, \beta_n^0 \ \text{ tel que } \quad \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) \le \overline{\Phi}(u(x_0)) + \dfrac{1}{n} \\ \forall\, \varepsilon \le \varepsilon_n^0 \ \text{ et } \ \forall\, x \in [x_0-\beta_n^0, x_0+\beta_n^0] \end{cases} \tag{3.22}$$

avec ε_n^0 et β_n^0 qui dépendent de n et de $u(x_0)$; ensuite on passera à la limite dans (3.22).

On utilise à cet effet le lemme 2.1, dans lequel on prend comme suite u_n la suite u_ε (qui converge uniformément vers u dans $[0,1]$), comme suite Φ_n la suite Φ_ε, comme suite ψ_n la suite $\psi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon \circ u_\varepsilon$ et enfin comme fonction $\hat{\Phi}$ la fonction $\overline{\Phi}$. Comme Φ_ε est continue, on a ici $\underline{\Phi_n}(t) = \overline{\Phi_n}(t) = \Phi_\varepsilon(t)$. La suite $\psi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon \circ u_\varepsilon$ vérifie alors l'hypothèse (2.3) car

$$\psi_\varepsilon(x) = (\Phi_\varepsilon \circ u_\varepsilon)(x) = \overline{\Phi_\varepsilon}(u_\varepsilon(x)) \qquad \forall\, x \in [0,1]\,.$$

Il reste donc à montrer que la suite Φ_ε vérifie l'hypothèse (2.2), c'est à dire que

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \Phi_\varepsilon(t) \leq \overline{\Phi}(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Il est évident que si $t_0 \in \mathbb{R}$ est un point tel que $\overline{\Phi}(t_0) = +\infty$, alors

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \Phi_\varepsilon(t_0) \leq \overline{\Phi}(t_0) = +\infty\,.$$

Si $t_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $|\overline{\Phi}(t_0)| < +\infty$, alors Φ est bornée supérieurement au voisinage de t_0 et il existe un ε_0 tel que, par définition de Φ_ε, on a

$$\Phi_\varepsilon(t_0) \leq \sup_{|t-t_0|<\varepsilon} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi(t)) = \sup_{|t-t_0|<\varepsilon} \Phi(t) \quad \forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

et en passant à la limite quand ε tend vers zéro, on obtient, d'après la définition de la limite supérieure

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \Phi_\varepsilon(t_0) \leq \overline{\Phi}(t_0)\,.$$

Enfin si $\overline{\Phi}(t_0) = -\infty$ on sait par la définition de la limite supérieure que l'on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \delta_n \quad \text{tel que} \ \ \forall\, s \in [t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n] \quad \text{on a} \quad \Phi(s) \leq -n\,.$$

Alors pour chaque $\varepsilon < \min(\frac{1}{n}, \delta_n)$ on a

$$\Phi_\varepsilon(t_0) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi(t_0 - t))\rho_\varepsilon(t)\, dt \ \leq \sup_{|s-t_0|<\delta_n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\Phi(s)) \leq -n\,;$$

donc

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \Phi_\varepsilon(t_0) \leq -n \qquad \forall\, n$$

c'est à dire

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \Phi_\varepsilon(t_0) \leq \overline{\Phi}(t_0) = -\infty\,.$$

Donc les fonctions $\Phi_\varepsilon \circ u_\varepsilon$, Φ_ε et $\overline{\Phi}$ vérifient les hypothèses du lemme 2.1, ce qui permet de conclure que l'on a (3.22).

Maintenant en passant à la limite faible dans $L^2(x_0 - \beta_n^0, x_0 + \beta_n^0)$, dans (3.22), on obtient, quand ε tend vers zéro,

$$\psi(x) \leq \overline{\Phi}(u(x_0)) + \frac{1}{n} \quad \text{p.p. dans } (x_0 - \beta_n^0, x_0 + \beta_n^0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

En considérant la moyenne $\frac{1}{2R}\int_{x_0-R}^{x_0+R}\psi(x)dx$ autour du point x_0, pour $R < \beta_n^0$, et en faisant tendre R vers zéro, on a

$$\psi(x_0) \leq \Phi(u(x_0)) + \frac{1}{n}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

c'est à dire

$$\psi(x_0) \leq \overline{\Phi}(u(x_0))\,. \tag{3.23}$$

On démontre de façon analogue que $\psi(x) \geq \underline{\Phi}(u(x))$ p.p. $x \in (0,1)$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.1. $\square$

Théorème 3.2. *Si l'ensemble des points de discontinuité de* Φ *est négligeable et si* u *est une solution de* (3.5)-(3.7), *on a*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \psi \, \frac{du}{dx}\, S'(u)dx = 0 \\ \forall\, S\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \textit{lipschitzienne }, C^1 \textit{par morceaux,} \\ \qquad\qquad\qquad \textit{telle que } S(0) = 0\,. \end{cases} \tag{3.24}$$

Démonstration. Soit N l'ensemble des points de discontinuité de Φ, *i.e.*

$$N = \{t \in \mathbb{R} \mid \underline{\Phi}(t) \neq \overline{\Phi}(t)\}\,.$$

On pose

$$E\ = \{x \in [0,1] \mid u(x) \in N\} = u^{-1}(N)\,.$$

On remarque que, d'après le théorème 3.1,

$$\Phi(u) = \psi \quad \text{ p.p. dans } \quad (0,1) - E\,.$$

D'autre part comme on a supposé N de mesure nulle, on a d'après [6], théorème 4.2,

$$\frac{du}{dx} = 0 \qquad \text{p.p. dans } E\,. \tag{3.25}$$

On a donc

$$\int_0^1 \psi \frac{du}{dx} S'(u) dx = \int_{(0,1)-E} \psi \frac{du}{dx} S'(u) dx = \int_{(0,1)-E} \Phi(u) \frac{du}{dx} S'(u) dx\,, \tag{3.26}$$

car $\underline{\Phi}(u(x)) = \overline{\Phi}(u(x))$ pour tout $x \in (0,1) - E$. De plus, puisque $\psi \in L^2(0,1)$, on a

$$\Phi(u) \in L^2((0,1) - E)\,,$$

donc la suite des troncatures $T_k(\Phi(u))$ converge vers $\Phi(u)$ dans $L^2((0,1) - E)$ fort; alors

$$\int_{(0,1)-E} \Phi(u) \frac{du}{dx} S'(u)\, dx = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{(0,1)-E} T_k(\Phi(u)) \frac{du}{dx} S'(u)\, dx\,. \tag{3.27}$$

Mais comme $\frac{du}{dx} = 0$ p.p. dans E, on a

$$\int_{(0,1)-E} T_k(\Phi(u)) \frac{du}{dx} S'(u)\, dx = \int_0^1 T_k(\Phi(u)) \frac{du}{dx} S'(u)\, dx\,. \tag{3.28}$$

D'autre part si on définit la fonction $\hat{\Phi}_k$ par

$$\hat{\Phi}_k(t) = \int_0^t T_k(\Phi(s))\, S'(s)\, ds$$

cette fonction $\hat{\Phi}_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne et telle que $\hat{\Phi}_k(0) = 0$, et donc on a (voir [6], théorème 4.2)

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_k(u) \in H_0^1(0,1) \\ \dfrac{d}{dx} \hat{\Phi}_k(u) = T_k(\Phi(u)) S'(u) \dfrac{du}{dx} \quad \text{p.p. dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{3.29}$$

avec la convention que $T_k(\Phi(u))S'(u)\dfrac{du}{dx}$ désigne la fonction qui vaut

$$\begin{cases} T_k(\Phi(u))S'(u)\dfrac{du}{dx} & \text{si} \quad x \notin E \\ 0 & \text{si} \quad x \in E\,; \end{cases}$$

on notera que dans le premier cas $T_k(\Phi(u))S'(u)$ est bien définie, car Φ est continue au point $u(x)$; dans le deuxième cas la notation est logique puisque $\frac{du}{dx} = 0$ p.p. dans E, d'après (3.25).

Comme $\hat{\Phi}_k(u) \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\hat{\Phi}_k(u)\,dx = 0 \quad \forall\, k$$

et de cette égalité et de (3.28) et (3.29) on déduit que

$$\int_{(0,1)-E} T_k(\Phi(u))\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,;$$

alors d'après (3.27) on a

$$\int_{(0,1)-E} \Phi(u)\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx\; = 0$$

et ceci avec (3.26) entraîne

$$\int_0^1 \psi\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx = 0\,. \qquad \square$$

Remarque 3.5. Si l'ensemble N des points de discontinuité de Φ est dénombrable, alors la démonstration du théorème 3.2 est plus simple, car il suffit d'utiliser le fait que

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{presque partout sur} \;\; \{x \mid u(x) = c\}$$

à la place du théorème 4.2 de [6].

Corollaire 3.1. *Si l'ensemble des points de discontinuité de* Φ *est négligeable et si* u *est une solution de* (3.5)-(3.7)*, on a l'égalité d'énergie*

$$(3.30)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)dx = \int_0^1 g(x)\frac{du}{dx}S'(u)dx \\ \forall\, S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{lipschitzienne}, C^1\textit{par morceaux}, \\ \qquad\qquad\qquad \textit{telle que } S(0) = 0\,. \end{cases}$$

Démonstration. Si on prend $S(u)$ comme fonction test dans (3.6), ce qui est possible car $S(u) \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)dx + \int_0^1 \psi\frac{du}{dx}S'(u)\,dx = \int_0^1 g\frac{du}{dx}S'(u)\,dx\,.$$

Mais d'après le théorème 3.2

$$\int_0^1 \psi\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx = 0\,.$$

Donc u vérifie l'égalité (3.30). □

Remarque 3.6. Remarquons que si u est une solution de (3.6), alors l'égalité

$$(3.31)\qquad \int_0^1 \psi\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx = 0$$

est équivalent à l'égalité d'énergie

$$(3.32)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 a(x)\Big|\frac{du}{dx}\Big|^2 S'(u)dx = \int_0^1 g(x)\frac{du}{dx}S'(u)dx \\ \forall\, S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{lipschitzienne}, C^1\text{par morceaux}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{telle que } S(0) = 0\,. \end{cases}$$

En effet: si $u \in H_0^1(0,1)$ vérifie (3.32) et elle est solution de (3.6), en prenant $S(u)$ comme fonction test on a

$$\int_0^1 \psi\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx = 0\,;$$

réciproquement si $u \in H_0^1(0,1)$ est solution de (3.6) et si on a (3.31) alors u vérifie l'égalité d'énergie (3.32).

Corollaire 3.2. *Si l'ensemble des points de discontinuité de* Φ *est négligeable, la suite* u_ε *définie par* (3.15) *vérifie, outre la convergence faible* (3.16),

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{dans} \quad H_0^1(0,1) \textit{ fort}. \tag{3.33}$$

Démonstration. Pour démontrer (3.33) il suffit de montrer que

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} \longrightarrow \frac{du}{dx} \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ fort}, \tag{3.24}$$

ou encore, grâce à la coercivité, que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_0^1 a(x) \left|\frac{du_\varepsilon}{dx}\right|^2 = \int_0^1 a(x) \left|\frac{du}{dx}\right|^2. \tag{3.35}$$

En utilisant u_ε comme fonction test dans (3.15) et en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_0^1 a(x) \left|\frac{du_\varepsilon}{dx}\right|^2 = \int_0^1 g \frac{du}{dx}$$

car $\int_0^1 \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \frac{du_\varepsilon}{dx} = 0$, (voir la deuxième étape de la démonstration du théorème 3.1). Il suffit donc de montrer que

$$\int_0^1 g \frac{du}{dx} = \int_0^1 a(x) \left|\frac{du}{dx}\right|^2. \tag{3.36}$$

Or si on prend u comme fonction test dans (3.6) on a, d'après le théorème 3.2,

$$\int_0^1 a(x) \left|\frac{du}{dx}\right|^2 + \int_0^1 \psi \frac{du}{dx} = \int_0^1 g \frac{du}{dx}. \tag{3.37}$$

Mais si on prend $S(u) = u$ dans (3.24), on a

$$\int_0^1 \psi \frac{du}{dx} = 0. \tag{3.38}$$

On a ainsi démontré (3.35) et donc (3.33). $\square$

4 – Contre exemple

Dans ce paragraphe on donne un contre exemple à l'existence d'une solution de (1.1).

Théorème 4.1. *Considérons la fonction*

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } t > 0 \\ -1 & \textit{pour } t < 0 \\ \theta & \textit{pour } t = 0 \end{cases}$$

avec $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ *fixé (qui est bornée et constante par morceaux sur* $\mathbb{R}$*, mais qui n'est continue ni à gauche ni à droite en zéro). Si on choisit comme fonction* g *la fonction définie par*

$$g(x) = 1 \quad \textit{si } 0 < x < \frac{1}{3}, \quad g(x) = -1 \quad \textit{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3},$$
$$g(x) = \lambda \quad \textit{si } \frac{2}{3} < x < 1,$$

avec $0 < \lambda < (1 - 2\theta)$ *fixé, le problème*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(0,1) \\ -\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{du}{dx} + \Phi(u)\Big) = -\dfrac{dg}{dx} \quad \textit{dans} \quad H^{-1}(0,1) \end{cases} \tag{4.1}$$

n'a pas de solution.

Démonstration. On remarque d'abord que $u \in H_0^1(0,1)$ est solution de (4.1) si et seulement s'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{du}{dx} = -\Phi(u) + g + c \quad \text{dans} \quad L^2(0,1)\,. \tag{4.2}$$

La démonstration consiste alors à montrer, par l'examen des différents cas possibles, qu'il n'y a pas de solution de (4.2). Elle repose sur des calculs faciles, mais il est nécessaire d'examiner un grand nombre de cas et de sous cas.

On remarque ensuite que s'il existe un point $x_1^+ \in (0, \frac{1}{3})$ tel que $u(x_1^+) > 0$, alors $u(x) > 0$ dans un petit intervalle autour de x_1^+, inclus dans $(0, \frac{1}{3})$, et dans cet intervalle on aura

$$\frac{du}{dx} = -1 + 1 + c = c\,; \tag{4.3}$$

c'est à dire que l'on a

$$0 < x_1^+ < \frac{1}{3}, u(x_1^+) > 0 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = c \ \text{ dans } \ (x_1^+ - \delta_1^+, x_1^+ + \delta_1^+). \tag{4.4}$$

De même s'il existe un point $x_1^- \in (0, \frac{1}{3})$ tel que $u(x_1^-) < 0$, alors on a

$$\begin{aligned} &0 < x_1^- < \frac{1}{3}\,,\ u(x_1^-) < 0 \Longrightarrow \\ &\qquad \frac{du}{dx} = 1 + 1 + c = c + 2 \text{ dans } (x_1^- - \delta_1^-, x_1^- + \delta_1^-)\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Et de la même façon on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} < x_2^+ < \frac{2}{3},\ u(x_2^+) > 0 \Longrightarrow \\ &\qquad \frac{du}{dx} = -1 - 1 + c = c - 2 \text{ dans } (x_2^+ - \delta_2^+, x_2^+ + \delta_2^+)\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} < x_2^- < \frac{2}{3}\,, u(x_2^-) < 0 \Longrightarrow \\ &\qquad \frac{du}{dx} = 1 - 1 + c\ = c \text{ dans } (x_2^- - \delta_2^-, x_2^- + \delta_2^-)\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Enfin, pour le dernier intervalle, on a

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} < x_3^+ < 1\,,\ u(x_3^+) > 0 \Longrightarrow \\ &\qquad \frac{du}{dx} = -1 + \lambda + c \text{ dans } (x_3^+ - \delta_3^+, x_3^+ + \delta_3^+)\,, \end{aligned} \tag{4.8}$$

et

$$\text{(4.9)} \qquad \begin{aligned} &\frac{2}{3} < x_3^- < 1\,, u(x_3^-) < 0 \Longrightarrow \\ &\qquad \frac{du}{dx} = +1 + \lambda + c \text{ dans } (x_3^- - \delta_3^-\,, x_3^- + \delta_3^-)\,. \end{aligned}$$

Soit donc u une solution de (4.2). On a l'alternative: ou bien il existe un point $x_1^- \in (0, \frac{1}{3})$ tel que $u(x_1^-) < 0$, ou bien il existe un point $x_1^+ \in (0, \frac{1}{3})$ tel que $u(x_1^+) > 0$, ou bien $u \equiv 0$ dans $[0, \frac{1}{3}]$. Examinons successivement ces trois cas.

Cas 1. Supposons qu'il existe $x_1^- \in (0, \frac{1}{3})$ tel que $u(x_1^-) < 0$. D'après (4.5),

$$\frac{du}{dx} = c + 2$$

dans un intervalle $(x_1^- - \delta_1^-, x_1^- + \delta_1^-)$ inclus dans $(0, \frac{1}{3})$, c'est à dire

$$u(x) = (c + 2)x + d$$

pour une certaine constante d, tant que l'on a $u(x) < 0$ et $x \in (0, \frac{1}{3})$. Puisque $u(0) = 0$, ceci implique, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) < 0$, que

$$c + 2 < 0\,.$$

Mais d'une part il est impossible d'avoir, dans un intervalle de $(0, \frac{1}{3})$, $u \equiv 0$, car sinon on aurait, d'après (4.2)

$$0 = -\theta + 1 + c\,,$$

qui est impossible car $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ et $c < -2$; d'autre part s'il existait un point x_1^+ dans $(0, x_1^-)$, avec $u(x_1^+) > 0$, on aurait, d'après (4.4), $\frac{du}{dx} = c < -2$ autour de ce point, ce qui, avec $u(0) = 0$, est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) > 0$. On a donc en fait

$$u(x) = (c + 2)x \qquad \text{dans } \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Alors $u(\frac{1}{3}) < 0$, et donc il existe un intervalle $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \delta)$ contenu dans $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ où $u(x) < 0$, ce qui implique, voir (4.7), que dans cet intervalle,

$$\frac{du}{dx} = c < -2\,.$$

La fonction u est donc décroissante sur $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et donc en particulier $u(\frac{2}{3}) < 0$. Il existe alors un intervalle $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta)$ où $u(x) < 0$, tel que, d'après (4.9)

$$\frac{du}{dx} = 1 + \lambda + c \quad \text{dans} \quad \Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta\Big)$$

et, puisque $\lambda < 1$ et $c < -2$, on a

$$\frac{du}{dx} = 1 + \lambda + c < 0$$

donc la fonction u décroit dans $(\frac{2}{3}, 1)$ et il est impossible que $u(1) = 0$.

En conclusion on a montré qu'il est impossible pour une fonction u qui est strictement négative en un point de $(0, \frac{1}{3})$ d'être une solution du problème (4.2).

Cas 2. Supposons maintenant qu'il existe $x_1^+ \in (0, \frac{1}{3})$ tel que $u(x_1^+) > 0$. D'après (4.4) on a

$$\frac{du}{dx} = c$$

dans un intervalle autour de x_1^+, c'est à dire

$$u(x) = cx + d$$

pour une certaine constante d, tant qu'on a $u(x) > 0$ et $x \in (0, \frac{1}{3})$. Puisque $u(0) = 0$, ceci implique, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) > 0$, que

$$c > 0\,.$$

Mais d'une part il est impossible d'avoir $u \equiv 0$ dans un intervalle de $(0, \frac{1}{3})$, car sinon on aurait

$$0 = -\theta + 1 + c$$

qui est impossible car $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ et $c > 0$; et d'autre part s'il existait un point $x_1^- \in (0, x_1^+)$ tel que $u(x_1^-) < 0$, on aurait, d'après (4.5)

$$\frac{du}{dx} = c + 2 > 2$$

dans un intervalle autour de ce point, ce qui, avec $u(0) = 0$, est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) < 0$. On a donc en fait

$$u(x) = cx \quad \text{dans} \quad \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Alors $u(\frac{1}{3}) > 0$ et il existe un intervalle $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \delta)$ contenu dans $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ où $u(x) > 0$, ce qui implique, voir (4.6), que dans cet intervalle,

$$\frac{du}{dx} == c - 2\,.$$

Puisque $u(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}c$, on a donc

$$u(x) = (c-2)x + \frac{2}{3} \quad \text{dans} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \delta\right).$$

On va examiner le comportement de la fonction u dans cet intervalle selon les valeurs de c.

Cas 2.1. Si $c > 1$, alors $u(x) = (c-2)x + \frac{2}{3}$ dans $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et $u(\frac{2}{3}) > 0$; par conséquent u sera positive sur un intervalle $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta)$, ce qui implique, (voir (4.8)), que

$$\frac{du}{dx} == -1 + \lambda + c \quad \text{dans} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta\right).$$

Mais comme $\lambda > 0$ et $c > 1$, on a

$$\frac{du}{dx} == -1 + \lambda + c > 0$$

donc la fonction u croit dans $(\frac{2}{3}, 1)$ et il est impossible que $u(1) = 0$.

Cas 2.2. Si $c = 1$, alors $u(x) = (c-2)x + \frac{2}{3}$ dans $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et $u(\frac{2}{3}) = 0$. Mais d'une part il est impossible d'avoir $u \equiv 0$ dans un intervalle de $(\frac{2}{3}, 1)$, car sinon on aurait

$$0 = -\theta + \lambda + c$$

qui est impossible car $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, $\lambda > 0$ et $c = 1$; et d'autre part s'il existait un point $x_3^+ \in (\frac{2}{3}, 1)$ tel que $u(x_3^+) > 0$, on aurait, d'après (4.8)

$$\frac{du}{dx} = -1 + \lambda + c = \lambda > 0$$

dans un intervalle autour de ce point, ce qui, avec $u(1) = 0$, est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) > 0$; enfin s'il existait un point $x_3^- \in (\frac{2}{3}, 1)$ tel que $u(x_3^-) < 0$, on aurait, d'après (4.9),

$$\frac{du}{dx} = 1 + \lambda + c = \lambda + 2 > 2$$

car $\lambda > 0$, ce qui, avec $u(\frac{2}{3}) = 0$ est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) < 0$.

Cas 2.3. Il reste le cas $0 < c < 1$. Dans ce cas $[(c-2)x + \frac{2}{3}] > 0$ dans un intervalle $(\frac{1}{3}, x_2^0)$, où x_2^0 est défini par $[(c-2)x_2^0 + \frac{2}{3}] = 0$ et $u(x_2^0) = 0$. Mais d'une part il est impossible d'avoir $u \equiv 0$ dans un intervalle de $(x_2^0, \frac{2}{3})$, car sinon on aurait

$$0 = -\theta - 1 + c$$

qui est impossible car $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ et $c < 1$; et d'autre part s'il existait un point $x_2^+ \in (x_2^0, \frac{2}{3},)$ tel que $u(x_2^+) > 0$, on aurait, d'après (4.6)

$$\frac{du}{dx} = c - 2 < -1$$

dans un intervalle autour de ce point, ce qui, avec $u(x_2^0) = 0$, est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) > 0$; enfin s'il existait un point $x_2^- \in (x_2^0, \frac{2}{3},)$ tel que $u(x_2^-) < 0$, on aurait, d'après (4.7),

$$\frac{du}{dx} = c > 0$$

ce qui, avec $u(x_2^0) = 0$ est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) < 0$.

En conclusion on a montré qu'il est impossible pour une fonction u qui est strictement positive en un point de $(0, \frac{1}{3})$ d'être une solution du problème (4.2).

Cas 3. Si $u \equiv 0$ dans $[0, \frac{1}{3}]$, on a, d'après (4.2)

$$0 = -\theta + 1 + c\,.$$

Mais il est impossible d'avoir $u(x) = 0$ dans un intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \delta)$, car autrement on aurait $0 = -\theta - 1 + c$, qui est impossible. Il existe donc un point $x_2^+ \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tel que $u(x_2^+) > 0$ ou un point $x_2^- \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tel que $u(x_2^-) < 0$.

Cas 3.1. Supposons qu'il existe $x_2^+ \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tel que $u(x_2^+) > 0$, alors on a d'après (4.6),

$$\frac{du}{dx} = c - 2 = \theta - 3 < 0$$

autour de ce point, dans $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ce qui, avec $u(\frac{1}{3}) = 0$, est impossible, en considérant l'intervalle maximal où $u(x) > 0$.

Cas 3.2. S'il existe un point $x_2^- \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tel que $u(x_2^-) < 0$, on a, d'après (4.7)

$$\frac{du}{dx} = c = \theta - 1 < 0$$

et donc $u(x) = cx + d$, pour une certaine constante d, dans un intervalle autour de x_2^-. Mais d'une part il est impossible d'avoir $u(x) = 0$ dans un intervalle $(\frac{1}{3}, x_2^-)$, car autrement on aurait $0 = -\theta - 1 + c$, qui est impossible, puisque $0 = -\theta + 1 + c$; et d'autre part nous avons vu au cas 3.1 qu'il est impossible qu'il existe un point $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tel que $u(x) > 0$. C'est donc que

$$u(x) = c\Big(x - \frac{1}{3}\Big) \qquad \text{dans} \quad \Big[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \delta\Big]$$

et puisque $c(x - \frac{1}{3}) < 0$ dans $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, alors

$$u(x) = c\Big(x - \frac{1}{3}\Big) \quad \text{dans} \quad \Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

Donc $u(\frac{2}{3}) = \frac{c}{3} < 0$ et il existe un intervalle $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta)$ dans lequel $u(x) < 0$, et donc, d'après (4.9)

$$\frac{du}{dx} = 1 + \lambda + c = (\lambda + \theta) > 0$$

dans cet intervalle, c'est à dire

$$u(x) = (\lambda + \theta)\Big(x - \frac{2}{3}\Big) + \frac{c}{3} \qquad \text{dans} \ \Big[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \delta\Big].$$

Mais $(\lambda + \theta)(x - \frac{2}{3}) + \frac{c}{3} < 0$ dans $[\frac{2}{3}, 1]$, car $c = (\theta - 1)$ et $(\lambda + 2\theta - 1) < 0$. Donc

$$u(x) = (\lambda + \theta)\Big(x - \frac{2}{3}\Big) + \frac{c}{3} \qquad \text{dans} \ \Big[\frac{2}{3}, 1\Big]$$

et $u(1) < 0$, ce qui est impossible.

En conclusion on a montré qu'il est impossible pour une fonction u qui est nulle sur $(0, \frac{1}{3})$ d'être une solution de (4.2).

On a ainsi montré que le problème (4.2) n'a pas de solutions. $\square$

5 – Stabilité de la solution

Dans ce paragraphe nous démontrons que les solutions du problème (3.5)-(3.7) et (3.8) sont stables par rapport aux données: si la suite des données g_n converge dans $L^2(0,1)$ faible vers une fonction g, alors la suite u_n, des solutions des problèmes (3.5)-(3.7) correspondants à la donnée g_n, converge dans $H_0^1(0,1)$ faible vers une solution u du problème (3.5)-(3.7) correspondant à la donnée g; si de plus la suite g_n converge dans $L^2(0,1)$ fort vers g, alors la fonction u vérifie aussi l'inégalité (3.8); enfin si de plus l'ensemble des points de discontinuité de Φ est négligeable, alors la suite u_n converge vers u dans $H_0^1(0,1)$ fort et u vérifie l'égalité d'énergie (3.30).

Théorème 5.1. *Soit $g_n \in L^2(0,1)$ tel que*

$$g_n \rightharpoonup g \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible} \tag{5.1}$$

et soit $a \in L^\infty(0,1)$ qui vérifie (3.2). Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne qui est bornée au voisinage de 0, i.e. vérifie (3.4), et soit $\Phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions boréliennes telles que

$$\underline{\Phi}(t) \le \liminf_n \underline{\Phi_n}(t) \le \limsup_n \overline{\Phi_n}(t) \le \overline{\Phi}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{5.2}$$

Sous les hypothèses du théorème 3.1, soient u_n et ψ_n des solutions de (1.1), correspondantes aux données g_n et Φ_n, au sens suivant

$$u_n \in H_0^1(0,1) \quad \text{et} \quad \psi_n \in L^2(0,1) \tag{5.3}$$

$$-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du_n}{dx} + \psi_n) = -\frac{dg_n}{dx} \quad \text{dans } H^{-1}(0,1) \tag{5.4}$$

$$\underline{\Phi_n}(u_n(x)) \le \psi_n(x) \le \overline{\Phi_n}(u_n(x)) \quad p.p.\, x \in (0,1) \tag{5.5}$$

$$\int_0^1 a(x)\,|\frac{du_n}{dx}|^2\, S'(u_n)\,dx \le \int_0^1 g_n\,\frac{du_n}{dx}\,S'(u_n)\,dx \tag{5.6}$$

pour tout $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *lipschtitzienne,* C^1 *par morceaux, croissante et telle que* $S(0) = 0$.

Alors il existe une sous suite, encore notée n, *il existe* u *et* ψ *tels que*

$$u \in H_0^1(0,1) \quad et \quad \psi \in L^2(0,1) \tag{5.7}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad dans\, H_0^1(0,1)\ faible \\ et \quad u_n \longrightarrow u \quad dans\, C^0([0,1])\ fort \tag{5.8}$$

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad dans \quad L^2(0,1)\ faible \tag{5.9}$$

$$-\frac{d}{dx}(a(x)\frac{du}{dx} + \psi) = -\frac{dg}{dx} \quad dans\ H^{-1}(0,1) \tag{5.10}$$

$$\underline{\Phi}(u(x)) \leq \psi(x) \leq \overline{\Phi}(u(x)) \quad p.p.\, x \in (0,1) \tag{5.11}$$

$$\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \liminf \|g_n\|_{L^2(0,1)}\,. \tag{5.12}$$

Démonstration. On remarque que d'après (5.6) et la coercivité (3.2) la suite des u_n est bornée dans $H_0^1(0,1)$, car on a

$$\left\|\frac{du_n}{dx}\right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha}\|g_n\|_{L^2(0,1)} \tag{5.13}$$

et la suite g_n est bornée dans $L^2(0,1)$. Donc il existe $u \in H_0^1(0,1)$ et une sous suite, encore notée n, telle que on ait (5.8); de plus on a l'estimation (5.12) sur la norme de u car d'après (5.13) on a

$$\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2(0,1)} \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left\|\frac{du_n}{dx}\right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha}\liminf_{n\longrightarrow\infty}\|g_n\|_{L^2(0,1)}\,.$$

On va montrer que la suite ψ_n est bornée dans $L^2(0,1)$. On procède pour cela de la même façon que dans la troisième étape de la démonstration du théorème 3.1. On remarque que si u_n est une solution de l'équation (5.4), alors il existe une constante c_n telle que

$$a(x)\frac{du_n}{dx} + \psi_n = g_n + c_n \qquad c_n \in \mathbb{R}\,. \tag{5.14}$$

Puisque u_n converge uniformément vers u dans [0,1] et puisque $u(0)=0$, on peut trouver un intervalle $(0,\delta^\gamma)$ et un n_γ tels que

$$|u_n(x)|\leq\gamma \qquad \forall\, x\in[0,\delta^\gamma] \quad \text{et} \quad \forall\, n\geq n_\gamma\,;$$

donc d'après (5.5) on a

$$|\psi_n(x)|\leq 2m \quad \text{p.p. } \; x\in[0,\delta^\gamma] \quad \text{et} \quad \forall\, n\geq n_\gamma\,. \tag{5.15}$$

Puisque $\frac{du_n}{dx}$ et g_n sont bornés dans $L^2(0,1)$, et donc dans $L^2(0,\delta^\gamma)$, (5.14) implique que la suite des constantes c_n est bornée dans $L^2(0,\delta^\gamma)$ et donc dans $\mathbb{R}$; alors par différence dans (5.14) on voit que ψ_n est borné dans $L^2(0,1)$. Il existe donc ψ dans $L^2(0,1)$ et une sous suite, encore notée n, telle que on ait (5.9).

Maintenant, en utilisant la convergence faible dans $H_0^1(0,1)$ de la suite u_n et la convergence faible dans $L^2(0,1)$ de ψ_n, il est facile de passer à la limite dans (5.4) et d'obtenir (5.10).

Démontrons (5.11). Comme dans la sisième étape de la démonstration du théorème 3.1, on considère le représentant de la fonction ψ défini par ses points de Lebesgue. Soit x_0 un de ces points. D'après le lemme 2.1, en prenant $\hat{\Phi}=\overline{\Phi}$ et $\check{\Phi}=\underline{\Phi}$, on sait que pour tout $x_0\in(0,1)$

$$\begin{cases} \forall\, k>0\ \exists\, N_k^0 \ \text{ et } \ \exists\,\beta_k^0 \ \text{ tels que} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, n\geq N_k^0 \text{ et p.p. } x\in(x_0-\beta_k^0,x_0+\beta_k^0) \\ \underline{\Phi}(u(x_0))-\dfrac{1}{k}\leq\psi_n(x)\leq\overline{\Phi}(u(x_0))+\dfrac{1}{k}\,. \end{cases} \tag{5.16}$$

En passant à la limite faible dans $L^2(x_0-\beta_k^0,x_0+\beta_k^0)$, on a

$$\begin{cases} \underline{\Phi}(u(x_0))-\dfrac{1}{k}\leq\psi(x)\leq\overline{\Phi}(u(x_0))+\dfrac{1}{k} \\ \text{p.p. } x\in(x_0-\beta_k^0,x_0+\beta_k^0)\,. \end{cases}$$

Comme x_0 est un point de Lebesgue de ψ, on obtient, en prenant la moyenne

$$\frac{1}{2R}\int_{x_0-R}^{x_0+R}\psi(x)dx$$

avec $R<\beta_k^0$ et en faisant tendre R vers zéro

$$\underline{\Phi}(u(x_0))-\frac{1}{k}\leq\psi(x_0)\leq\overline{\Phi}(u(x_0))+\frac{1}{k}\,, \quad \forall\, k>0\,, \tag{5.17}$$

ce qui implique

$$\underline{\Phi}(u(x_0)) \le \psi(x_0) \le \overline{\Phi}(u(x_0))\,, \tag{5.18}$$

c'est à dire (5.11). □

Théorème 5.2. *On se place sous les hypothèse du théorème* 5.1 *et on suppose de plus que*

$$g_n \longrightarrow g \quad \textit{dans } L^2(0,1) \textit{ fort}. \tag{5.19}$$

Alors, outre les résultats du théorème 5.1*, la fonction u vérifie*

$$\int_0^1 a(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 S'(u)\,dx \le \int_0^1 g\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx \tag{5.20}$$

pour toute fonction $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lipschitzienne, C^1 par morceaux, croissante et telle que $S(0) = 0$.

Démonstration

Les fonctions u_n vérifient par hypothèse l'inégalité d'énergie:

$$\int_0^1 a(x)\left|\frac{du_n}{dx}\right|^2 S'(u_n) \le \int_0^1 g_n\,\frac{du_n}{dx}\,S'(u_n) \tag{5.21}$$

pour toute fonction $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lipschitzienne, C^1 par morceaux, croissante et telle que $S(0) = 0$; on va passer à la limite dans (5.21).

D'une part puisque g_n converge vers g dans $L^2(0,1)$ fort, on a, pour le deuxième membre de (5.21),

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 g_n\,\frac{du_n}{dx}\,S'(u_n) = \int_0^1 g\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,;$$

d'autre part en reprenant la démonstration de la troisième étape du théorème 3.1, on a, pour le premier membre de (5.21),

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 a(x)\left|\frac{du_n}{dx}\right|^2 S'(u_n) \ge \int_0^1 a(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 S'(u)\,;$$

donc (5.20) est démontré. □

Théorème 5.3. *On se place sous les hypothèse du théorème 5.2 et on suppose de plus que l'ensemble N des points de discontinuité de Φ est négligeable. Alors, outre les résultats du théorème* 5.1, *on a*

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 a(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 S'(u)\,dx=\int_0^1 g\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx\\ \forall\, S:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \textit{lipschitzienne}\ ,C^1\ \textit{par morceaux}\ ,\\ \qquad\qquad\qquad\textit{telle que}\ S(0)=0\end{array}\right.\tag{5.22}$$

et

$$u_n\longrightarrow u\quad\textit{dans}\quad H_0^1(0,1)\ \textit{fort}.\tag{5.23}$$

Démonstration. D'après le corollaire 3.1 appliqué à (5.7), (5.10) et (5.11), on a (5.22).
De même pour la suite u_n on a (voir corollaire 3.1)

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 a(x)\left|\frac{du_n}{dx}\right|^2 S'(u_n)=\int_0^1 g_n\,\frac{du_n}{dx}\,S'(u_n)\\ \forall\, S:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \text{lipschitzienne, } C^1\text{ par morceaux,}\\ \qquad\qquad\qquad\text{telle que}\quad S(0)=0\,.\end{array}\right.\tag{5.24}$$

Donc, en prenant $S(t)=t$ dans (5.24) et en utilisant la convergence forte dans $L^2(0,1)$ de g_n et la convergence faible dans $H_0^1(0,1)$ de u_n on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 a(x)\left|\frac{du_n}{dx}\right|^2=\int_0^1 g\,\frac{du}{dx}\,.$$

Mais d'après (5.22), avec $S(t)=t$, on a

$$\int_0^1 g\,\frac{du}{dx}=\int_0^1 a(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2,$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 a(x)\left|\frac{du_n}{dx}\right|^2=\int_0^1 a(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2,$$

ce qui grâce à la coercivité de a implique la convergence forte de la suite u_n, c'est à dire (5.23). $\square$

6 – Homogénéisation

Dans ce paragraphe on démontre que si on considère à la place du coefficient qui apparaît dans l'équation (1.1), une suite de coefficients bornés a_n, telle que a_n^{-1} converge dans $L^\infty(0,1)$ faible-étoile vers la fonction a_∞^{-1}, alors il existe une sous suite des solutions de (3.5)-(3.8) correspondante à a_n qui converge dans $H_0^1(0,1)$ faible vers une solution du problème (3.5)-(3.8) correspondant à a_∞^{-1}.

Théorème 6.1. *On se place sous les hypothèses* (3.1), (3.3) *et* (3.4) *du théorème* 3.1 *et on considère une suite* a_n *d'éléments de* $L^\infty(0,1)$ *telle que*

$$\alpha \leq a_n(x) \leq \beta \text{ p.p. } x \in (0,1) \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ donnés avec } 0 < \alpha \leq \beta < +\infty) \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{a_n} \rightharpoonup \frac{1}{a_\infty} \quad \text{dans } L^\infty(0,1) \text{ faible-étoile}. \tag{6.2}$$

Soit (u_n, ψ_n) *une solution de* (3.5)-(3.8) *relative au coefficient* a_n*, c'est à dire telle que*

$$u_n \in H_0^1(0,1) \quad \text{et} \quad \psi_n \in L^2(0,1) \tag{6.3}$$

et

$$-\frac{d}{dx}\Big(a_n(x)\frac{du_n}{dx} + \psi_n\Big) = -\frac{dg}{dx} \quad \text{dans } H^{-1}(0,1) \tag{6.4}$$

$$\underline{\Phi}(u_n(x)) \leq \psi_n(x) \leq \overline{\Phi}(u_n(x)) \quad \text{p.p. } x \in (0,1) \tag{6.5}$$

$$\int_0^1 a_n(x)\Big|\frac{du_n}{dx}\Big|^2 S'(u_n)dx \leq \int_0^1 g(x)\,\frac{du_n}{dx}\,S'(u_n)dx \tag{6.6}$$

pour tout $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *lipschitzienne,* C^1 *par morceaux, croissante, telle que* $S(0) = 0$.

Alors il existe une sous suite, encore notée par n, et il existe u et ψ tels que

$$u \in H_0^1(0,1) \quad et \quad \psi \in L^2(0,1) \tag{6.7}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad dans\ H_0^1(0,1)\ faible \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{a_n}\,\psi_n \rightharpoonup \frac{1}{a_\infty}\,\psi \quad dans\ L^2(0,1)\ faible \tag{6.9}$$

$$-\frac{d}{dx}\Big(a_\infty \frac{du}{dx} + \psi\Big) = -\frac{dg}{dx} \quad dans\ H^{-1}(0,1) \tag{6.10}$$

$$\underline{\Phi}(u(x)) \le \psi(x) \le \overline{\Phi}(u(x)) \quad p.p.\, x \in (0,1) \tag{6.11}$$

$$\int_0^1 a_\infty(x)\,|\frac{du}{dx}|^2\, S'(u)\,dx \le \int_0^1 g\,\frac{du}{dx}\,S'(u)\,dx \tag{6.12}$$

pour toute $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, C^1 par morceaux, croissante, telle que $S(0) = 0$.

Remarque 6.1. Rappelons que si on a les hypothèses (6.1) et (6.2) alors pour tout $h \in H^{-1}(0,1)$, les solutions v_n de

$$v_n \in H_0^1(0,1), \quad -\frac{d}{dx}\Big(a_n\,\frac{dv_n}{dx}\Big) = h \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,1)$$

vérifient

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{dans } \ H_0^1(0,1) \text{ faible}$$

où v est la solution de

$$v \in H_0^1(0,1), \quad -\frac{d}{dx}\Big(a_\infty\,\frac{dv}{dx}\Big) = h \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1)\,.$$

Dans le cadre unidimensionel de cet article ce résultat est facile à obtenir: c'est un cas particulier de la théorie de l'homogénéisation (cf. par exemple [2] ou [12]).

Remarque 6.2. On verra dans la démonstration du théorème 6.1 que ψ_n est bornée dans $L^2(0,1)$; on pourrait donc extraire une nouvelle sous suite telle que l'on ait

$$\psi_n \rightharpoonup \overline{\psi} \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible}\,. \tag{6.13}$$

Comme la suite $\frac{1}{a_n}\,\psi_n$ est bornée dans $L^2(0,1)$ (puisque ψ_n est bornée dans cet espace) on peut toujours extraire une sous suite telle que

$$\frac{1}{a_n}\,\psi_n \rightharpoonup \tau \quad \text{dans } L^2(0,1)\,\text{faible.}$$

On définissant ψ par $\tau = \frac{1}{a_\infty}\psi$ on a alors (6.9). Il n'est pas évident que l'on ait $\psi = \overline{\psi}$, (voir remarque 6.4).

Remarque 6.3. Comme on le verra dans la démonstration, le résultat du théorème 6.1 reste vrai si on considère une suite de fonctions g_n telle que

$$g_n \longrightarrow g \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ fort} \tag{6.14}$$

et une suite de fonctions $\Phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ boréliennes telles que

$$\underline{\Phi}(t) \leq \liminf_n \underline{\Phi}_n(t) \leq \limsup_n \overline{\Phi_n}(t) \leq \overline{\Phi}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{6.15}$$

Démonstration du Théorème 6.1. La suite u_n est bornée dans $H_0^1(0,1)$ car, d'après (6.6) avec $S(t) = t$ et la coercivité (6.1), on a

$$\Big\| \frac{du_n}{dx} \Big\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_{L^2(0,1)}\,; \tag{6.16}$$

il existe donc une sous suite, encore notée par n, et une fonction $u \in H_0^1(0,1)$ telles que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1(0,1) \text{ faible} \quad \text{et} \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } C^0([0,1]) \text{ fort}\,.$$

D'autre part, (6.4) est équivalent à l'existence d'une constante $c_n \in \mathbb{R}$ telle que

$$a_n(x)\,\frac{du_n}{dx} + \psi_n \,=\, g + c_n\,. \tag{6.17}$$

Puisque la fonction Φ est bornée sur l'intervalle $[-\gamma, \gamma]$ et puisque la suite $a_n(x)\,\frac{du_n}{dx}$ est bornée dans $L^2(0,1)$, on montre comme dans la démonstration du théorème 5.1, que la suite des constantes c_n est bornée dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une sous suite, encore notée par n, telle que

$$c_n \longrightarrow c \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

ce qui implique, d'après (6.17), que ψ_n est bornée dans $L^2(0,1)$.

Puisque $+\infty > \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\beta} > 0$, (6.17) est équivalent à

$$\frac{du_n}{dx} + \frac{1}{a_n(x)}\,\psi_n \;=\; \frac{1}{a_n(x)}\,g + \frac{1}{a_n(x)}\,c_n \tag{6.18}$$

et chaque terme de (6.18) est borné dans $L^2(0,1)$. Il existe donc une sous suite, encore notée par n, et il existe une fonction τ de $L^2(0,1)$, qu'on peut écrire sous la forme $\tau = \frac{1}{a_\infty}\,\psi$, où $\psi \in L^2(0,1)$, telle que

$$\frac{1}{a_n}\,\psi_n \rightharpoonup \tau = \frac{1}{a_\infty}\,\psi \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible}\,. \tag{6.19}$$

On passe facilement à la limite dans (6.18) quand n tend vers l'infini, et on obtient

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{a_\infty(x)}\,\psi \;=\; \frac{1}{a_\infty(x)}\,g + \frac{1}{a_\infty(x)}\,c\,, \tag{6.20}$$

c'est à dire

$$a_\infty(x)\frac{du}{dx} + \psi \;=\; g + c \tag{6.21}$$

qui est équivalent à (6.10).

On notera que si g est remplacé par une suite g_n qui converge dans $L^2(0,1)$ fort vers g, cette partie du raisonnement reste identique puisque dans ces conditions

$$\frac{1}{a_n}\,g_n \rightharpoonup \frac{1}{a_\infty}\,g \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible.}$$

Si on applique le lemme 2.1 aux suites u_n et ψ_n, avec $\Phi_n = \Phi$, $\hat{\Phi} = \overline{\Phi}$ et $\check{\Phi} = \underline{\Phi}$ (ce raisonnement reste valable si on a une suite Φ_n qui vérifie (6.15)), on voit que pour tout point $x_0 \in (0,1)$ fixé et pour chaque $k > 0$, il existe N_k^0 et β_k^0 tels que

$$\begin{cases} \underline{\Phi}(u(x_0)) - \dfrac{1}{k} \leq \psi_n(x) \leq \overline{\Phi}(u(x_0)) + \dfrac{1}{k} \\ \forall\, n \geq N_k^0 \quad \text{et} \quad \text{p.p. } x \in (x_0 - \beta_k^0, x_0 + \beta_k^0)\,, \end{cases}$$

ce qui, puisque $+\infty > \beta \geq a_n \geq \alpha > 0$, est equivalent à

$$\text{(6.22)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_n(x)} \left(\underline{\Phi}(u(x_0)) - \dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{a_n(x)} \psi_n(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \dfrac{1}{a_n(x)} \left(\overline{\Phi}(u(x_0)) + \dfrac{1}{k}\right) \\ \forall\, n \geq N_k^0 \quad \text{et} \quad \text{p.p. } x \in (x_0 - \beta_k^0, x_0 + \beta_k^0)\,. \end{cases}$$

En passant à la limite faible dans (6.22) grâce à (6.2) et (6.19), on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_\infty(x)} \left(\underline{\Phi}(u(x_0)) - \dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{a_\infty(x)} \psi(x) \leq \dfrac{1}{a_\infty(x)} \left(\overline{\Phi}(u(x_0)) + \dfrac{1}{k}\right) \\ \text{p.p. } x \in (x_0 - \beta_k^0, x_0 + \beta_k^0)\,. \end{cases}$$

Si x_0 est un point de Lebesgue pour la fonction $\frac{1}{a_\infty} \psi$ et pour la fonction $\frac{1}{a_\infty}$, on obtient, en prenant les moyennes $\frac{1}{2R} \int_{x_0-R}^{x_0+R} \frac{1}{a_\infty(x)} \psi(x)\, dx$ et $\frac{1}{2R} \int_{x_0-R}^{x_0+R} \frac{1}{a_\infty(x)}\, dx$, avec $R < \beta_k^0$, et en faisant tendre R vers zéro,

$$\text{(6.24)} \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{a_\infty(x_0)} \left(\underline{\Phi}(u(x_0)) - \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{a_\infty(x_0)} \psi(x_0) \leq \\ &\qquad\qquad \leq \frac{1}{a_\infty(x_0)} \left(\overline{\Phi}(u(x_0)) + \frac{1}{k}\right) \quad \forall\, k > 0\,, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\text{(6.25)} \qquad \frac{1}{a_\infty(x_0)} \underline{\Phi}(u(x_0)) \leq \frac{1}{a_\infty(x_0)} \psi(x_0) \leq \frac{1}{a_\infty(x_0)} \overline{\Phi}(u(x_0))\,,$$

et donc, puisque a_∞ est strictement positif dans $(0, 1)$,

$$\text{(6.26)} \qquad \underline{\Phi}(u(x_0)) \leq \psi(x_0) \leq \overline{\Phi}(u(x_0)) \quad \text{p.p. } x_0 \in (0, 1)$$

ce qui démontre (6.11).

Pour démontrer l'inégalité d'énergie (6.12) il suffit de passer à la limite dans le membre de droite de (6.6), (ce qui est facile et possible si g est remplacé par une suite g_n), et d'utiliser dans le membre de gauche la semicontinuité classique en homogénéisation; pour une démonstration, voir la démonstration du théorème 6.2 ci dessous.

Le théorème 6.1 est ainsi démontré. $\square$

Théorème 6.2. *Sous les hypothèses du théorème 6.1, si de plus on a l'égalité d'énergie pour le problème limite, i.e. si*

$$\int_0^1 a(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx = \int_0^1 g(x)\,\frac{du}{dx}\,dx \qquad \textit{alors} \tag{6.27}$$

$$a_n\frac{du_n}{dx} \longrightarrow a_\infty\,\frac{du}{dx} \quad \textit{dans } L^2(0,1) \textit{ fort} \tag{6.28}$$

$$\psi_n \longrightarrow \psi \quad \textit{dans } L^2(0,1) \textit{ fort}\,. \tag{6.29}$$

Remarquons que dans l'énoncé du théorème 6.2 on a seulement supposé l'égalité d'énergie (6.27) pour la fonction u et seulement l'inégalité d'énergie (6.6) pour la suite u_n.

Démonstration. Pour démontrer (6.28) il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{a_n}\left|a_n\,\frac{du_n}{dx} - a_\infty\,\frac{du}{dx}\right|^2 dx = \\ &= \int_0^1 a_n\left|\frac{du_n}{dx}\right|^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{a_n}\left|a_\infty\,\frac{du}{dx}\right|^2 dx - 2\int_0^1 a_\infty\,\frac{du_n}{dx}\,\frac{du}{dx}\,dx\,;\end{aligned} \tag{6.30}$$

il est facile de passer à la limite dans les deux derniers termes grâce à (6.2) et (6.8); la convergence du premier terme du deuxième membre découle de (6.27). Cela implique (6.28).

Alors comme $\psi_n = g + c_n - a_n(x)\,\frac{du_n}{dx}$ (voir (6.17)), la suite ψ_n converge dans $L^2(0,1)$ fort, *i.e.*

$$\psi_n \longrightarrow \overline{\psi} \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ fort}, \tag{6.31}$$

donc

$$\frac{1}{a_n}\psi_n \rightharpoonup \frac{1}{a_\infty}\overline{\psi} \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible}\,.$$

Mais comme par définition de ψ (cf. (6.19)) on a

$$\frac{1}{a_n}\psi_n \rightharpoonup \frac{1}{a_\infty}\psi \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible}\,.$$

on a en fait $\psi = \overline{\psi}$. □

Remarque 6.4. Plaçons nous sous les hypothèses du théorème 6.1, et définissons ψ et $\overline{\psi}$ par (6.19) et (6.13). Il n'est alors pas clair qu'on ait

$$\psi = \overline{\psi}\,. \tag{6.32}$$

En effet d'après (6.17) on a

$$a_n \frac{du_n}{dx} + \psi_n = g + c_n \quad \text{dans } L^2(0,1)$$

et donc d'après la démonstration du théorème 6.1

$$a_n \frac{du_n}{dx} + \psi_n \rightharpoonup a_\infty \frac{du}{dx} + \psi \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ fort}\,,$$

d'où l'on déduit que

$$a_n \frac{du_n}{dx} \rightharpoonup a_\infty \frac{du}{dx} + \psi - \overline{\psi} \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible}\,.$$

On aura donc

$$\overline{\psi} = \psi$$

si et seulement si

$$a_n \frac{du_n}{dx} \rightharpoonup a_\infty \frac{du}{dx} \quad \text{dans } L^2(0,1) \text{ faible}\,. \tag{6.33}$$

Ce sera le cas si on a l'égalité d'énergie pour le problème limite (voir le théorème 6.2).

Remerciement

Je remercie Stéphane Mischler pour les intéressantes discussions que nous avons eues sur le sujet de cet article et pour m'avoir indiqué comment construire le contre exemple de la remarque 3.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. W. Alt: *A free boundary problem associated with the flow of ground water*, in Arch. Rat. Mech. Anal., **64** (1977), 111-126.

[2] A. Bensoussan – J.L. Lions – G. Papanicolaou: *Asymptotic analysis for period structures*, (North Holland, Amsterdam) 1978.

[3] L. Boccardo – J.I. Diaz – D. Giacchetti – F. Murat: *Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation*, in *Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems* (*Proceedings, Nancy 1988*), P. Benilan, M. Chifot, L. C. Evans et M. Pierce ed., Pitman Reserch Notes in Math., Longman, Harlow (1989), 208, 229-246.

[4] L. Boccardo – D. Giacchetti – J.I. Diaz – F. Murat: *Existence et regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of non linear terms*, in J. Diff. Eq., **106** (1993), 215-237.

[5] H. Brezis – D. Kinderleher – G. Stampacchia: *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue*, in C. R. Acad. Sci. Paris, 287, Serie A, (1978), pp. 711-714.

[6] L. Boccardo – F. Murat: *Remarques sur l'homogénéisation de certains problèmes quasi-linéaires*, in Portugaliae Mathematica, **41** (1982), 535-562.

[7] J. Carrillo – M. Chipot: *On some nonlinear elliptic equation involving derivatives of the nonlinearity*, in Proc. Roy. Soc. Edimburgh, A, **100** (1985), 281-294.

[8] J. Carrillo – M. Chipot: *On the dam problem*, in J. Diff. Eq., **45** (1982), 234-271.

[9] J. Carrillo: *Unicité des solutions du type Kruskov pour des problèmes elliptiques avec des termes de transport non linéaires*, in C. R. Acad. Sci. Paris, 303, Serie I, (1986), pp. 189-192.

[10] J. Carrillo: *On the uniqueness of the solution of a class of elliptic equations with nonlinear convection*, in *Contributions to nonlinear partial differential equations*, Vol. II, J. Diaz et P. L. Lions ed., Pitman Reserch Notes Math., Longman, Harlow (1987), 155, pp. 55-68.

[11] P.L. Lions – F. Murat: *Solutions renormalisées d'equations elliptiques non linéaires*, à paraître.

[12] L. Tartar: *Homogénéisation et compacité par compensation*, Cours Peccot, Collège de France, Mars 1977, partiellement rédigé par F. Murat, *H-convergence*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger 1977/78. Version anglaise: F. Murat & L. Tartar, *H-convergence*, in *Topics in mathematical modelling of composite materials*, R. V. Kohn ed., Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, (1996), à paraître.

Lavoro pervenuto alla redazione il 4 luglio 1996
ed accettato per la pubblicazione il 4 dicembre 1996.
Bozze licenziate il 15 maggio 1997

Indirizzo dell'Autore:

Pamela Lanciani - Laboratoire d'Analyse Numérique - Université Pierre et Marie Curie - Tour 55-65, 4 - place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05