Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 27, Roma (2007), 101-104

Qualche considerazione di analisi funzionale per la convessità analitica

GIULIANO BRATTI

Abstract: *By functional Analysis, I give a necessary and sufficient condition to have*

$$P(D)\,\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(A),$$

$\mathcal{A}(A)$ *space of real analytic functions,* P *linear with constant coefficients and* $A \subset \mathbb{R}^n$ *convex.*

1 – A sia un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $n \mapsto K_n \Subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = A$. Sia $j \mapsto V_{n,j}$ una successione decrescente di intorni, in $\mathbb{C}^n$, di K_n, in modo che $K_n = \bigcap_{j=1}^{+\infty} V_{n,j}$. Si pone

$$\mathcal{A}(K_n) = \varinjlim_{j} \mathcal{O}(V_{n,j}),$$

dove $\mathcal{O}(V_{n,j})$ è lo spazio delle funzioni olomorfe su $V_{n,j}$; e si pone, anche,

$$\mathcal{A}(A) = \varprojlim_{n} \mathcal{A}(K_n).$$

Visto che le restrizioni $\varrho_n : \mathcal{A}(A) \to \mathcal{A}(K_n)$ hanno immagine densa e che gli spazi $\mathcal{A}(K_n)$ sono riflessivi, si ha

$$\mathcal{A}'(A) = \varprojlim_{n} \mathcal{A}'(K_n)$$

algebricamente e topologicamente.

Key Words and Phrases: *Analytic functions – P analytic convexity.*
A.M.S. Classification: 3505

Sia $P = P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ un operatore differenziale a coefficienti costanti e sia

$$\mathcal{A}_P(A) = \{f \in \mathcal{A}(A), Pf = 0\}.$$

Teorema 1. *Se $\mathcal{A}(A) \subseteq P(\mathcal{A}(K_n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e se le restrizioni $r_n : \mathcal{A}_P(\mathbb{R}^n) \to A_P(K_n)$ hanno immagine densa, $\forall n \in \mathbb{N}$, allora la*

$$P : \mathcal{A}(A) \to \mathcal{A}(A)$$

è aperta sull'immagine.

Dimostrazione. In base a [G], pag. 84, si tratta di dimostrare che:

(a) la trasposta della P, la ${}^tP = P(-D)$, ${}^tP : \mathcal{A}'(A) \to \mathcal{A}'(A)$, ha immagine debolmente chiusa; e che

(b) se $E \subseteq \mathcal{A}'(A)$ e se ${}^tP(E)$ è un equicontinuo, anche E lo è.

(a): sia $\lim_j {}^tP(\mu_j) = \mu_0$ in $\mathcal{A}'(A)$, con $\mu_0 \in A'(K_m) : \mu_0$ sta nella chiusura debole, in $\mathcal{A}'(K_m)$, di ${}^tP(\mathcal{A}'(K_m))$. Se così non fosse, esisterebbe (Hahn-Banach) una $f \in \mathcal{A}(K_m)$ tale che $\langle \mu_0, f\rangle = 1$ e $Pf = 0$; ora, per la densità di $r_m(\mathcal{A}_P(\mathbb{R}^n))$ in $\mathcal{A}_P(K_m)$ si ha $f = \lim_k f_k$, $f_k \in \mathcal{A}_P(\mathbb{R}^n)$, così che

$$\langle \mu_0, f\rangle = \lim_k \langle \mu_0, f_k\rangle = \lim_k (\lim_j \langle {}^tP\mu_j, f_k\rangle) = 0.$$

Poiché un sottospazio di $\mathcal{A}'(K_m)$ è chiuso se e solo se è chiuso per successioni, esiste $n \mapsto \nu_n \in \mathcal{A}'(K_m)$ tale che

$$\mu_0 = \lim_n {}^tP(\nu_n);$$

e dunque, se $f \in \mathcal{A}(A)$ e se $Pg = f, f \in \mathcal{A}(K_m)$, si ha

$$|\langle \nu_n, f\rangle| = |{}^tP(\nu_n), g\rangle| \leq \ell < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ciò dimostra che la successione $n \mapsto \nu_n$ è limitata in $\mathcal{A}'(K_m)$, che è uno spazio di Montel: di qui, $\lim_k \nu_{n_k} = \nu_0$ in $\mathcal{A}'(K_m)$, così che

$$\mu_0 = {}^tP(\nu_0).$$

(b): in base a [G], pag. 148, il fatto che ${}^tP(E)$ sia un equicontinuo di $\mathcal{A}'(A)$ implica che ${}^tP(E)$ sia un contenuto in qualche $\mathcal{A}'(K_m)$ ed ivi equicontinuo; perciò la dimostrazione sarà conclusa non appena si sia dimostrato che E è debolmente limitato in $\mathcal{A}'(A)$ (Banach-Steinhaus).

Se così non fosse, esisterebbe $n \mapsto \mu_n \in \mathcal{A}'(A)$ e $f \in \mathcal{A}(A)$ tali che

$$|\langle \mu_n, f\rangle| \geq n, \quad n \in \mathbb{N};$$

se $\mu_n \in \mathcal{A}'(K_{j_n})$, sia $g_{j_n} \in \mathcal{A}(K_{j_n})$ tale che $Pg_{j_n} = f$; supponendo, direttamente, che sia

$$\mathcal{A}'(K_m) \subset \mathcal{A}'(K_{j_n}), \quad n \geq n_0,$$

e che W sia un intorno di zero in $\mathcal{A}(K_m)$ tale che ${}^tP(E)[W] \subseteq \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, visto che

$$r_m(\mathcal{A}_P(\mathbb{R}^n))^- = \mathcal{A}_P(K_m),$$

$(r_m(\mathcal{A}_P(\mathbb{R}^n))^-$ è la chiusura dell'immagine di $r_m)$ si ha

$$g_{j_{n_0}+h} = g_{j_{n_0}} + f_h + w_h$$

$(P(g_{j_{n_0}+h} - g_{j_{n_0}}) = 0)$, con $f_h \in \mathcal{A}_P(\mathbb{R}^n)$ e $w_h \in W$; e di qui risulta che

$$|\langle \mu_{n_0+h}, f\rangle| = |\langle \mu_{n_0+h}, P(g_{j_{n_0}+h})\rangle| = |\langle {}^tP(\mu_{0+h}) g_{j_{n_0}}, w_h\rangle| \leq \ell + 1,$$

se $|\langle {}^tP(E), g_{j_{n_0}}\rangle| \leq \ell$.

La dimostrazione è conclusa. □

Il teorema che precede, insieme con il criterio di completezza per spazi vettoriali topologici di [G], pag. 145, dà questo

Teorema 2. *Sia A un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$.*
Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(p$_1$) $P(\mathcal{A}(A)) = \mathcal{A}(A)$;

(p$_2$) $P : \mathcal{A}(A)) \to \mathcal{A}(A)$ *è un omomorfismo; ed inoltre la* ${}^tP : \mathcal{A}'(A) \to \mathcal{A}'(A)$ *mappa iperpiani debolmente chiusi in* $\mathcal{A}'(A)$ *in iperpiani debolmente chiusi in* ${}^tP(\mathcal{A}'(A))$.

Dimostrazione. (p$_2$) implica (p$_1$): la prima parte della (p$_2$) assicura che la

$$\tilde{P} : (\mathcal{A}(A)/\mathcal{A}_P(A)) \to P(\mathcal{A}(A)), \quad \tilde{P}(f + \mathcal{A}_P(A)) = Pf,$$

è un isomorfismo topologico; poiché la $P : \mathcal{A}(A) \to \mathcal{A}(A)$ ha immagine densa (la ${}^tP$ è iniettiva), basta dimostrare che $\mathcal{A}(A)/\mathcal{A}_P(A)$, con la topologia quoziente, è completo.

Ora, il duale forte di $\mathcal{A}(A)/\mathcal{A}_P(A)$ è isomorfo topologicamente a ${}^tP(\mathcal{A}'(A))$, con la topologia indotta da $\mathcal{A}'(A)$, in virtù di [G], pagg. 145 e 177; di qui, per concludere basta dimostrare che: *se H è un iperpiano di ${}^tP(\mathcal{A}'(A))$ tale che $H \cap E$ è debolmente chiuso in E, per ogni equicontinuo $E \subseteq {}^tP(\mathcal{A}'(A))$, anche H è debolmente chiuso in ${}^tP(\mathcal{A}'(A))$*. A tal fine, sia $H = {}^tP(H_0)$, H_0 iperpiano in $\mathcal{A}'(A) : H_0 \cap E_0$ è debolmente chiuso in E_0, per ogni equicontinuo $E_0 \subset \mathcal{A}'(A)$: per la completezza di $\mathcal{A}(A)$, H_0 è debolmente chiuso in $\mathcal{A}'(A)$; e per la seconda parte della (p$_2$), anche H lo è in ${}^tP(\mathcal{A}'(A))$.

(p$_1$) implica (p$_2$): la convessità di A implica che son soddisfatte le ipotesi del Teorema 1: di qui, la prima parte della (p$_2$). La seconda parte viene dalla completezza di $\mathcal{A}(A)/\mathcal{A}_P(A)$.

La dimostrazione è conclusa. □

BIBLIOGRAFIA

[G] A. Grothendieck: *Espaces vectoriels topologique*, Soc. Math. de Sào Paulo, Brésil, 1958.

Lavoro pervenuto alla redazione il 26 gennaio 2006
ed accettato per la pubblicazione il 27 marzo 2006.
Bozze licenziate il 31 gennaio 2007

Indirizzo dell'Autore:

Giuliano Bratti – Dip. di Matematica Pura ed Applicata – via Belzoni, 7 – 35131 Padova – Italy