SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate

ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA "FRANCESCO SEVERI"

RENDICONTI DI MATEMATICA

E DELLE SUE APPLICAZIONI

Serie VII - Volume 30 - Fascicolo II - 2010

Le modalità per la presentazione dei lavori e le condizioni di vendita si trovano alla web page.

Submission of papers and subscription rate information could be found on the web page.

ADDRESS:
RENDICONTI DI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA - PIAZZALE A. MORO, 2 - 00185 ROMA, ITALIA

Fax.: +39 06 49913052
e-mail: rendmat@mat.uniroma1.it
web page: www.dmmm.uniroma1.it/˜rendiconti

Direttore Responsabile: Prof. ALESSANDRO SILVA

Autorizzazione del Tribunale di Roma del 22-11-2005 (n. 456/05)

Composizione tipografica effettuata con il programma TEX © dalla
CompoMat – Loc. Braccone – 02040 Configni (RI) – Telefax 39 0746 672240

Stampato a cura del *Centro Stampa d'Ateneo* della Sapienza Università di Roma

Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 30, Roma (2010), 145-181

Correnti positive e varietà complesse

LUCIA ALESSANDRINI

Abstract: *Questo testo rappresenta un proseguimento di* [1]*, con lo scopo di aggiornare la tematica ai lavori usciti negli ultimi dieci anni. In particolare esamineremo i risultati di estensione, di regolarizzazione, di prodotto e di pull-back riguardo a correnti positive non necessariamente chiuse, sia per varietà complesse qualsiasi che per varietà compatte kähleriane.*

1 – Introduzione

Per lo studio delle correnti e più in generale della geometria differenziale complessa e della teoria del potenziale, il testo di riferimento resta il libro di Demailly [22], anche se possiamo segnalare altre esposizioni divulgative più specifiche, per esempio [15] per la teoria del potenziale. Invece lo scopo di questo lavoro è di fare il punto sui progressi che si sono avuti in questi ultimi anni (facendo seguito ad [1]) riguardo ad alcuni problemi e tecniche particolarmente importanti nella teoria delle correnti positive e delle loro applicazioni.

Riprenderemo in esame innanzitutto le tecniche di estensione di correnti positive attraverso ostacoli di vario tipo: chiusi, insiemi pluripolari, sottovarietà CR, sottoinsiemi analitici. Questo ci introduce ai passaggi successivi, poiché risultati di estensione attraverso sottoinsiemi analitici sono alla base delle costruzioni di pull-back e di prodotto di correnti. Tali tematiche sono state intensamente studiate sia per il loro specifico interesse che per le importanti applicazioni, di cui i problemi legati all'operatore di Monge-Ampère complesso costituiscono un esempio importante.

Key Words and Phrases: *Correnti positive – Correnti plurisubarmoniche – Varietà complesse*
A.M.S. Classification: 32U40, 32Q15, 32U05.

L'operatore di Monge-Ampère, per funzioni plurisubarmoniche lisce, può essere letto come un prodotto (di forme): $(dd^c)^n(u) = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u$: come estenderlo a funzioni plurisubarmoniche meno regolari, o addirittura generiche? Quali proprietà conserva in queste estensioni? Lo studio è stato portato avanti sia per funzioni plurisubarmoniche su un aperto (di $\mathbb{C}^n$ o di una varietà) che a livello globale su una varietà compatta kähleriana (X, ω). Infatti in questo caso le soluzioni lisce $\varphi \in Psh(X, \omega)$ dell'equazione di Monge-Ampère $(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n$, dove $f\omega^n$ è una forma di volume per X, danno una nuova metrica kähleriana, $\omega + dd^c\varphi$, con forma di volume assegnata. Questo problema (risolto nel caso di f liscia da Yau [70]) nasce dal classico problema di Calabi, che chiede di trovare e studiare forme di Kähler che rappresentino la prima classe di Chern della varietà e abbiano forma di Ricci data (cfr. per esempio l'introduzione di [54] o il survey [55]).

Un altro punto di vista " nuovo" nel campo delle correnti è quello della dinamica olomorfa di più variabili complesse, che quindi seleziona come ambiente le varietà proiettive o le varietà compatte kähleriane. Per questo divideremo la trattazione degli argomenti tenendo presente questo spartiacque, e dedicheremo un breve paragrafo a mostrare come una delle tecniche più importanti in dinamica olomorfa sia proprio lo studio di particolari correnti chiuse e positive, in particolare il loro prodotto e le loro iterate, sia per mappe olomorfe che meromorfe.

Premettiamo alcune notazioni, che fanno riferimento alle definizioni date nell'appendice di [1]: $\mathcal{E}^{p,p}(X)_{\mathbb{R}}$ è lo spazio delle $(p,p)-$forme differenziali reali sulla varietà complessa X di dimensione n; $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ significa che φ è una $(p,p)-$forma differenziale a supporto compatto su X; scrivendo $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ intendiamo una corrente di bidimensione (p,p) ovvero di bigrado $(n-p, n-p)$ su X; se essa è positiva nel senso di Lelong, scriviamo $T \geq 0$. La corrente T è detta chiusa se $dT = 0$, è detta pluriarmonica se $dd^cT = 2i\partial\overline{\partial}T = 0$ (le convenzioni per l'operatore d^c non sono uniformi nei vari lavori: per esempio nel testo [22] si ottiene $dd^c = (i/\pi)\partial\overline{\partial}$, ma nulla cambia per quanto riguarda le correnti pluriarmoniche o plurisubarmoniche). Se Y è un sottoinsieme analitico di dimensione pura, la corrente associata si indica con $[Y]$, ove non sia possibile confusione con $[T]$, che denota la classe di una corrente T nella coomologia di de Rham o di Aeppli. In generale, useremo le definizioni e le notazioni di [1] o di [22].

2 – Problemi di estensione e di supporto

Come già discusso in [1], i problemi di estensione di correnti si possono schematizzare in questo modo:

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$, o di una varietà liscia X, e sia A un chiuso di U. Data una classe di correnti di ordine zero su $U - A$, stabilire condizioni su A (e sulla classe) che assicurino l'estensione delle correnti attraverso A ed eventualmente il permanere della corrente estesa (in particolare della estensione banale) nella stessa classe di correnti, ma su U. Qui parleremo solo dei risultati sull'estensione banale, che indicheremo con una " tilde": tuttavia (cfr. per esempio la Proposizione 3.3 e il Teorema 4.5) non sempre essa è l'estensione *giusta* per risolvere problemi che coinvolgono i gruppi di coomologia.

– Il caso A chiuso

Se su A non si mette alcun tipo di struttura, i risultati di estensione presenti in letteratura sono legati ad $\mathcal{H}_k(A)$, la misura di Hausdorff di A: come esempio principale si possono considerare i teoremi di estensione di correnti chiuse e positive (Harvey et al., che si rifanno alla teoria delle correnti piatte di Federer: cfr. [1], Teoremi 4.4 e 4.1).

Nel caso di correnti non chiuse, il primo risultato che citiamo è il Teorema 1.1 di [6]:

Teorema 2.1. *Sia A un chiuso di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$. Se*

1. $\mathcal{H}_{2p-1}(A) = 0$
2. *dT si prolunga a U (ovvero, esiste l'estensione banale $\widetilde{dT}$)*
   allora T si prolunga a U, e vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.

Osservazioni

1) La corrente T, dall'ipotesi (2), è una corrente localmente normale ([1], definizione 3.2), e dunque l'uguaglianza $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$ è conseguenza immediata della teoria di Federer delle correnti localmente piatte ([61], 2.2). Il caso $dT = 0$ era stato trattato da Harvey (cfr. [1], Teorema 4.4).
2) La dimostrazione del teorema è composta da due parti distinte: dapprima ci si riduce al caso $p = n$ seguendo la dimostrazione di Harvey e la tecnica (di Shiffman) di proiezioni su $p-$piani complessi, per cui basta stimare la massa di una opportuna misura positiva; a questo punto, si usa una variante del teorema di Fubini su $\mathbb{C}^n$ per funzioni positive in $L^1_{loc}(U - A)$.
3) Se la corrente T non è positiva, ma è differenza di correnti positive $T = T_1 - T_2$, il teorema non vale più, ma deve essere modificato chiedendo che sia T_1 che T_2 si prolunghino attraverso A (cfr. [61] 3.6 e il controesempio 3.7): questo fatto si può confrontare con i risultati sulle correnti in $DSH(U)$ (vedi Paragrafo 7).

Passiamo ora a considerare il caso di correnti non più normali ma $\mathbb{C}-$normali.

Teorema 2.2. (*cfr.* [20], *Teorema* 5) *Sia A un chiuso di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$. Se*

1. $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$
2. *dd^cT si prolunga a U (ovvero, esiste $\widetilde{dd^cT}$)*
   allora T si prolunga a U, e vale $dd^c\tilde{T} = \widetilde{dd^cT}$.

Tale risultato era stato annunciato in [18], ma con l'ipotesi supplementare che T fosse anche localmente normale.

Osserviamo che la dimostrazione dell'esistenza di $\tilde{T}$ si può fare anche nell'ipotesi del Teorema 2.1, cioè $\mathcal{H}_{2p-1}(A) = 0$, poiché essa usa la tecnica di Shiffman di proiezione su $p-$piani complessi, unita alle proprietà delle slices di correnti $\mathbb{C}-$normali, che permettono di ricondursi al caso di bidimensione $(1,1)$. Invece l'uguaglianza $dd^c\tilde{T} = \widetilde{dd^cT}$, essendo conseguenza della teoria delle correnti $\mathbb{C}-$piatte di Bassanelli ([8]), richiede $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A) = 0$: si prova in [18] (Osservazione 1) che l'ipotesi che $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T)$ sia localmente finita non basta, nemmeno se T è localmente normale.

Sempre usando la teoria delle correnti $\mathbb{C}-$piatte, in particolare plurisubarmoniche, si ottengono i seguenti risultati ([20], Teorema 6 e Corollario 6):

Teorema 2.3. *Sia A un chiuso di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente plurisubarmonica.*

1. *Se $T \leq 0$ e $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T)$ è localmente finita, allora esiste $\tilde{T}$ ed è plurisubarmonica; inoltre la corrente residua $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$, che è supportata su A, ha lo stesso segno di T.*
2. *Se $T \geq 0$ e $\mathcal{H}_{2p-3}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$, allora esiste $\tilde{T}$ ed è plurisubarmonica; inoltre la corrente residua $R = 0$.*

– Il caso A chiuso pluripolare o varietà CR

Consideriamo ora i casi in cui si chiedono ulteriori condizioni sul chiuso A, in termini di luogo di zeri (o di indeterminazione) di opportune funzioni, o di quantità di struttura complessa presente su A. I punti di partenza per questo tipo di risultati sono i due fondamentali lavori [36] e [63]. Richiamiamo dapprima alcune definizioni.

Definizione 2.4. Sia A una sottovarietà reale di un aperto U di $\mathbb{C}^n$ (o di una varietà) di dimensione m e di classe $\mathcal{C}^2$. Se per ogni $z \in A$, $\dim_{\mathbb{C}} H_zA := \dim_{\mathbb{C}}(T_zA \cap iT_zA) = k$, allora A è detta una *varietà CR*, di CR-dimensione uguale a k. Se $k = 0$, A è detta *totalmente reale.*

Si dimostra che A è totalmente reale se e solo se esiste un intorno V di A e una funzione $u \in \mathcal{C}^2(V)$ strettamente plurisubarmonica tale che A sia il suo luogo di zeri.

Invece considerando il luogo di indeterminazione di una funzione plurisubarmonica si ha (cfr. [22], III.2.A):

Definizione 2.5. Sia $A \subset U$ aperto di $\mathbb{C}^n$ (o di una varietà); A è detto *pluripolare completo* se per ogni $x \in U$, esiste un suo intorno V_x e una funzione $u \in Psh(V_x) \cap L^1_{loc}(V_x)$ tale che $V_x \cap A = \{z \in V_x / u(z) = -\infty\}$.

Ovviamente ogni sottoinsieme analitico chiuso è pluripolare completo; si ha inoltre (Lemma 2, ibidem):

Proposizione 2.6. *Se A è un chiuso pluripolare completo di U, per ogni $x \in U$ e per ogni suo intorno V_x sufficientemente piccolo esistono:*

1. *$v \in Psh(V_x) \cap \mathcal{C}^\infty(V_x - A)$ con $v = -\infty$ su $A \cap V_x$;*
2. *una successione crescente di funzioni $v_k \in Psh(V_x) \cap \mathcal{C}^\infty(V_x), 0 \leq v_k \leq 1$, che converge uniformemente a 1 sui compatti di $V_x - A$ e tale che ogni v_k si annulla su un intorno di $A \cap V_x$.*

Questa ultima proprietà è lo strumento usato per dimostrare che l'estensione banale di una corrente chiusa e positiva attraverso un chiuso pluripolare completo, se esiste, è ancora chiusa e positiva (cfr. [22], III.2 (2.3)).

Invece, per quanto riguarda l'esistenza dell'estensione banale di una corrente in termini di estensione delle sue slices, un risultato interessante è il teorema principale in [11], la cui dimostrazione è semplificata in [12], Teorema 4.2.

Sempre nel caso di correnti chiuse, nel Teorema III.7 di [36] si dimostra:

Teorema 2.7. *Se A è una sottovarietà CR di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, di CR-dimensione k, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$ e chiusa, con $p \geq k+2$, allora T si estende attraverso A, e $\tilde{T}$ è l'unica estensione chiusa e positiva.*

Nel lavoro [20] gli autori osservano che la tecnica di dimostrazione, anche nel caso CR, si basa sul descrivere A come luogo di zeri (locale) di una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, non più strettamente plurisubarmonica, ma $k-$convessa, ed estendono così i risultati di [36]. Ricordiamo che:

Definizione 2.8. Una funzione continua $u : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ è detta *strettamente $k-$convessa* se esiste una $(1,1)-$forma a coefficienti continui w su U, avente in ogni punto $n-k$ autovalori positivi, tale che $dd^c u \geq w$.

Dunque, se u è strettamente $k-$convessa, intorno a ogni punto di U vale (per opportune costanti positive c_1 e c_2)

$$dd^c u + c_1 \sum_1^k i dz_j \wedge d\overline{z_j} - c_2 \sum_{k+1}^n i dz_j \wedge d\overline{z_j} \geq 0.$$

Il caso $k = 0$ corrisponde a funzioni continue strettamente plurisubarmoniche. Si può dimostrare che, se u è strettamente $k-$convessa, fissata una $(1,1)-$forma a coefficienti continui $\gamma \geq 0$ su U, per ogni $x \in U$, esiste un suo intorno V_x e una funzione strettamente plurisubarmonica $f \in \mathcal{C}^\infty(V_x)$ tale che su V_x valga $dd^c u \wedge (dd^c f)^k \geq \gamma^{k+1}$. Inoltre, dai risultati di regolarizzazione di Richberg, si può supporre che u sia liscia fuori del suo luogo di zeri.

Il primo risultato di estensione attraverso luoghi di zeri di funzioni $k-$convesse che citiamo è dimostrato in [20], Teorema 4 e Proposizione 6.

Teorema 2.9. *Sia u una funzione strettamente $k-$convessa in un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - U_c), T \geq 0$, dove $U_c := \{z \in U/u(z) \leq c\}$. Sia $p \geq k+1$.*

1. *Se $dd^cT \leq 0$ su $U - U_c$, oppure se dd^cT si estende attraverso U_c, allora T si estende attraverso U_c.*
2. *Sia $u \geq 0$ e sia $A := U_o = \{z \in U/u(z) = 0\}$; sia $dd^cT \leq 0$ su $U - A$, oppure dd^cT di massa finita attraverso A. Se $u \in \mathcal{C}^2(U)$ e $p \geq k+2$, vale $\widetilde{dd^cT} = dd^c\tilde{T}$.*

E dunque anche (ibidem, Corollario 4):

Teorema 2.10. *Sia A una sottovarietà CR di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, di CR-dimensione k, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$ tale che $dd^cT \leq 0$ su $U - A$ (oppure dd^cT si estende attraverso A).*

1. *Se $p \geq k+1$, allora T si estende attraverso A.*
2. *Se $p \geq k+2$, vale $\widetilde{dd^cT} = dd^c\tilde{T}$, e se dT si estende, vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.*

Tale risultato, e il seguente (Teorema 2.3 in [19]), sono da paragonare con il Teorema 2.7 e i seguenti Teoremi 2.14 e 2.15.

Teorema 2.11. *Sia $A \subset U$ il luogo di zeri di una funzione positiva e strettamente $k-$convessa, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$ tale che dT si estende attraverso A.*

1. *Se $p \geq k+1$, allora anche T si estende attraverso A.*
2. *Se $p \geq k+2$, e A è di classe $\mathcal{C}^2$, vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.*

In [63], l'autore affianca ai risultati del caso chiuso quelli per un nuovo tipo di correnti, che vengono dette pluripositive.

Definizione 2.12. Una corrente $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ è detta *pluripositiva* se è localmente normale, positiva o negativa, e $dd^cT \geq 0$.

L'ipotesi di normalità (la richiesta cioè che anche dT sia a coefficienti misure) è indipendente dalle altre (ibidem, pagina 173) e situa questa classe di correnti dentro l'insieme delle correnti piatte di Federer. Riportiamo tre risultati sull'estensione di correnti pluripositive, per stabilire il confronto con ciò che si è ottenuto negli ultimi anni (Teoremi 2.10, 2.11 e 2.16, dove è stata tolta sostanzialmente proprio l'ipotesi di normalità).

Teorema 2.13. (*cfr. Teorema* 2.4 *di* [63]) *Sia $A \subset U$ un chiuso pluripolare completo, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente pluripositiva, con $p \geq 1$. Se T, dT, dd^cT si estendono attraverso A, allora*

1. $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.
2. *Il residuo $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$, che è una corrente chiusa supportata su A, ha lo stesso segno di T.*

Teorema 2.14. (*cfr. Teoremi* 3.1 *e* 3.3 *di* [63]) *Sia A è una sottovarietà totalmente reale di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente pluripositiva, con $p \geq 2$. Allora T, dT, dd^cT si estendono attraverso A, e vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$, $\widetilde{dd^cT} = dd^c\tilde{T}$.*

Teorema 2.15. (*cfr. Corollari* 3.2 *e* 3.4 *di* [63]) *Sia A è una sottovarietà CR di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, di CR-dimensione k, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente pluripositiva, con $p \geq k+2$. Allora T, dT, dd^cT si estendono attraverso A, e vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$, $\widetilde{dd^cT} = dd^c\tilde{T}$.*

Nel caso pluripolare completo, si hanno i seguenti risultati (cfr. Teoremi 1 e 2, Proposizione 2 e Corollario 2 in [20])

Teorema 2.16. *Sia $A \subset U$ un chiuso pluripolare completo, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$.*

1. *Se $T \geq 0$ (o $T \leq 0$) è una corrente ($\mathbb{C}-$normale) tale che T e dd^cT si estendono attraverso A, allora il residuo $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$ ha lo stesso segno di T.*
2. *Se T è negativa e plurisubarmonica, e T si estende attraverso A (questo succede, per esempio, se $\mathcal{H}_{2p}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$), allora anche dd^cT si estende, $\tilde{T}$ è negativa e plurisubarmonica, e il residuo R ha lo stesso segno di T.*
3. *Se T è positiva e plurisubarmonica, e $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$, allora T si estende attraverso A, $\tilde{T}$ è positiva e plurisubarmonica, e il residuo $R = 0$.*

– **Osservazioni sul Teorema 2.16.**

1) In (1), l'ipotesi che la corrente T sia $\mathbb{C}-$normale (T e dd^cT di ordine zero), e dunque che ad essa si possa applicare la teoria delle correnti $\mathbb{C}-$piatte di Bassanelli per rimpiazzare quella delle correnti piatte di Federer, resta implicita nel testo originale del teorema (la si può leggere nell'affermazione dell'esistenza di $\widetilde{dd^cT}$). Tale teoria si trova ben riassunta nelle sue proprietà basilari nel primo paragrafo di [20].
2) Nel confronto con il Teorema 2.13, ci si chiede quale ruolo giochi dT. Un esempio (Esempio 2 in [20] ma anche pagina 173 di [63]) mostra una $(1,1)-$corrente positiva e pluriarmonica, liscia su $\mathbb{C}^2 - \{z_1 + z_2 = 0\}$, che ha massa localmente finita vicino alla sottovarietà lineare $A := \{z_1 + z_2 = 0\}$, per cui $\tilde{T}$ risulta ancora pluriarmonica (ovvero, il residuo è zero), ma con dT di massa infinita vicino ad A. Viene corretta quindi l'affermazione fatta nel teorema principale di [18] (dove peraltro vengono annunciati i risultati di [20]), che valga anche $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$, ovvero che l'ipotesi su dT nel Teorema 2.13 sia superflua. Gli autori dimostrano invece, nell'Osservazione 2, che se dT si estende, allora vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$. Questo dice comunque che la classe delle correnti pluripositive è meno significativa delle classi delle correnti $\mathbb{C}-$piatte o $\mathbb{C}-$normali, o plurisubarmoniche positive (o negative): un ulteriore generalizzazione può essere vista nella classe delle correnti DSH (vedi Paragrafo 7).
3) La dimostrazione usa tra l'altro risultati di estensione con ipotesi sulla estensione di slices nel locale (vedi Proposizione 4 e Proposizione 5 in [20]) che estendono risultati analoghi nel caso chiuso (vedi teorema principale di [11]).
4) In [34] si dimostra (1) supponendo, invece che dd^cT sia di massa localmente finita attraverso A, che dd^cT sia maggiorata su $U - A$ da una corrente positiva di massa localmente finita attraverso A.
5) Nel caso in cui A sia anche compatto, il corollario 5 in [20] generalizza il corollario IV.3 in [36] in questo modo: " Sia $K \subset U$ un compatto pluripolare completo, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U-K), T \geq 0$ tale che $dd^cT \leq 0$ su $U-K$ (oppure dd^cT si estende attraverso K). Allora T si estende attraverso K e il residuo ha lo stesso segno di T. Se $p \geq 2$ e $dd^cT \leq 0$, il residuo è nullo.".

Molti dei risultati precedenti erano già stati dimostrati nel caso in cui A sia un sottoinsieme analitico, dato l'interesse geometrico particolare di questo caso. Per tali risultati rimandiamo a [1] o a [3]; alcuni di essi possono essere ora migliorati, per esempio il Teorema 3.5 di [8] (citato in [1] come Teorema 8.5) può essere così migliorato: " Sia A un sottoinsieme analitico di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente $\mathbb{C}-$normale, positiva o negativa, tale che sia T che dd^cT si estendono attraverso A. Allora il residuo $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$ ha lo stesso segno di T.".

– Problemi di supporto

Passiamo ora a considerare brevemente alcuni risultati a riguardo del supporto delle correnti: come diremo nel Paragrafo 5, l'applicazione più importante è l'esprimere l'insieme di Julia di una determinata mappa come supporto di una opportuna corrente chiusa e positiva.

Il problema principale è quello di sapere come la misura di Hausdorff del supporto di una corrente di ordine zero influenzi la natura della corrente stessa. Per correnti chiuse e positive, si veda la discussione nel Paragrafo 4 di [1], per le pluriarmoniche, il Teorema 8.6 e la Osservazione 8.3 ibidem, e per le $\mathbb{C}-$piatte il Paragrafo 9 di [1].

Un altro dei problemi esaminati in [1] è il seguente (cfr. anche [45] Problema 3.6 e [61], Teorema 4.4): quando una corrente chiusa e positiva è una catena olomorfa, ovvero è del tipo $T = \sum n_j[X_j]$, $n_j \in \mathbb{Z}^+$, X_j sottovarietà analitiche. Nell'ambiente delle correnti localmente rettificabili (cfr. [1] Paragrafo 3), Alexander in [7] generalizza i risultati di King, Harvey-Shiffman e Shiffman (cfr. [1], Teoremi 3.2, 3.4 e 3.5) con il seguente teorema: " Sia $T \in R^{loc}_{k,k}(U)$ una corrente chiusa su U: allora T è una $(k, k)-$catena olomorfa".

Nel caso in cui T in partenza non è supposta essere chiusa, ma solo plurisubarmonica o pluriarmonica, i primi risultati, degli anni '90, sono esposti in [1], Paragrafi 8 e 9. Un ulteriore contributo è quello di [27], dove gli autori generalizzano i risultati di King per correnti chiuse e positive (cfr. [1] Teoremi 3.1 e 3.2) al caso plurisubarmonico.

Teorema 2.17. (*cfr.* [27] *Teorema* 4.1 *e Corollario* 4.5) *Sia* $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ *una corrente positiva e plurisubarmonica.*

1. *Se esiste* $c > 0$ *tale che* $E_c := \{x \in X/n(T, x) \geq c\}$ *è denso in* $\mathrm{supp}T$*, allora* $\mathrm{supp}T = V$*,* V *sottovarietà di dimensione pura* p*, e* $T = \varphi[V], \varphi$ *debolmente plurisubarmonica su* V*.*
2. *Se* T *è localmente rettificabile, allora* T *è una* $p-$*catena olomorfa.*

Per il caso T positiva e plurisuperarmonica, si può vedere il Teorema 4.6 in [27].

3 – Prodotto di correnti

Se T è una (p, q)-corrente e ψ è una (h, k)-forma differenziale su una varietà X, il loro prodotto è la $(p+h, q+k)$-corrente definita come $(T\wedge\psi)(\alpha) := T(\psi\wedge\alpha)$ per ogni forma test α.

In qualche caso si può definire il prodotto di correnti rappresentate da sottoinsiemi analitici, usando i teoremi di estensione del Paragrafo 2: per esempio in [20] si dimostra che se Z e Y sono due sottoinsiemi analitici di un aperto di $\mathbb{C}^n$, di dimensione p e k, con $\dim Z \cap Y = p + k - n$, allora si può definire il prodotto e vale $[Z] \wedge [Y] = [Z \cap Y]$ (cfr. [20], p. 468 e anche [22], III.4.12).

Invece se T ed S sono correnti generiche, non si può in generale dare una buona definizione di $T \wedge S$, anche se le correnti fossero di ordine zero e chiuse, poiché le misure non possono essere convenientemente moltiplicate. In [21], Demailly considera, in riferimento ad una $(1,1)-$corrente positiva e chiusa T, la corrente T_{abc} (o T_{ac}, in altri lavori, per esempio [62]), che è la parte assolutamente continua nella decomposizione di Lebesgue dei coefficienti di T in misure assolutamente continue e misure singolari. Per queste correnti, i coefficienti stanno in L^1_{loc} e quindi si può considerare il prodotto: i risultati che si ottengono sono, per esempio, il Teorema 1.7 e il Corollario 7.6 in [21], il Teorema 1.3 in [62], particolarmente significativi per i legami con le metriche singolari su big line bundles (cfr. l'introduzione di [62]).

Lo studio delle condizioni da porre sulle correnti per ottenere un opportuno prodotto si può considerare aperto dal lavoro di Bedford e Taylor [10] nel 1982. Come abbiamo già commentato in [1], il primo caso ad essere studiato è il seguente:

$T^{p,p} \geq 0$ e chiusa

$S^{1,1} \geq 0$ ed esatta, espressa con un potenziale u localmente limitato, ovvero $S = i\partial\overline{\partial}u,\ u \in L^\infty_{loc} \cap Psh(X)$.

In questo caso $S \wedge T := i\partial\overline{\partial}(uT)$ è una $(p+1,p+1)$-corrente ben definita, positiva e chiusa (anzi esatta) (cfr. [1], Paragrafo 7). Per via induttiva si può definire il prodotto di k correnti di tipo S con una di tipo T; lo studio del caso del potenziale localmente limitato, in particolare per quanto riguarda i risultati di approssimazione, di stime di massa, operatori di Monge-Ampere, numeri di Lelong, ... si può trovare in [22], III.3. Tali proprietà rappresentano ovviamente le opportune generalizzazioni delle analoghe proprietà nel caso in cui la corrente S sia liscia; oltre ad esse, ci interesserà generalizzare anche proprietà di tipo coomologico su varietà compatte, che per ora non appaiono, essendo $S \wedge T := i\partial\overline{\partial}(uT)$ per definizione una corrente esatta.

Il caso in cui il potenziale non è localmente limitato è stato studiato principalmente da Demailly, imponendo opportune restrizioni all'intersezione del supporto di T con l'*unbounded locus* del potenziale, in particolare alla sua misura di Hausdorff (cfr. [22], III.3 oppure [1], Paragrafo 7). Anche in questi casi si hanno le opportune stime di massa e risultati di approssimazione.

L'argomento del prodotto di correnti è intimamente collegato allo studio dell'operatore di Monge-Ampère. Se $u \in L^\infty_{loc} \cap Psh(X)$, la corrente $(dd^c u)^n$ è una misura positiva, e $(dd^c\cdot)^n$ è detto l'operatore di Monge-Ampère; per estensione, anche gli operatori $(dd^c\cdot)^k,\ 1 \leq k \leq n$ sono detti operatori di Monge-Ampère (cfr. [22], III.3, [10]).

Uno dei problemi è la determinazione del dominio di definizione opportuno di questi operatori, un altro quello della sua continuità per limiti decrescenti, o più in generale il problema di trovare la convergenza “ giusta”

$u_j \to u$, $u_j, u \in Psh(X)$, che implichi la convergenza $(i\partial\overline{\partial}u_j)^k \to (i\partial\overline{\partial}u)^k$ (cfr. [44], [68], [16], [14], [69]). Lo studio di questi operatori si rivela di grande utilità in rapporto alla ricerca di metriche interessanti sulle varietà (in particolare metriche a curvatura scalare costante nell'ambiente delle varietà kähleriane): oltre al già citato libro di Demailly, si può vedere per esempio [55], [25], [17], [59], [60], [38] e la bibliografia citata in questi lavori.

Un altro approccio al prodotto di correnti in un caso particolare si può trovare in [32]: qui gli autori definiscono il prodotto $S \wedge T$ di correnti chiuse e positive di bigrado complementare, una " verticale" e una " orizzontale" (nel senso che considerano due aperti limitati convessi $M \subset \mathbb{C}^p, N \subset \mathbb{C}^{n-p}$, le due proiezioni canoniche $\pi_1 : M \times N \to M, \pi_2 : M \times N \to N$ e chiedono che $\pi_1(\text{supp}S) \subset\subset M, \pi_2(\text{supp}T) \subset\subset N$). Nel caso in cui S sia una $(1,1)$-corrente, la definizione che viene data coincide con quella che si ottiene esprimendo S localmente con un potenziale, e nel caso di S liscia, o anche a coefficienti continui, la definizione coincide con quella usuale. Rimandiamo a [32], [37] e [28] per le motivazioni, l'esplicita costruzione e le proprietà del prodotto, e inoltre al Paragrafo 8 per ulteriori risultati sul prodotto di correnti su varietà kähleriane.

L'approccio nuovo, su cui ci vogliamo invece concentrare, è quello in cui si considerano prodotti del tipo $i\partial\overline{\partial}u \wedge T$, dove $T^{p,p} \geq 0$ non è più chiusa ma solo pluriarmonica, ovvero $i\partial\overline{\partial}T = 0$. Ovviamente questo fatto fa cambiare radicalmente l'impostazione del problema, poiché anche nel caso in cui u sia liscia, non vale più $i\partial\overline{\partial}u \wedge T = i\partial\overline{\partial}(uT)$. Le strade finora seguite, che compaiono in letteratura, sono principalmente due, e cioè:

i) chiedere che u, ovvero la corrente chiusa $S = i\partial\overline{\partial}u$, sia liscia fuori di un opportuno sottoinsieme analitico ([9], [6])
ii) supporre che l'ambiente X sia una varietà compatta kähleriana.

In questo ultimo caso si ottengono risultati più forti; d'altra parte, osserviamo che le correnti pluriarmoniche assumono particolare importanza proprio nel provare la kählerianità o meno della varietà, secondo le tecniche inaugurate da Harvey e Lawson ([51], vedi [1], Paragrafo 6). Descriveremo qui i risultati di tipo i), in naturale continuità con il caso chiuso, e nel Paragrafo 8 quelli di tipo ii).

Il primo lavoro in cui si studiano prodotti di correnti non entrambe chiuse è [9] dove, pur limitandosi a una varietà tridimensionale, viene impostato il problema della opportuna definizione della corrente $S \wedge T$, con $S^{1,1} \geq 0$ chiusa, $T^{1,1} \geq 0$ pluriarmonica. Il caso generale è trattato, usando sostanzialmente le stesse tecniche, in [6], il cui risultato principale è il seguente:

Teorema 3.1. (*cfr. Teorema* 2.2 *in* [6]) *Sia Y un sottoinsieme analitico proprio della varietà complessa X. Sia S una $(1,1)$-corrente positiva e chiusa su X, liscia su $X - Y$, e sia T una (k,k)-corrente positiva e pluriarmonica su*

X, con $k + \dim Y < \dim X$. Allora esiste un'unica $(k+1, k+1)$-corrente su X, denotata con $S \wedge T$, che gode della seguente proprietà:

Se g è un potenziale locale di S, ovvero $S = i\partial\overline{\partial}g$ in un aperto $U \subset X$, e se $\{g_j\}$ è una successione di funzioni plurisubarmoniche lisce su U, che converge a g in $C^\infty(U - Y)$, allora $\lim_j i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T = S \wedge T$ in U.

Osserviamo che la definizione è data mediante la convergenza di opportune successioni, poiché nessun teorema di estensione è " abbastanza forte" (confronta Paragrafo 2 e poi Paragrafo 4). Si dimostra inoltre che se la varietà è compatta, la classe di coomologia (di Aeppli) è quella *giusta*:

Proposizione 3.2. (*cfr. Proposizione* 2.4 *in* [6]) *Nelle ipotesi del Teorema* 3.1*, se X è compatta, $S \wedge T$ " rispetta" la coomologia, nel senso che, se $S = \alpha + i\partial\overline{\partial}u$ e $T = \psi + \partial\overline{A} + \overline{\partial}A$, per opportune forme (lisce) α e ψ e correnti u e A su X, allora vale $S \wedge T = \alpha \wedge \psi + \partial\overline{Q} + \overline{\partial}Q$ per una opportuna corrente Q su X.*

La prima osservazione da fare sulla definizione di prodotto è che essa generalizza il caso liscio, che corrisponde a $Y = \emptyset$, in quanto se le g_j convergono a g in $C^\infty(U)$, ovviamente $i\partial\overline{\partial}g_j$ converge a $i\partial\overline{\partial}g = S$ e $i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T$ converge a $S \wedge T$ in U.

Inoltre essa generalizza anche il caso chiuso: se T è una corrente chiusa, la definizione di $S \wedge T$ data nel Teorema 3.1 coincide con quella classica, ovvero localmente $S \wedge T := i\partial\overline{\partial}(gT)$, dove $S = i\partial\overline{\partial}g$. Infatti, siccome $k + \dim Y < \dim X$, se T è chiusa si può applicare il corollario III.4.10 in [22] e dunque la definizione classica è ben posta. Inoltre scegliendo una successione decrescente $\{g_j\}$ come nel Teorema 3.1 (per esempio, basta regolarizzare g per convoluzione), grazie alla Proposizione III.4.9 in [22] si può applicare il Teorema III.3.7 ibidem, e così si ottiene $\lim_j i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T = i\partial\overline{\partial}g \wedge T$. Dunque le due definizioni coincidono, grazie all'unicità stabilita nel Teorema 3.1.

Per dare un'idea delle tecniche di dimostrazione, conviene per semplicità ricondursi al caso $n = 3$ e Y curva liscia, studiato per primo in [9].

L'ipotesi che la corrente S sia liscia fuori di Y sottovarietà liscia di codimensione due serve a mettersi (nel locale) in un opportuno sistema di coordinate (tecnica classica di Siu, cfr. [64]) in cui si usa il teorema di Stokes scrivendo T (localmente) come $T = \overline{\partial}F + \partial\overline{F}$, dove F è a coefficienti in L^1_{loc}. In questo modo, regolarizzando il potenziale g di S localmente per convoluzione, si riesce a ottenere una stima uniforme di massa nel locale per $i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T$. La seconda parte della dimostrazione consiste nel provare che la corrente ottenuta come limite di una opportuna sottosuccessione $i\partial\overline{\partial}g_{j_h} \wedge T$ si può definire globalmente, e non dipende dalla sottosuccessione nè dalle regolarizzate.

Infine si prova, usando una versione adattata del teorema di regolarizzazione di Demailly per le $(1,1)$-correnti chiuse (Teorema 1.1 in [21]), che la corrente soddisfa le proprietà richieste.

Dato che la corrente $S \wedge T$ estende una corrente ben definita su $X - Y$, è naturale chiedersi che legame essa abbia con l'estensione banale. Si hanno i seguenti risultati ([6], Corollario 2.3 e Corollario 2.5):

Proposizione 3.3.

1. *Se* $k + \mathrm{dim}Y < \mathrm{dim}X - 1$, *allora* $S \wedge T = \widetilde{S \wedge T}$.
2. *Se* $k + \mathrm{dim}Y = \mathrm{dim}X - 1$ *e* $\{Y_r\}$ *sono le componenti irriducibili di* Y *di dimensione massima, allora esistono funzioni debolmente plurisubarmoniche* $h_r \geq 0$ *su* Y_r *tali che* $S \wedge T = \widetilde{S \wedge T} + \sum_r h_r[Y_r]$.
3. *Se* $k + \mathrm{dim}Y = \mathrm{dim}X - 1$, X *è compatta, e* Y *è irriducibile con classe di coomologia non nulla* (*ovvero, la corrente* $[Y]$ *non è una componente di bordo*), *allora* $S \wedge T$ *può essere caratterizzata come l'unica corrente positiva e pluriarmonica che estende* $S|_{X-Y} \wedge T|_{X-Y}$ *e rispetta la coomologia.*

Questi risultati permettono di dimostrare, in particolare, che ogni varietà complessa compatta di dimensione almeno tre, che sia kähleriana fuori di una curva irriducibile, ammette una metrica bilanciata (cfr. [6]).

Già in [9] si osserva che, se X è compatta e la curva Y ha un intorno kähleriano, ovvero se c'è su X una metrica hermitiana la cui forma di Kähler è chiusa vicino a Y, le dimostrazioni si possono notevolmente semplificare, usando i risultati di cut-off in [8]. Questo ci introduce al caso compatto kähleriano, di cui tratteremo nel Paragrafo 8.

4 – Pull-back di correnti per mappe olomorfe.

Siano M ed N varietà complesse di dimensione m ed n, con $m = n+k$, e sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e suriettiva (in qualche caso si può supporre che f sia solo dominante, ovvero che la sua immagine contenga un aperto non vuoto di N). Essa è genericamente di rango massimo, ovvero è una submersione olomorfa fuori di un sottoinsieme analitico proprio Σ ([1], Osservazione 5.1). Siamo interessati a definire e studiare il pull-back a M, f^*T, di una corrente positiva e chiusa (o $i\partial\overline{\partial}-$chiusa) T su N: mentre questo è possibile nel caso delle submersioni olomorfe, non lo è in generale (cfr. esempio p. 328 in [52]), e dunque siamo interessati a estendere il pull-back attraverso Σ.

– Il caso delle submersioni

Se f è una submersione, per ogni forma test $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(M)$, con $p \geq k$, si ha $f_*\varphi \in \mathcal{D}^{p-k,p-k}(N)$ (vedi Proposizione 5.1 in [1], Paragrafo 3 in [52] e [22], I.2.C.1) dunque si può definire il pull-back di una corrente $T \in \mathcal{D}'_{p-k,p-k}(N)$ a M, per dualità: $f^*T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ è definita da $(f^*T, \varphi) := (T, f_*\varphi)$ (vedi il Corollario 5.1 in [1] e [22], I.2.C.2). Ovviamente, se f è un diffeomorfismo, vale $f^*T = (f^{-1})_*T$.

Ricordiamo alcune proprietà di questa costruzione (cfr. [22], I.2.C.2 e 3; III(1.17)).

1. Compatibilità con i casi particolari significativi: se T è rappresentata da una forma liscia, f^*T è il pull-back di questa forma; se T è l'integrazione su un submanifold Z di N di dimensione q, ovvero $T = [Z]$, allora $f^*T = [f^{-1}(Z)]$ (di dimensione $q + k$).
2. Continuità: se $T = \lim_n T_n$ per certe correnti T_n, allora $f^*T = \lim_n f^*T_n$ (e anche il viceversa, cfr. corollario 3.3 in [52]).
3. Positività: se $T \geq 0$, anche $f^*T \geq 0$.
4. f^* commuta con gli operatori ∂ e $\overline{\partial}$; questo significa in particolare che si conservano le classi di coomologia.

Su queste proprietà controlleremo le definizioni di pull-back di correnti per mappe olomorfe.

In generale, invece, il pull-back non è compatibile con l'immagine diretta, ovvero non sempre vale $f_*(f^*T) = T$ nè $f^*(f_*T) = T$, nemmeno per le forme (lisce), semplicemente a motivo del bigrado.

Se non si impongono restrizioni né sulle varietà, né sulle correnti né sulle mappe olomorfe, la strada più naturale per definire il pull-back di una corrente è quella di restringere la mappa $f : M \to N$ alla submersione $g := f|_{M-\Sigma} : M - \Sigma \to N - f(\Sigma)$, e considerare la corrente su $M - \Sigma$ data da $g^*(T|_{N-f(\Sigma)})$, con il proposito di estenderla a tutto M dimostrando che ha massa localmente finita attraverso Σ. Questa tecnica sarà utile anche nel caso di mappe meromorfe (vedi Paragrafo 8).

In generale però, essendo codim$\Sigma \geq 1$, nemmeno $(1,1)-$correnti chiuse e positive si estendono senza ulteriori ipotesi (vedi ad esempio [1] Teorema 4.6). Risulta dunque necessario porre delle restrizioni: quelle in letteratura, riguardanti le mappe olomorfe, sono esaminate nei seguenti paragrafi.

– Il caso delle mappe a fibre equidimensionali

Come ricordato in [1], Osservazione 5.1, data una mappa olomorfa e suriettiva $f : M \to N$, esiste un sottoinsieme analitico I di N di codimensione almeno due, al di fuori del quale f è a fibre equidimensionali. Conviene quindi considerare i risultati che si ottengono per una mappa olomorfa $f : M \to N$ con fibre di dimensione $k := m - n \geq 0$, iniziando dal caso $k = 0$ (mappa finita ovvero rivestimento ramificato). Ricordiamo che se la mappa è finita, a funzioni continue sul dominio vengono in modo naturale abbinate funzioni continue sul codominio, per cui le misure possono essere invece tirate indietro (cfr. [52], pp. 328-329).

Il primo caso che prendiamo in considerazione è trattato in [57], dove l'autore considera il caso locale. Siano U, V aperti di $\mathbb{C}^n$, sia $f : U \to V$ una mappa olomorfa, suriettiva, propria, a fibre finite, e sia $\Sigma := U - \Omega$ il sottoinsieme analitico di U dove il rango di f non è massimo, per cui $g := f|_\Omega : \Omega \to f(\Omega)$ è un diffeomorfismo locale. Sia T una $(p,p)-$corrente chiusa e positiva su V: si dimostra, mandando in avanti la forma di Kähler canonica, che $g^*(T)$ ha massa localmente finita attraverso Σ, e quindi la sua estensione banale $\widetilde{g^*T}$ a tutto U è una $(p,p)-$corrente chiusa e positiva su U.

Il risultato di esistenza dell'estensione banale $\widetilde{g^*T}$ viene esteso dall'autore al caso di fibre equidimensionali ($k = m - n > 0$) usando delle slices di correnti per ricondursi al caso $k = 0$.

Il caso generale è nel Teorema 1.1 di [34], di cui daremo lo schema di dimostrazione.

Teorema 4.1. *Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e suriettiva (o dominante) a fibre equidimensionali, e sia T una $(p,p)-$corrente chiusa (o pluriarmonica) e positiva su N. Allora è definita una $(p,p)-$corrente su M, f^*T, che è chiusa (o pluriarmonica) e positiva. Essa dipende in modo continuo da T, e se $||T||(A) = 0$ per un certo sottoinsieme $A \subset N$, allora $||f^*T||(f^{-1}(A)) = 0$.*

Cenno di dimostrazione. Siano $\pi_1 : M \times N \to M, \pi_2 : M \times N \to N$ le proiezioni canoniche sui fattori, e consideriamo la $(n,n)-$corrente $[\Gamma]$ su $M \times N$ data dall'integrazione sul grafico Γ di f. Osserviamo che se α è una forma liscia su N, il suo pull-back $f^*\alpha$ si può scrivere anche come $(\pi_1)_*(\pi_2^*\alpha \wedge [\Gamma])$, poiché su Γ si ha $\pi_2 = f \circ \pi_1$; l'idea è di dare la stessa definizione per T, ovvero porre

$$f^*T := (\pi_1)_*(\pi_2^*T \wedge [\Gamma]).$$

Il problema sta nel senso da dare alla scrittura $\pi_2^*T \wedge [\Gamma]$: infatti essendo π_2 una submersione, π_2^*T è ben definita, positiva e chiusa (con questa parola indicheremo qui sia la $d-$chiusura che la $\partial\overline{\partial}-$chiusura). Se $\pi_2^*T \wedge [\Gamma]$ è ben definita, possiamo considerare la sua immagine diretta, poiché $\pi_1|_\Gamma$ è una mappa propria: anche in questo passaggio si conservano la positività e la chiusura.

La definizione di $\pi_2^*T \wedge [\Gamma]$ viene cercata a livello locale: su un opportuno aperto U di N, approssimiamo $T|_U$ (per convoluzione, per esempio) con una successione di correnti T_n lisce, chiuse e positive, anzi nella stessa classe di coomologia di T. Consideriamo, in $\pi_2^{-1}(U)$, $\lim_n \pi_2^*T_n \wedge [\Gamma]$: il punto è provare che questo limite esiste e non dipende dalla successione T_n, di modo da definire in $\pi_2^{-1}(U)$

$$\pi_2^* T \wedge [\Gamma] := \lim_n \pi_2^* T_n \wedge [\Gamma].$$

Il problema viene affrontato e risolto (cfr. [34], Lemma 3.3) nell'ambiente più generale delle correnti DSH (vedi Paragrafo 7, in particolare Teorema 7.4). Proprio per il tipo di dimostrazione proposta, gli autori riescono a estendere il risultato al caso in cui f sia una trasformazione meromorfa (Definizione 8.2) (cfr. [34], Proposizioni 4.4 e 4.5).

Osservazione. Avendo definito $f^*T := (\pi_1)_*(\pi_2^* T \wedge [\Gamma])$, è semplice dimostrare che la positività e la chiusura si conservano, mentre non è detto che si conservi anche la classe di coomologia, senza ulteriori ipotesi sulle varietà (si veda il Corollario 1.2 in [34]).

– **Il caso delle modificazioni.**

Il caso significativo che sta " all'opposto" rispetto a quello delle mappe a fibre equidimensionali è quello delle modificazioni: per il pull-back di correnti rispetto a modificazioni facciamo riferimento a [5].

Siano N, N' varietà e sia $f : N' \to N$ una modificazione propria di centro Z e di divisore eccezionale E con componenti irriducibili $\{E_k\}$. Risulta facilmente $f_*(f^*\alpha) = \alpha$ per ogni forma liscia α su N; dunque è naturale pensare al pull-back di correnti partendo dal pull-back di divisori su N, che assume una duplice forma.

Se $D \subset N$ è un divisore, la sua trasformata stretta (o propria) tramite α è $D' := \overline{f^{-1}(D - Z)}$, mentre la sua trasformata totale è quel divisore $f^*D \subset N'$ caratterizzato dal fatto che se $\{w = 0\}$ è un'equazione locale per D in N, allora $\{w \circ f = 0\}$ è un'equazione locale per f^*D in N'. Supponendo per semplicità D irriducibile, si dimostra che il legame fra i due è il seguente:

$$f^*D = D' + \sum n_k E_k$$

per certi interi non negativi n_k (vedi [1], Proposizione 5.4 oppure [46] pagg. 604-605 nel caso di un blow-up).

Notiamo inoltre che, mentre ha senso pensare alla trasformata stretta di un sottoinsieme analitico $Y \subset N$ senza componenti irriducibili nel centro, non esiste una nozione di trasformata totale di Y, se $\mathrm{codim} Y > 1$.

Passando al caso di correnti positive di bidimensione (p, p), la procedura per fare la trasformata stretta di una corrente T è ancora quella di restringerla a $N - Z$, tirarla indietro con $(f^{-1})_*$ e poi estenderla attraverso l'insieme eccezionale E, ovvero definire la trasformata stretta di T tramite f come $\tilde{T}_f$, dove

$$T_f := f|_{N'-E}^* T|_{N-Z} := (f|_{N'-E})_*^{-1} T|_{N-Z}.$$

Questa definizione ha senso anche se T è solo di ordine zero, purché non stia sul centro Z (vedi la proposizione seguente) e vale:

PROPOSIZIONE 4.2. (*cfr. Proposizione* 3.2 *di* [5]) *Se* $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(N)$ *è una corrente di ordine zero, sono equivalenti:*

1. $\chi_Z T = 0$ *e* T_f *ha massa localmente finita attraverso* E
2. *esiste una corrente* T' *di ordine zero su* N' *tale che* $\chi_E T' = 0$ *e* $f_* T' = T$.

Se T' *esiste, essa è unica poiché risulta* $T' = \tilde{T}_f$*, ed è chiamata la* trasformata stretta *di* T *mediante* f*. Se* $T \geq 0$*, anche* $T' \geq 0$.

In [57], l'autore considera lo scoppiamento π di $\mathbb{C}^n$ sul centro $Z \simeq \mathbb{C}^s$, e per ogni $s \leq p \leq n-2$ esibisce una corrente chiusa e positiva T di bidimensione (p,p) tale che T_π non si estende attraverso il divisore eccezionale: dunque nel caso di bigrado superiore a $(1,1)$ non è garantita l'esitenza della trasformata stretta nemmeno per correnti chiuse e positive.

Anche per $(1,1)-$correnti (che corrispondono al caso geometrico dei divisori) si può avere lo stesso problema se non si chiede la chiusura: in [5] l'Esempio 3.14 esibisce una $(1,1)-$corrente T positiva e plurisuperarmonica ($i\partial\overline{\partial}T \leq 0$, dunque nella classe DSH che verrà definita nel Paragrafo 7) per cui T_π non si estende attraverso il divisore eccezionale di un blow-up π. Il risultato migliore di esistenza è (cfr. Proposizione 3.13 in [5]):

PROPOSIZIONE 4.3. *Se* $T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(N)$ *è una corrente positiva e plurisubarmonica, esiste la sua trasformata stretta* T' *a* N'.

Per quanto riguarda il conservarsi della chiusura, si può vedere il Teorema 3.11 in [5]: se la $(1,1)-$corrente positiva T è chiusa, anche T' è chiusa; se T è pluriarmonica, allora in generale $i\partial\overline{\partial}T' \leq 0$, ed è pluriarmonica per esempio se E è compatto.

Osserviamo inoltre che nell'esempio di [57] sopra citato, il divisore eccezionale E non è compatto; infatti, per quanto riguarda correnti di bidimensione $(1,1)$ si ha il seguente risultato:

TEOREMA 4.4. (*cfr. Teorema* 4.1*, Proposizione* 4.5 *e Proposizione* 4.6 *di* [5]) *Sia* $T \in \mathcal{D}'_{1,1}(N)$ *una corrente positiva e plurisubarmonica, con* $\chi_Z T = 0$. *Se vale una delle seguenti ipotesi sulla modificazione* f*:*

1. E *è compatto e ha un intorno kähleriano in* N'
2. T *è a supporto compatto e c'è una corrente di Kähler in un intorno di* $f^{-1}(\mathrm{supp}T)$,

allora esiste la trasformata stretta T'*. Se* T *è chiusa* ($\partial\overline{\partial}-$*chiusa), anche* T' *lo è.*

Questo teorema indica che l'ipotesi di compattezza e di kählerianità delle varietà coinvolte potrebbe portare a miglioramenti dei risultati sulle trasformate strette (vedi Paragrafo 8): d'altra parte, usando la forma di Kähler in dualità con le correnti (alla Harvey e Lawson) si conclude facilmente che su una varietà compatta kähleriana ogni corrente plurisubarmonica o plurisuperarmonica è in realtà $\partial\overline{\partial}-$chiusa.

La trasformata stretta di una corrente può essere pensata come una sorta di " parte principale" del pull-back della corrente (quando ciò ha senso, ovvero in bidimensione $(n-1, n-1)$), soprattutto dal punto di vista delle classi di coomologia. Tornando ai divisori, si nota infatti che data la ipersuperficie irriducibile D su N, D' risulta essere un addendo del pull-back (o trasformata totale) f^*D, il quale sta nella classe di coomologia $f^*[D]$ (vedi [5], 3.3 e 3.4).

Possiamo quindi definire *trasformata totale* di una $(1,1)-$corrente $\partial\overline{\partial}-$chiusa di ordine zero T su N, una $(1,1)-$corrente R su N', di ordine zero e $\partial\overline{\partial}-$chiusa, tale che $f_*R = T$ e $R \in f^*[T]$. Se tale corrente esiste, essa è unica, e viene denotata con f^*T; in questo caso esiste anche T', e vale (cfr. [5], Teorema 3.9):

$$f^*T = T' + \chi_E(f^*T).$$

In generale, a differenza del caso dei divisori, $\chi_E(f^*T)$ non è una corrente " di E", cioè non è del tipo $\sum_k c_k[E_k]$ (vedi [5], Esempio 3.10), tuttavia vale il seguente risultato (ibidem, Teorema 3.11):

TEOREMA 4.5. *Sia $T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(N)$ una corrente positiva e pluriarmonica: allora esiste f^*T, essa è positiva e pluriarmonica, e vale*

$$f^*T = T' + \sum_k f_k[E_k]$$

per certe funzioni f_k, non negative e debolmente plurisubarmoniche su E_k.

Dunque per quanto riguarda le proprietà del pull-back nel caso di modificazioni, la trasformata totale di $(1,1)-$correnti conserva la positività e le classi di coomologia, ed è compatibile con il caso dei divisori, ma non con quello delle forme (in generale, se R è la trasformata totale della forma β, R e $f^*\beta$ stanno nella stessa classe di coomologia; tuttavia, essendo $f^*\beta$ liscia, $\chi_E f^*\beta = 0$, dunque se fosse $R = f^*\beta$, risulterebbe $f^*\beta = \beta'$, che non è liscia essendo un'estensione banale).

– **Il caso del bigrado** $(1, 1)$**.**

Abbiamo visto nelle modificazioni come il caso dei divisori sia particolare: in realtà infatti per $(1, 1)-$correnti chiuse e positive si può costruire il pull-back per mappe olomorfe e suriettive usando un potenziale locale.

Sia $f : M \to N$ olomorfa e suriettiva, e sia T una $(1, 1)-$corrente chiusa e positiva su N; in opportune carte locali $\{U_i\}$ si ha $T|_{U_i} = i\partial\overline{\partial}h_i$, con $h_i \in Psh(U_i)$; dunque $h_i \circ f \in Psh(f^{-1}(U_i))$, non essendo identicamente uguale a meno infinito, e possiamo definire $f^*T|_{f^{-1}(U_i)} = i\partial\overline{\partial}(h_i \circ f)$: in questo modo f^*T risulta una $(1, 1)-$corrente chiusa e positiva su M.

Inoltre si conservano le classi di coomologia e si ha un risultato di continuità (cfr. Proposizione 1 in [57]). Se α è una forma, ovviamente $f^*\alpha$ è il solito pull-back, e nel caso dei divisori è la trasformata totale.

Si tratta di confrontare tale costruzione con le precedenti, nel caso di $(1, 1)-$correnti chiuse e positive. Per quanto riguarda le submersioni olomorfe, le due definizioni coincidono: con una partizione dell'unità possiamo pensare la forma test φ a supporto in una carta dove $T = i\partial\overline{\partial}h$, e il confronto segue immediatamente. Anche il caso delle mappe a fibre equidimensionali è immediato.

Nel caso delle modificazioni, come per i divisori, il confronto sarà con la trasformata totale; dato che nelle nostre ipotesi essa è unica (cfr. Teorema 3.9 di [5]), ci basta controllare che la costruzione precedente conservi le classi di coomologia (vedi sopra) e valga $f_*(f^*T) = T$ (le due correnti potrebbero differire solo sul centro della modificazione, che però ha codimensione almeno due).

– **Pull-back e numeri di Lelong**

È interessante, quando si può fare il pull-back, mettere in relazione i numeri di Lelong di T con quelli di f^*T; citiamo qui alcuni risultati.

Teorema 4.6. (*Proposizione* 5 *in* [57]) *Siano* $U \subset \mathbb{C}^n$ *e* $V \subset \mathbb{C}^m$ *aperti, e sia* $f : U \to V$ *una mappa olomorfa. Per ogni corrente chiusa e positiva* T *su* V *tale che esista* f^*T *come limite di forme lisce chiuse e positive, si ha* $n(T, f(x)) \leq n(f^*T, x)$ *per ogni* $x \in U$.

Teorema 4.7. (*Corollario* 4 *in* [39]) *Siano* M *ed* N *varietà connesse di dimensione* m *ed* n, *con* $m = n + k$, *e sia* $f : M \to N$ *una mappa olomorfa di rango massimo, ovvero una submersione olomorfa. Per ogni* K *compatto in* M *esiste una costante* $C_K > 0$ *tale che per ogni* $x \in K$ *e per ogni* $(1, 1)-$*corrente chiusa e positiva* T *su* N *si ha* $n(T, f(x)) \leq n(f^*T, x) \leq C_K n(T, f(x))$.

Per quanto riguarda le modificazioni, nel caso di $(1,1)-$correnti positive e chiuse, vale

$$f^*T = T' + \chi_E(f^*T) = T' + \sum_k c_k[E_k]$$

dove $c_k = n(f^*T, E_k)$ (cfr. [1], Teorema 10.2).

Inoltre, se il centro Z è liscio, vale (cfr. Teorema 3.4 in [4]) $n(T,Z) = n(f^*T, E)$. Dunque paragonando i numeri di Lelong si ricava, per esempio, che per quasi ogni $x \in E$ vale $n(T', x) = 0$.

In [49] l'autore considera una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su una superficie compatta S e la " desingolarizza" (ovvero attenua i suoi numeri di Lelong, visti come indicatori della singolarità della corrente), ottenendo il seguente teorema sulla sua trasformata totale (cfr. Teorema 1.1 ibidem).

Teorema 4.8. *Sia T una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su una superficie compatta S. Per ogni $\epsilon > 0$, esiste una composizione finita di blow-ups $f : \tilde{S} \to S$ tale che $f^*T = \sum c_j[C_j] + \tilde{T}$, dove $c_j \geq 0$, le C_j sono curve lisce con normal crossings e $\tilde{T}$ è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su $\tilde{S}$ tale che $sup_{x\in\tilde{S}}\ n(\tilde{T}, x) < \epsilon$.*

Il pull-back di correnti si rivela uno strumento importante per affrontare vari problemi geometrici: per quanto riguarda le modificazioni, si può vedere [2], [4], [5], [49], [40].

Riprenderemo questo argomento nel Paragrafo 8, per trattare il caso di varietà compatte kähleriane e il caso di mappe meromorfe.

5 – L'ambiente della dinamica olomorfa.

Nel passaggio da una a più variabili complesse, cambiano notevolmente le tecniche adatte ai problemi: questo succede anche nel campo della dinamica olomorfa, nello studio delle iterate di mappe olomorfe (e meromorfe) $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ o, a livello locale, $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$.

Le monografie [41] e [42] presentano argomenti di dinamica olomorfa studiati mediante strumenti che generalizzano quelli classici, per esempio l'iperbolicità secondo Kobayashi. Tuttavia in questi ultimi anni si è andata affermando un'altra via, quella che usa la teoria del (pluri-)potenziale, ovvero funzioni plurisubarmoniche e correnti positive e chiuse: essa ha dato un notevole impulso allo studio di queste correnti, soprattutto per quanto riguarda il pull-back mediante mappe meromorfe e il prodotto (vedere per esempio [35]).

Questo paragrafo ha lo scopo di mettere in luce come nascano naturalmente correnti chiuse e positive (di bigrado $(1,1)$, all'inizio) strettamente collegate ai principali oggetti di studio della dinamica olomorfa, gli insiemi di Fatou e di

Julia; non è possibile qui dar conto degli sviluppi successivi, nemmeno come bibliografia, dunque ci limitiamo a citare la monografia [43].

Partiamo da una mappa olomorfa $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ (oppure avente come dominio un aperto di $\mathbb{C}^{n+1}$ contenente l'origine), $F(z) = F_k(z) + F_{k+1}(z) + \dots$, con F_k polinomio omogeneo di grado $k \geq 2$ e non degenere ($F_k^{-1}(0) = \{0\}$). Notiamo che la condizione che F_k sia non degenere dice esattamente che essa induce (mediante la proiezione canonica π) $f_k : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$. Poniamo $F^n := F \circ \dots \circ F$.

Indichiamo poi con $G_n := \frac{1}{k^n} log||F^n|| : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; si prova che la successione $\{G_n\}$ converge a una funzione plurisubarmonica G su un intorno dell'origine, detta la *funzione di Green* o la *funzione potenziale* di F.

Se partiamo direttamente da $f = f_k : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, per ogni $(1,1)-$forma chiusa ω che rappresenti un generatore positivo di $H^2(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$, la successione $\frac{1}{k^n}(f^m)^*\omega$ converge a una $(1,1)-$corrente T, detta *corrente di Green*, che non dipende da ω, poiché si ha $i\partial\overline{\partial}G = \pi^*T$ (cfr. Teorema 5.1 in [52]).

In modo naturale in dinamica olomorfa si considerano mappe non polinomiali ma razionali, ovvero meromorfe. Le mappe meromorfe non costanti $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ sono della forma $f([z]) = [F_0(z) : \dots F_n(z)]$, dove $F_0, \dots, F_n$ sono polinomi omogenei in $n+1$ variabili, tutti dello stesso grado (detto grado di f) e privi di fattori comuni; la mappa f è olomorfa se i polinomi $F_0, \dots, F_n$ non hanno zeri comuni (tranne l'origine). L'insieme I_f di tali zeri comuni è detto insieme di indeterminazione di f, dunque $f : \mathbb{P}_n - I_f \to \mathbb{P}_n$ è olomorfa.

In generale, si studiano le iterate di mappe meromorfe *generiche*: qui ci limitiamo a definirle nel caso $n = 2$, che presenta già i caratteri essenziali dello studio. Sia dunque $r : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una mappa meromorfa non costante, di grado d; ad essa corrisponde (via la proiezione canonica π) $R : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, data dalla terna di polinomi omogenei in tre variabili, di grado d, priva di fattori comuni (la terna è unica a meno di un fattore costante). L'insieme I_r è finito: diremo che max $rk(r) = k$ se $\max_{x \in \mathbb{P}_2 - I_r}(\mathrm{rank}(dr_x)) = k$. È ragionevole considerare $d \geq 2$ (il grado 1 viene studiato a parte, per la sua semplicità) e assumere la condizione generica sul rango: max $rk(r) = 2$.

Se vogliamo considerare $r \circ r$, partiamo da $R \circ R$, che induce una mappa olomorfa da $\mathbb{P}_2 - \pi((R \circ R)^{-1}(0)) \to \mathbb{P}_2$, che si estende a $r^2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una volta eliminati gli eventuali fattori comuni delle sue componenti. Se tali fattori comuni non compaiono mai nelle iterate, la mappa meromorfa r (con le condizioni precedenti) è detta *generica*: un esempio sono le mappe olomorfe.

Sia dunque $r : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una mappa meromorfa generica di grado $d \geq 2$, e R la corrispondente mappa polinomiale su $\mathbb{C}^3$: il risultato importante è che la funzione G costruita sopra è pluriarmonica su $\pi^{-1}(\mathcal{F})$, dove $\mathcal{F}$ è l'insieme di Fatou di r.

Da ciò segue che se indichiamo con T la $(1,1)-$corrente positiva su $\mathbb{P}_2$ tale che $\pi^*T = dd^cG$, il supporto di T è contenuto nell'insieme di Julia $\mathcal{J}$ di r, e se

r è normale (ha il numero massimo di nice points, cfr. la definizione 2.9 in [43]) allora supp$T = \mathcal{J}$ (cfr. Proposizione 4.5 ibidem).

Di T è interessante studiare cosa succede procedendo con le iterate, partendo da r^*T (Teorema 4.10 ibidem: " Se r è meromorfa generica, r^*T è ben definita ed è un multiplo di T"): notiamo che essendo T di bigrado $(1,1)$, si può procedere al pull-back usando un potenziale locale, così come descritto alla fine del Paragrafo 4, ovvero si definisce $r^*T = dd^c(G \circ R)$. L'operatore r^* dà informazioni sulla dinamica di r; in particolare se r non è olomorfa, r^*T non risulta liscia anche nei casi in cui si parte con potenziale G liscio. Per questo motivo lo studio dei numeri di Lelong di r^*T dice qualcosa su queste singolarità: per esempio si veda la Proposizione 9 in [39].

Inoltre risulta significativa su $\mathbb{P}_2$ la misura $T \wedge T$ (cfr. Paragrafo 6 ibidem): in generale, su $\mathbb{P}_n$, il supporto di $T \wedge \cdots \wedge T$ è un oggetto di interesse dinamico, poiché si cercano delle misure invarianti; infatti la strategia naturale è appunto quella di costruire prima $(1,1)-$correnti invarianti chiuse e positive, come la corrente di Green T, e poi farne il prodotto (cfr. per esempio [34]).

Nei prossimi paragrafi presenteremo alcuni risultati sulle correnti positive in ambiente proiettivo o kähleriano compatto, che vengono usati anche in dinamica olomorfa.

6 – Regolarizzazione di correnti

Sia M una varietà complessa, connessa e *compatta*; i gruppi di coomologia (di de Rham, di Aeppli,...) di M sono dunque finito-dimensionali, e si possono calcolare usando sia forme differenziali che correnti (cfr. [46], p. 382).

È ben noto (cfr. anche [1], Paragrafo 7) che in generale la classe di coomologia di una corrente chiusa e positiva non contiene rappresentanti lisci positivi, nemmeno se la varietà è $\tilde{\mathbb{P}}_2$, lo spazio proiettivo scoppiato in un punto: ciò dipende, come vedremo, dalla mancanza di *omogeneità* di $\tilde{\mathbb{P}}_2$. Perciò in generale non si riesce ad approssimare una corrente chiusa e positiva con forme chiuse e positive che stiano nella stessa classe di coomologia: per affrontare tale problema, bisogna porre ulteriori condizioni sulla varietà compatta e/o indebolire la richiesta di positività o di regolarità per le forme approssimanti (come abbiamo già visto anche nel Paragrafo 3).

– Il caso omogeneo.

Sia M una varietà complessa, omogenea per l'azione di un gruppo di Lie G di biolomorfismi di M. Fissiamo su G una forma di volume μ e una funzione $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$, $\chi \geq 0$, $\int_G \chi(g)\mu(g) = 1$; indichiamo con l_g l'automorfismo di G indotto dalla moltiplicazione a sinistra per $g \in G$.

Definizione 6.1. Sia $T \in \mathcal{D}'_{p,q}(M)$; la corrente liscificata $\chi * T \in \mathcal{D}'_{p,q}(M)$ è definita come $(\chi * T)(\beta) := \int_G \chi(g)T(l_g^*\beta)\mu(g)$ per ogni forma test β.

Proposizione 6.2. *Data $T \in \mathcal{D}'_{p,q}(M)$, esiste $T_\chi \in \mathcal{E}^{n-p,n-q}(M)$ che rappresenta la corrente $\chi * T$, ovvero per ogni forma test β si ha $(\chi * T)(\beta) := \int_M T_\chi \wedge \beta$. Inoltre, se T è chiusa, T_χ è chiusa e coomologa a T nella coomologia di de Rham.*

La dimostrazione della proposizione precedente si può trovare in [53], Proposizione 1.2.1 e Osservazione 1.1; nello stesso modo si può dimostrare, per quanto riguarda la coomologia di Aeppli, che se T è dd^c-chiusa o componente di bordo, anche T_χ lo è.

Ricordiamo che una corrente reale $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ è detta definita positiva (ovvero strettamente positiva) nel punto $x \in M$ se per ogni forma test positiva η, che non si annulla in x, vale $T(\eta) > 0$. La stretta positività passa da T a T_χ, come mostra il seguente risultato, dovuto a Richthofer:

Teorema 6.3. (*cfr.* [53], *Teorema* 1.3.1) *Se $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(M)$ è una $(p,p)-$corrente chiusa e positiva, strettamente positiva in x, allora $T_\chi \in \mathcal{D}^{p,p}(M)$ è una forma chiusa e positiva nel senso delle correnti, ed è strettamente positiva sull'insieme* $(\mathrm{supp}\chi)^0 \cdot x := \{z \in M/z = gx, g \in (\mathrm{supp}\chi)^0\}$.

Osservazione Lo stesso vale se T è pluriarmonica o componente di bordo (sempre nel senso delle correnti).

Il teorema di Richthofer ha permesso a Berteloot di dimostrare il seguente interessante risultato:

Teorema 6.4. (*cfr.* [53], *Corollario* 1.3.2 *e Proposizione* 1.3.3) *Se M è uno spazio omogeneo che ammette una $(1,1)-$corrente T chiusa e positiva, strettamente positiva in un punto, allora M è una varietà kähleriana.*

In particolare, se lo spazio omogeneo $M = G/H$ è compatto, la sua fibrazione di Tits lo esprime come un fibrato olomorfo a base una varietà razionale (e omogenea) Q e a fibra F olomorficamente parallelizzabile; se M risulta una varietà kähleriana, allora $M \simeq F \times Q$ e $F = Alb(M)$ è un toro.

Questo tipo di regolarizzazione di correnti è stato applicato innanzitutto da Guedj e da Dinh e Sibony in problemi di dinamica complessa ([48], [30]) prendendo $M = \mathbb{P}_n$, oppure M compatta omogenea, oppure M varietà proiettiva. Per esempio, in [30] gli autori studiano l'entropia topologica di una mappa razionale dominante $f : M \to M$ su una varietà proiettiva M. La tecnica usata è di estendere a zero un pull-back di correnti, fatto dove f è localmente biolomorfa: ma per poter considerare l'estensione banale, c'è bisogno di opportune stime di massa, che si ottengono regolarizzando la corrente. Gli strumenti sono di questo tipo:

Proposizione 6.5. (*cfr.* [30], *Lemma* 2) *Sia M una varietà proiettiva complessa di dimensione $n \geq 2$, dotata di una forma di Kähler ω con $\int_M \omega^n = 1$. Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ chiusa e positiva, esiste una successione $\{T_m\}$ di correnti lisce, chiuse e positive, che converge a una corrente chiusa e positiva $T' \geq T$, e per ogni m, $||T_m|| \leq c||T||$.*

La dimostrazione consiste nell'immergere M in $\mathbb{P}_N$ e poi proiettare opportunamente su $\mathbb{P}_n$, di modo da avere una famiglia finita di mappe olomorfe suriettive $\Psi_i : M \to \mathbb{P}_n$ tale che in ogni punto almeno una delle Ψ_i sia di rango massimo. Ponendo poi $S_i := (\Psi_i)_* T$, si ha $||S_i|| \leq c_1||T||$, e ci si è ricondotti ad un problema analogo su $\mathbb{P}_n$, che è una varietà omogenea.

– **Il caso kähleriano.**

Come mostra l'esempio di $\tilde{\mathbb{P}}_2$, in ambiente kähleriano compatto non omogeneo non ci si può aspettare di regolarizzare al meglio correnti positive e chiuse: una strada è quella di *cedere positività* decomponendo le regolarizzanti, metodo che risale al lavoro di Demailly ed è sviluppato da Dinh e Sibony.

Sia dunque M una varietà kähleriana compatta di dimensione $n \geq 2$, dotata di una forma di Kähler ω fissata, di solito con $\int_M \omega^n = 1$.

Proposizione 6.6. *Sia (M, ω) come sopra. Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ chiusa e positiva, esiste una successione $\{T_m\}$ di correnti correnti lisce, chiuse e positive, che converge a una corrente chiusa e positiva $T' \geq T$, e per ogni m, $||T_m|| \leq c||T||$ e $||T'|| \leq c||T||$.*

Abbiamo riportato questa proposizione perché essa è l'analogo kähleriano della Proposizione 6.5; si tratta comunque di una versione particolare del teorema seguente (basta prendere $T' = T + \lim_m T_m^-, T_m = T_m^+$).

Teorema 6.7. (*cfr.* [29], *Teorema* 1.1, *Teorema* 4.1, *Corollario* 4.6) *Sia (M, ω) come sopra. Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ chiusa (o pluriarmonica) e positiva, ci sono successioni $\{T_m^+\}$ e $\{T_m^-\}$ di correnti lisce, chiuse (o pluriarmoniche) e positive, tali che, per ogni m, $||T_m^{\pm}|| \leq c||T||$ e $\lim_m T_m^+ - T_m^- = T$. Se T è a coefficienti continui, la convergenza è uniforme.*

Questa tecnica di regolarizzazione è la più usata in letteratura nell'ambiente delle varietà kähleriane compatte: conviene dunque darne la linea di dimostrazione e considerare varie osservazioni.

1. Nella Proposizione 6.6, le regolarizzate T_m si mantengono chiuse e positive, ma convergono non a T, bensì a $T + c\omega$; invece, nel Teorema 6.7, T è limite di una successione di differenze di forme chiuse e positive: questo ultimo caso si rivela il più agevole da usare, ed è la ragione per cui si introduce la classe delle correnti DSH (vedi Paragrafo 7).
2. Le stime di massa si collegano in modo naturale alle classi di coomologia di correnti chiuse e positive: per esempio, nel caso chiuso (ma lo stesso vale nel caso pluriarmonico, dato che la forma di Kähler è chiusa), se T ed S sono $(p,p)-$correnti chiuse e positive, coomologhe, allora $||T|| = (T, \omega^{n-p}) = (T + dd^c u, \omega^{n-p}) = (S, \omega^{n-p}) = ||S||$. In generale la massa non determina la classe di coomologia, a meno di casi particolari: per esempio, essendo $\dim H^{p,p}(\mathbb{P}_k, \mathbb{C}) = 1\ \forall p$, ogni corrente chiusa e positiva T sta nella classe di coomologia $[||T||\omega^p]$, e dunque la massa individua la classe di coomologia. Si veda anche, per il caso $p = 1$, la Definizione 7.2.
3. Cenno di dimostrazione nel caso chiuso. I punti importanti sono due: innanzitutto tramite la regolarizzazione del divisore eccezionale, ovvero della $(1,1)-$corrente $[\tilde{\Delta}]$ sulla varietà kähleriana $\widetilde{X \times X}$ (che è lo scoppiamento di $X \times X$ lungo la diagonale Δ) si riesce a ottenere su $X \times X$ una regolarizzazione debole del tipo $K_m^+ - K_m^- \to [\Delta]$, dove $K_m^\pm$ sono correnti chiuse e positive, a coefficienti L^1_{loc} e lisce fuori di Δ.

In secondo luogo, se π_1, π_2 sono le proiezioni di $X \times X$ sui due fattori, le correnti $T_m^\pm$ si ottengono come $T_m^\pm := (\pi_1)_*(\widetilde{K_m^\pm \wedge (\pi_2)^* T})$. Si mostra, lavorando in carta locale, che esse verificano la convergenza e la stima di massa richieste. Infine, con un'analisi dei coefficienti delle $K_m^\pm$ si prova che esse si possono rimpiazzare con correnti a coefficienti lisci.

– **Minore positività e/o regolarità.**

Alla base di questi risultati c'è il fondamentale teorema di regolarizzazione di Demailly, che è l'argomento del lavoro [21]. Lo riportiamo qui in una versione che deriva da modifiche del risultato originale (Teorema 3.2 in [26] e Teorema 1.2 in [62]).

Teorema 6.8. *Sia X una varietà complessa compatta, su cui è fissata una metrica hermitiana con forma ω. Sia $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi$ una $(1,1)-$corrente chiusa su X, con α liscia (e chiusa) e ψ funzione quasi plurisubarmonica; supponiamo che valga $T \geq \gamma$ per una $(1,1)-$forma reale γ su X a coefficienti continui. Allora* *esiste una successione* $T_k = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_k$ *di* $(1,1)-$*correnti chiuse su* X*, coomologhe a* T*, tali che:*

1. *esistono degli insiemi analitici* Z_k *di* X*,* $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset X$ *tali che* ψ_k *(e dunque* T_k*) è liscia su* $X - Z_k$*, mentre vicino a* Z_k *il potenziale* ψ_k *ha poli logaritmici*
2. $\{\psi_k\}$ *è non crescente, converge a* ψ *e dunque le* T_k *convergono a* T
3. $T_k \geq \gamma - \delta_k\omega$*, con* $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$*.*

Nelle ipotesi precedenti, se γ *è una forma chiusa, si può scegliere* $\delta_k = C/k$ *e vale inoltre per ogni* p*,* $1 \leq p \leq n$*:*

$$\lim_{k\to\infty} 1/k \int_{X-Z_k} (T_k - \gamma + (C/k)\omega)^p \wedge \omega^{n-p} = 0.$$

Questo tipo di risultati si applica nella caratterizzazione di metriche singolari su line bundles, e quindi per caratterizzare varietà (di Moishezon, nella classe $\mathcal{C}$ di Fujiki) tramite correnti strettamente positive: si possono vedere per esempio i lavori sopra citati, e la loro bibliografia.

7 – Funzioni quasi plurisubarmoniche e correnti DSH

Se X è una varietà compatta, per il principio del massimo si ha $Psh(X) = \mathbb{R}$: conviene quindi introdurre (cfr. [21]) la nozione di funzione quasi plurisubarmonica (*almost psh*), a cui è legata la nozione di corrente quasi positiva (*almost positive*). Definiremo qui i due spazi $QPSH(X)$ e $PSH(X, \alpha)$; un ulteriore sviluppo, dal punto di vista delle correnti, è la classe di correnti $DSH(X)$.

Definizione 7.1 Sia X una varietà compatta di dimensione n.

1. $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$ è detta quasi positiva se esiste $\alpha \in \mathcal{E}^{p,p}(X)_{\mathbb{R}}$ con $T \geq -\alpha$.
2. Una funzione φ è detta quasi plurisubarmonica su X ($\varphi \in QPSH(X)$) se è localmente esprimibile come somma di una funzione plurisubarmonica e di una funzione liscia.
3. Siano $\alpha \in \mathcal{E}^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}, \varphi \in L^1_{loc}(X)$: diremo che $\varphi \in PSH(X, \alpha)$ se $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq -\alpha$.

Osservazioni

1) In alcuni lavori, per esempio [56], [50], [54] e [31], la definizione di $PSH(X,\alpha)$ è un po' diversa: tipicamente, è data in ambiente kähleriano e la forma α è richiesta essere chiusa, eventualmente non liscia. D'altra parte (cfr. Definizione 2.1 e commenti che la seguono in [50]) gli autori osservano che conviene prendere una rappresentante liscio della classe di α, così che le funzioni considerate siano superiormente continue (e quindi superiormente limitate) su X, e si possa considerare $PSH(X, \alpha)$ come sottospazio chiuso

di $L^1(X)$ (altrimenti bisogna introdurre la nozione di funzione $\alpha-$superiormente semicontinua). Per quanto riguarda la condizione di chiusura (che permette di confrontare localmente φ col potenziale di α) e la kählerianità della varietà, le faremo intervenire al momento del loro uso. Per esempio, si può osservare che in una varietà $p-$kähleriana X (cfr. [1], Definizione 6.5), con forma Ω, una corrente $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$ è quasi positiva se e solo se esiste $c > 0$ tale che $T \geq -c\Omega$.

2) In (1) e (3) della definizione precedente, la definizione non cambia se si chiede che α sia strettamente positiva ($\alpha > 0$).
3) Se φ è quasi plurisubarmonica, la corrente $i\partial\overline{\partial}\varphi$ è quasi positiva; viceversa, se $\varphi \in L^1_{loc}(X)$ e $i\partial\overline{\partial}\varphi$ è quasi positiva, allora φ coincide quasi ovunque con una funzione quasi plurisubarmonica.
4) Se $\varphi \in PSH(X,\alpha)$, allora φ è quasi plurisubarmonica; viceversa, se φ è quasi plurisubarmonica, esiste α tale che $\varphi \in PSH(X,\alpha)$.
5) Le funzioni quasi plurisubarmoniche hanno la stessa " regolarità" delle funzioni plurisubarmoniche: dunque sono superiormente semicontinue e coincidono quasi ovunque con una funzione $L^1_{loc}(X)$. Essendo X compatta, sono in $L^1(X)$ e si può supporre senza perdita di generalità che siano a valori non positivi.

Consideriamo ora i legami con le classi di coomologia [.] in $H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$. Se T è una $(1,1)-$corrente chiusa e quasi positiva, esiste una $(1,1)-$forma chiusa β e una funzione φ quasi plurisubarmonica con $T = \beta + i\partial\overline{\partial}\varphi$; infatti, preso un qualsiasi rappresentante liscio β della classe $[T]$, vale $T = \beta + i\partial\overline{\partial}\varphi$, ma essendo T una corrente $\mathbb{C}$-piatta, risulta che $\varphi \in L^1_{loc}(X)$, e la positività segue facilmente; φ è detto un *potenziale* per T.

Definizione 7.2. Sia X una varietà compatta di dimensione n, su cui è fissata una metrica di Gauduchon h (ovvero tale che $i\partial\overline{\partial}\omega_h^{n-1} = 0$). Sia $\alpha \in \mathcal{E}^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$:

1. La classe $[\alpha]$ è detta *psef* se contiene $T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(X)$ positiva e chiusa.
2. La classe $[\alpha]$ (qui si può supporre anche α non liscia) è detta *nef* se $\forall\epsilon > 0$ esiste un rappresentante liscio α_ϵ di $\{\alpha\}$ con $\alpha_\epsilon \geq -\epsilon\alpha$.

Osservazioni

1) È facile mostrare che la classe $[\alpha]$ è psef se e solo se $PSH(X,\alpha) \neq \emptyset$; in questo caso, chiamando $P^{1,1}_\alpha(X) := \{T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(X)$ positive e chiuse con $[\alpha] = [T]\}$, vale $PSH(X,\alpha) = P^{1,1}_\alpha(X) \oplus \mathbb{R}$.
2) Demailly dimostra in [21] (Proposizione 6.1) che ogni classe nef è psef, mentre la classe della corrente di integrazione sul divisore eccezionale del blow-up di $\mathbb{P}_n$ in un punto è psef ma non nef, e dunque le due classi non sempre coincidono.
3) Inoltre dimostra che se T è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva, che ha numeri di Lelong nulli fuori di un insieme finito (per esempio se è liscia

fuori dell'insieme), allora $[T]$ è nef. Questo gli consente di provare che se X è una varietà compatta con fibrato tangente nef (quindi classi nef e psef coincidono), allora X è kähleriana se e solo se sta nella classe $\mathcal{C}$ di Fujiki, ed è proiettiva se e solo se è di Moishezon (Corollario 1.6 ibidem).

L'analisi dei coni di classi nef e psef si può trovare, per esempio, in [23], [24] e [58]. Introduciamo ora le classi di correnti $DSH^p(X), 0 \leq p \leq n-1$ (cfr. [29] o [34]).

Definizione 7.3 Sia X una varietà compatta di dimensione n, e sia $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$. Diremo che $T \in DSH^p(X)$ se esistono su X le correnti $T_j, \Omega_j^-, \Omega_j^+$ $(j = 1, 2)$, tali che

1. $T_j \leq 0,\ j = 1, 2$, e $T = T_1 - T_2$.
2. $\Omega_j^\pm \geq 0,\ d\Omega_j^\pm = 0,\ i\partial\overline{\partial}T_j = \Omega_j^+ - \Omega_j^-,\ j = 1, 2$.

Siano $T_n \in DSH^p(X),\ T_n \to T$. Diremo che le T_n convergono a T in DSH se le masse $||T_n||_{DSH}$ sono localmente uniformemente limitate, dove

$$||T||_{DSH} := min\{||T_1|| + ||T_2|| + ||\Omega_1^+|| + ||\Omega_1^-|| + ||\Omega_2^+|| + ||\Omega_2^-||\}$$

al variare delle decomposizioni di T descritte in (1) e (2).

Osservazioni

1) Lo scopo di questa definizione è quello di attenuare la richiesta di positività sulle correnti mediante una somma algebrica; correnti positive (o negative) e plurisubarmoniche (o plurisuperarmoniche o pluriarmoniche) stanno in $DSH^p(X)$. Tutte le correnti in $DSH^p(X)$ sono $\mathbb{C}-$normali, e dunque $\mathbb{C}-$piatte.
2) Per $p = 0$ si tratta di funzioni in $L^1_{loc}(X)$; se X è compatto si dimostra facilmente che ogni $T \in DSH^0(X)$ si scrive come $T = T_1 - T_2$, dove $T_j,\ j = 1, 2$, sono funzioni quasi plurisubarmoniche. L'insieme delle funzioni in $L^1(X)$ che sono differenza di funzioni plurisubarmoniche (e a valori non positivi) è chiamato $DSH(X)$ in [33].
3) Usando le proprietà della classe $DSH^0(X)$, in [33] (appendice) gli autori mostrano che un sottoinsieme analitico proprio Y di una varietà kähleriana compatta è globalmente pluripolare, ovvero esiste una funzione φ quasi plurisubarmonica con $Y \subset \{\varphi = -\infty\}$.
4) Se scegliamo X compatta, con una metrica di Gauduchon h, per ogni $\varphi \in DSH^0(X)$ vale $||\Omega_j^+|| = ||\Omega_j^-||$, poiché

$$||\Omega_j^+|| = \int_X \Omega_j^+ \wedge \omega_h^{n-1} = \int_X (i\partial\overline{\partial}T_j + \Omega_j^-) \wedge \omega_h^{n-1} = \int_X \Omega_j^- \wedge \omega_h^{n-1} = ||\Omega_j^-||.$$

Lo stesso vale per $T \in DSH^p(X)$ in presenza di una metrica hermitiana h tale che $i\partial\overline{\partial}\omega_h^{n-p-1} = 0$.

(5) Se T è una $(1,1)-$corrente chiusa e quasi positiva, esiste una $(1,1)-$forma chiusa α e una funzione φ quasi plurisubarmonica (che possiamo assumere non positiva essendo superiormente limitata), con $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$; questo invece non succede in bigrado superiore a uno, nemmeno su varietà compatte kähleriane (cfr. [31] pag. 295). Dunque se $T = -T_2 \geq 0$ e chiusa, e T_1 è un rappresentante liscio della sua classe, ovvero $T_1 - T_2 = i\partial\overline{\partial}S$, non si può chiedere $S \leq 0$, e dunque tocca decomporre nelle Ω_j^-.

(6) L'esempio tipico di corrente $T \in DSH^p(X)$, quando X è una varietà compatta kähleriana, si ottiene partendo da una corrente $S \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$ chiusa e positiva, e da due funzioni quasi plurisubarmoniche limitate φ_1 e φ_2 (che quindi posso moltiplicare per S). Definiamo $T := (\varphi_1 - \varphi_2)S$, ovvero $T_j := \varphi_j S$. Essendo φ_j limitata, posso supporre $\varphi_j \leq 0$ e quindi è soddisfatta (1) della definizione. Inoltre, $i\partial\overline{\partial}T_j = i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge S = (i\partial\overline{\partial}\varphi_j + \alpha_j) \wedge S - \alpha_j \wedge S$ è differenza di due forme globali positive (potendosi scegliere $(1,1)-$forme positive α_j). Tuttavia non si riesce a ottenere la chiusura dei due singoli addendi, ma solo la chiusura della loro somma, a meno di non disporre di una $(1,1)-$forma positiva e chiusa, ovvero di una metrica kähleriana.

Osserviamo che, se $f : M \to N$ è una mappa olomorfa e propria, e $T \in DSH^p(M)$, allora $f_*T \in DSH^p(N)$ poiché, quando è definito, il push-forward conserva chiusura e positività. Per lo stesso motivo, se $f : M \to N$ è una submersione olomorfa, e $T \in DSH^p(N)$, allora $f^*T \in DSH^p(M)$. Per le mappe a fibre equidimensionali, si ha il seguente risultato:

Teorema 7.4. (*cfr.* [34], *Teorema* 3.4) *Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e suriettiva (o dominante) a fibre equidimensionali. Allora l'operatore di pull-back $f^* : DSH^p(N) \to DSH^p(M)$ è ben definito, continuo e commuta con il dd^c. Se $||T||(A) = 0$ per un certo sottoinsieme $A \subset N$, allora $||f^*T||(f^{-1}(A)) = 0$.*

La dimostrazione del Teorema 7.4 è simile a quella del Teorema 4.1: il lemma tecnico di convergenza è provato in [34] direttamente nella classe DSH (Lemma 3.3 ibidem). Più in generale, la classe di funzioni DSH^0 è stabile anche per:

- pull-back mediante mappe olomorfe suriettive (cfr. [33], 2.4)
- push-forward mediante mappe a fibra generica finita (per esempio, modificazioni) (cfr. [33], 2.3).

Qui e nel seguente paragrafo parleremo brevemente di questi argomenti su una varietà compatta kähleriana (X, ω), poiché la serie di lavori di Guedj e altri (cfr. per esempio [17], [25], [59], [50] e le loro bibliografie) sulle funzioni quasi plurisubarmoniche e sull'operatore di Monge-Ampere $(dd^c.)^n$, situa in modo naturale l'analisi su varietà compatte kähleriane (cfr. l'introduzione di [50]). Su tali varietà, lo studio delle funzioni quasi plurisubarmoniche è motivato da:

1. il legame con metriche singolari (cfr. per esempio [38], [25])
2. il legame con l'esistenza di metriche canoniche in geometria kähleriana (cfr. per esempio [66], [65])
3. l'uso frequente in dinamica olomorfa in più variabili.

Riprendendo le osservazioni precedenti, ogni funzione plurisubarmonica o differenza di funzioni quasi plurisubarmoniche su X kähleriana compatta sta in $DSH^0(X)$, proprio perché se $T := \varphi_1 - \varphi_2$, esistono due costanti tali che $i\partial\overline{\partial}\varphi_j \geq -c_j\omega$, da cui $i\partial\overline{\partial}\varphi_j = (i\partial\overline{\partial}\varphi_j + c_j\omega) - c_j\omega$.

Il risultato principale sulle funzioni quasi plurisubarmoniche in ambiente kähleriano è il teorema di regolarizzazione globale che ora presentiamo; la sua dimostrazione è nell'appendice di [50] (nel caso proiettivo, ma confronta anche l'Osservazione 8.3 ibidem).

Teorema 7.5. *Su ogni varietà kähleriana compatta* (X, ω)*, esiste una costante* $A \geq 1$ *tale che ogni funzione* $\varphi \in PSH(X, \omega)$ *è limite di una successione decrescente di funzioni lisce* $\varphi_k \in PSH(X, A\omega)$.

Le correnti DSH si comportano bene rispetto alle regolarizzazioni che abbiamo considerato nel Paragrafo 6 (vedi il seguente teorema), e rispetto a processi di pull-back, come vedremo nel Paragrafo 8.

Teorema 7.6. (*cfr.* [29], *Teorema* 4.4) *Sia* (X, ω) *come sopra. Esiste una costante* $c > 0$ *tale che, per ogni* $T \in DSH^p(X)$*, c'è una successione* $\{T_m\}$ *di correnti lisce, tali che per ogni* m, $||T_m|| \leq c||T||$ *e* $\lim_m T_m = T$.

8 – Pull-back e prodotto di correnti su varietà compatte kähleriane

Riguardo al pull-back di correnti, ci occuperemo principalmente di mappe olomorfe f (suriettive o dominanti) fra varietà compatte kähleriane, continuando il discorso iniziato nel Paragrafo 4. Ricordiamo che se $f : M \to N$ è una mappa olomorfa propria e suriettiva a fibre equidimensionali, e se M è una varietà kähleriana, anche N lo è (Teorema 2 in [67]).

Dato che f è una submersione olomorfa fuori di un sottoinsieme analitico, si potrebbe pensare di procedere come nel caso trattato nel Paragrafo 4, ovvero con una estensione. Questo è possibile usando il procedimento di regolarizzazione di correnti su varietà kähleriane compatte descritto nel Paragrafo 6.

Teorema 8.1. (*cfr. Corollario* 1.3 *e Corollario* 4.2 *in* [29]) *Sia* $f : M \to N$ *una mappa olomorfa e suriettiva fra varietà compatte kähleriane, e sia* Σ *il sottoinsieme analitico tale che* $g := f|_{M-\Sigma}$ *abbia rango massimo. Sia* T *una* $(p,p)-$*corrente positiva e chiusa* (*o pluriarmonica*) *su* N*: allora è ben definita la corrente* $f^*T := \widetilde{g^*T}$*, essa è positiva e chiusa* (*o pluriarmonica*).

Cenno di dimostrazione. Per la Proposizione 6.6, esiste una successione $\{T_m\}$ di correnti chiuse e positive lisce che converge a una corrente chiusa e positiva $T' \geq T$, e per ogni m, $||T_m|| \leq c||T||$ e $||T'|| \leq c||T||$. Siano $S_m := f^*(T_m)$; è possibile controllare uniformemente le masse di queste correnti, poiché (oltre alla stima di massa per le T_m) possiamo usare le forme di Kähler ω_M e ω_N, e $f_*(\omega_M)$ si controlla con un opportuno multiplo di ω_N. Dunque una sottosuccessione delle S_m converge a una corrente S su M, che verifica $S \geq g^*T$ su $M - \Sigma$: perciò è ben definita la corrente $f^*T := \widetilde{g^*T}$, essa è positiva.

La chiusura è dovuta al teorema di Skoda (cfr. Teorema 4.9 in [1]) nel caso chiuso, e al Teorema 1.3 in [34] nel caso pluriarmonico (la dimostrazione data in [29] non è completa). Nel lavoro citato si prova inoltre un risultato di semicontinuità (in generale si vorrebbe che se $T_n \to T$, valesse $f^*T_n \to f^*T$).

Nel caso particolare delle modificazioni fra varietà compatte kähleriane dunque non c'è alcun vincolo sul bigrado della corrente, per quanto riguarda l'esistenza della trasformata stretta di correnti positive e chiuse o pluriarmoniche: infatti la corrente che abbiamo appena costruito è ciò che nel Paragrafo 4 abbiamo chiamato la trasformata stretta di T (e che in [33] gli autori chiamano parte principale di f^*T): per la sua esistenza, è essenziale non solo la kählerianità ma anche la compattezza delle varietà, come prova l'esempio citato dopo 4.2.

In dinamica olomorfa, è necessario usare il pull-back di forme e correnti per mappe razionali, fra varietà proiettive, oppure iterare oggetti per automorfismi della varietà. Entra quindi in gioco l'insieme di indeterminazione, ed è naturale procedere con un pull-back fuori di esso seguito da un'estensione banale, cercando di ottenere un oggetto che abbia le stesse caratteristiche di quello di partenza.

Descriviamo il problema nel primo caso che è stato studiato (dopo $\mathbb{P}_n$).

Sia X^n una varietà algebrica proiettiva e sia $f : X \to X$ una mappa razionale dominante (ovvero localmente aperta sui punti generici di X). Sia $\Gamma = \Gamma_f$ il grafico di f, che possiamo considerare come corrente di integrazione $[\Gamma]$ su $X \times X$, e chiamiamo π_1 e π_2 le proiezioni canoniche di $X \times X$ sui fattori, ristrette a Γ. Sia $I = I_f$ l'insieme dei punti di indeterminazione di f, ovvero $I_f = \{x \in X / \dim(\pi_1^{-1}(x) \cap \Gamma) > 0\}$. I è una sottovarietà algebrica di codimensione almeno due, e $\dim(\pi_1^{-1}(I) \cap \Gamma) \leq n - 1$.

Lo scopo primario è di fare il pull-back $f^*\beta$ di una $(k,k)-$forma (o corrente) β su X: posso ovviamente considerare $(f|_{X-I})^*(\beta)$ e poi tentare di estenderla, come corrente, attraverso I: il punto è proprio garantire l'esistenza della estensione banale, ma non solo.

Per esempio, come si osserva in [47], 2.1, se X è una varietà compatta kähleriana e $f : X \to X$ è una mappa meromorfa dominante, per ogni $(1,1)-$corrente chiusa e positiva T esiste l'estensione $\widetilde{f^*T}$, ed essa è ancora chiusa e positiva. Siccome f è genericamente di rango massimo, si può controllare che la mappa $T \to \widetilde{f^*T}$ è continua e preserva le classi di coomologia; tuttavia questa costruzione non è in generale compatibile con le iterate, ovvero $\widetilde{(f \circ f)^*T} \neq$

$\widetilde{f^*(\widetilde{f^*T})}$ e questo porta, per esempio, a doversi limitare alle mappe algebricamente stabili (cfr. [47] e [48], Osservazione 1.4).

In [48], l'autore propone di considerare il grafico liscio (altrimenti lo si può desingolarizzare, usando mappe olomorfe, e quindi la situazione non cambia), e di definire $f^*\beta := (\pi_1)_*(\pi_2^*\beta)$ e anche $f_*\beta := (\pi_2)_*(\pi_1^*\beta)$. La $(k,k)-$corrente $f^*\beta$ è ben definita sul dominio, e per definizione commuta con gli operatori ∂ e $\overline{\partial}$. Essendo β liscia, $f^*\beta$ è una corrente a coefficienti L^1_{loc} che su $X - I$ coincide con $(f|_{X-I})^*(\beta)$ (perché dove f è olomorfa, vale $\pi_2 = f \circ \pi_1$); siccome non si è aggiunta massa su I, si tratta proprio dell'estensione banale $\widetilde{(f|_{X-I})}^*(\beta)$ (dunque il procedimento non dipende dalla modalità di desingolarizzazione del grafico).

In [30], si propone una strada analoga, senza desingolarizzare il grafico e indicando con π_1 e π_2 le proiezioni canoniche di $X \times X$ sui fattori. Data la $(k,k)-$forma β su X, se ne considera il pull-back a $X \times X$ che diventa del grado " giusto" considerando la corrente $(\pi_2^*\beta) \wedge [\Gamma]$ e proiettando di nuovo su X, ovvero $f^*\beta := (\pi_1)_*(\pi_2^*\beta \wedge [\Gamma])$. Una semplice verifica mostra che le due definizioni coincidono, e che l'operatore f^* così definito è continuo dallo spazio delle forme lisce a quello delle correnti a coefficienti L^1_{loc}.

Questo ovviamente suggerisce un modo di definire pull-back di correnti, anche se esse non sono di grado $(1,1)$, come abbiamo già visto nel Paragrafo 4: bisognerà solo dare un senso opportuno al " wedge con il grafico", facendo leva sulla proiettività della varietà (anzi, vedremo che basta una forma di Kähler).

È possibile anche, in alcuni casi, definire una specie di " trasformata totale" della corrente, come abbiamo fatto nel Paragrafo 4 per le modificazioni; questo discorso viene affrontato in [34] nel caso più generale di *trasformazioni meromorfe* fra varietà compatte.

Definizione 8.2. Siano M e N varietà compatte di dimensione m ed n; una trasformazione meromorfa (MT) di codimensione l, $F : M \to N$, è un sottoinsieme analitico $\Gamma = \sum \Gamma_j$ di dimensione pura $n + l$ di $M \times N$, tale che la proiezione canonica π_2 ristretta a ogni Γ_j sia dominante.

Nel Paragrafo 4 di [34] sono studiati vari casi in cui si può fare il pull-back di forme o correnti per una MT. Se in particolare M ed N sono varietà compatte kähleriane e T è una $(p,p)-$corrente (con $n + l - m \leq p \leq n$) positiva e chiusa o pluriarmonica, si prova che si può estendere $(\pi_2|_{\Gamma-C})^*T$ attraverso C, il luogo dove le fibre di π_2 hanno dimensione minore di quella generica l. Perciò si definisce la trasformata stretta $T' = \tilde{T_F} := (\pi_1)_*\widetilde{(\pi_2|_{\Gamma-C})}^*T$, ed essa risulta positiva e chiusa, o pluriarmonica (cfr. Proposizione 5.1 in [34]). Per ottenere questi risultati, l'ipotesi di kählerianità entra in gioco innanzitutto nell'uso di approssimazioni di correnti (Proposizione 6.6) e poi per ottenere che l'estensione banale sia ancora pluriarmonica, esattamente come abbiamo descritto nello schema di dimostrazione del Teorema 8.1.

Se inoltre succede che si conservino le classi di coomologia, ovvero che $[\tilde{T_F}] = F^*[T]$, allora gli autori chiamano $\tilde{T_F}$ la trasformata totale di T, e la indicano con la notazione usuale, F^*T; in questo caso l'operatore F^* è continuo (Proposizione 5.4 ibidem). Gli autori riescono a provare nel Teorema 5.5 che per $(1,1)-$correnti chiuse e pluriarmoniche esiste la trasformata totale (nel caso di una modificazione, confronta con la definizione di trasformata totale data nel Paragrafo 4 e il Teorema 4.5).

Abbiamo visto come il problema di una buona definizione di prodotto di correnti entri pesantemente anche nella costruzione del pull-back; il lavoro di riferimento per il prodotto di correnti su varietà kähleriane è [29]; ricordiamo che il problema è il seguente: dare una " buona definizione" di $S \wedge T$, dove S è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva, e $T^{p,p} \geq 0$ è una corrente pluriarmonica. In [29] si pone come ipotesi aggiuntiva una opportuna regolarità del potenziale u, ovvero si richiede che sia possibile scrivere $S = \alpha + i\partial\overline{\partial}u$, con α liscia e u funzione *continua* quasi plurisubarmonica (cfr. la corrente di Green definita nel Paragrafo 5). In questo caso $S \wedge T$ è ben definita, e risulta una corrente positiva e pluriarmonica (cfr. Teorema 5.1 ibidem); inoltre si ha un risultato di continuità di questo tipo:

Se $\{T_n\}$ è una successione di correnti positive e pluriarmoniche convergenti a T, se $\{u_n\}$ è una successione di funzioni continue e quasi plurisubarmoniche, convergenti uniformemente a u (in particolare, se sono decrescenti a u), e $S_n = \alpha + i\partial\overline{\partial}u_n$, allora la successione $S_n \wedge T_n$ è ben definita, e converge a $S \wedge T$.

In realtà, il prodotto $S \wedge T$ è definito proprio come limite: data u come nell'ipotesi, posso sempre scriverla come limite di funzioni u_n continue e quasi plurisubarmoniche: tuttavia, dai teoremi di tipo Richberg (cfr. per esempio Lemma 2.15 in [21]) in realtà si può supporre $u_n \in \mathcal{C}^\infty(X)$, e dunque sono ben definite le $S_n \wedge T := i\partial\overline{\partial}u_n \wedge T$. Notiamo che qui si ragiona nel globale: nel locale infatti basterebbe regolarizzare per convoluzione. Il caso più interessante è quello in cui le u_n decrescono a u: su una varietà compatta, questo implica la convergenza uniforme e quindi il possibile passaggio al caso liscio.

Naturalmente l'ipotesi di potenziale continuo è piuttosto pesante: per esempio, l'unbounded locus $L(u)$ è vuoto (si può confrontare con [22], III (3.6) per il caso chiuso); invece il fatto che T sia pluriarmonica può essere attenuato chiedendo $T \in DSH(X)$ (si tratta sostanzialmente di tener conto, nelle stime, anche del termine $u\ i\partial\overline{\partial}T$):

Teorema 8.3. (*Teorema* 5.3 *in* [29]) *Se S è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva, con potenziale continuo, e $T^{p,p} \in DSH^p(X)$, allora $S \wedge T$ è ben definita, sta in $DSH^{p+1}(X)$, e dipende con continuità da S e da T.*

La costruzione generalizza i casi classici, ovvero il caso S liscia (cioè u liscia), e il caso T chiusa, mentre nel caso T non chiusa ma pluriarmonica non è chiaro se la costruzione rispetta o meno le classi di coomologia.

Un altro contributo al tema del prodotto di correnti su varietà kähleriane si trova nel lavoro [13]. Gli autori studiano oggetti del tipo $\int_K S_1 \wedge \cdots \wedge S_p \wedge T$, dove K è un compatto di una varietà kähleriana X di dimensione n, T è una $(n-p, n-p)-$corrente chiusa e positiva, e le S_j sono $(1,1)-$correnti chiuse e quasi positive a poli in K. Questo tipo di prodotto viene applicato allo studio dei numeri di Lelong di trasformate di correnti chiuse e positive rispetto allo scoppiamento in un punto della varietà kähleriana, e allo studio dell'integrabilità locale di e^{φ}, con $\varphi \in Psh(X)$.

REFERENCES

[1] L. Alessandrini: *Correnti positive: uno strumento per l'analisi globale su varietà complesse*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **LXVIII** (1998), 59-120.

[2] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Metric properties of manifolds bimeromorphic to compact Kähler spaces*, J. Differential Geom. **37** (1993), 95-121.

[3] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Plurisubharmonic currents and their extension across analytic subsets*, Forum Math. **5** (1993), 577-602.

[4] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Compact complex threefolds which are Kähler outside a smooth rational curve*, Math. Nachr. **207** (1999), 21-59.

[5] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Transforms of currents by modifications and 1-convex manifolds*, Osaka J. Math. **40** (2003), 717-740.

[6] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Wedge product of positive currents and balanced manifolds*, Tohoku Math. J. **60** (2008), 123-134.

[7] H. Alexander: *Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture*, J. of the Amer. Math. Soc. **10** (1997), 123-138.

[8] G. Bassanelli: *A cut-off theorem for plurisubharmonic currents*, Forum Math. **6** (1994), 567-595.

[9] G. Bassanelli: *A geometrical application of the product of two positive currents*, Progress in Mathematics **188**, Birkhäuser, Basel (2000), 83-90.

[10] E. Bedford – B.A. Taylor: *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. **149** (1982), 1-41.

[11] H. Ben Messaoud – H. El Mir: *Tranchage et prolongement des courants positifs fermés*, Math. Ann. **307** (1997), 473-487.

[12] H. Ben Messaoud – H. El Mir: *Opérateur de Monge Ampére et tranchage des courants positifs fermés*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 139-168.

[13] M. Blel – S.K. Mimouni: *Singularités et intégrabilité des fonctions plurisousharmoniques*, Ann. Inst. Fourier **55** (2005), 319-351.

[14] Z. Blocki: *The domain of definition of the complex Monge-Ampère operator*, Amer. J. of Math. **128** (2006), 519-530.

[15] F. Bracci – S. Trapani: *Notes on pluripotential theory*, Rend. di Matematica, Serie VII **27** (2007), 197-264.

[16] U. Cegrell: *The general definition of the complex Monge-Ampère operator*, Ann. Inst. Fourier **54** (2004), 159-179.

[17] D. Coman – V. Guedj – A. Zeriahi: *Domains of definition of Monge-Ampère operators on compact Kähler manifolds*, Math. Z. **259** (2008), 393-418.

[18] K. Dabbek – F. Elkhadhra: *Prolongement des courants PSH*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **332** (2001), 615-620.

[19] K. Dabbek – F. Elkhadhra,: *Prolongement d'un courant positif à travers une sous-variéte non Levi-plate*, C. R. Acad. Sci. Paris **340** (2005), 263-268.

[20] K. Dabbek – F. Elkhadhra – H. El Mir: *Extension of plurisubharmonic currents*, Math. Z. **245** (2003), 455-481.

[21] J. P. Demailly: *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), 361-409.

[22] J. P. Demailly: *Complex Analytic and Differential Geometry*, free accessible book *http://www.fourier.ujf_grenoble.fr/demailly/books.html.*

[23] J. P. Demailly: *On the geometry of positive cones of projective and Kähler varieties*, The Fano Conference, Univ. di Torino (2004), 395-422.

[24] J. P. Demailly: *Kähler manifolds and trascendental techniques in algebraic geometry*, Proc. of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, European Mathematical Society (2007), 153-186.

[25] J. P. Demailly – N. Pali: *Degenerate complex Monge-Ampère equations over compact Kähler manifolds*, arXiv:0710.5109v3.

[26] J. P. Demailly – M. Paun: *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold*, Ann. Math. **159** (2004), 1247-1264.

[27] T.C. Dinh – M. Lawrence: *Polynomial hull and positive currents*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **12** (2003), 317-334.

[28] T.C. Dinh – V.A. Nguyen – N. Sibony: *Dynamics of horizontal-like maps in higher dimension*, Adv. in Math. **219** (2008), 1689-1721.

[29] T.C. Dinh – N. Sibony: *Regularization of currents and entropy*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **37** (2004), 959-971.

[30] T.C. Dinh – N. Sibony: *Un borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationelle*, Ann. of Math. **161** (2005), 1937-1944.

[31] T.C. Dinh – N. Sibony: *Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 291-312.

[32] T.C. Dinh – N. Sibony: *Geometry of currents, intersection theory and dynamics of horizontal-like maps*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), 423-457.

[33] T.C. Dinh – N. Sibony: *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), 221-258.

[34] T.C. Dinh – N. Sibony: *Pull-back currents by holomorphic maps*, Manuscripta Math. **123** (2007), 357-371.

[35] T.C. Dinh – N. Sibony: *Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics*, arXiv:math/0703702v1.

[36] H. El Mir: *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Math. **153** (1984), 1-45.

[37] F. Elkhadhra – S.K. Mimouni: *Courants positifs à support dans une bande*, C. R. Acad. Sci. Paris **341** (2005), 549-554.

[38] P. Eyssidieux – V. Guedj – A. Zeriahi: *Singular Kähler-Einstein metrics*, J. Am. Math. Soc. **22** (2009), 607-639.

[39] C. Favre: *Note on pull-back and Lelong number of currents*, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), 445-458.

[40] A. Fino – A. Tomassini: *Blow-ups and resolution of strong Kähler with torsion metrics*, Adv. Math. **221** (2009), 914-935.

[41] J.E. Fornaess: *Dynamics in several Complex Variables*, Regional Conference Series in Mathematics **87** Amer. Math. Soc. ed. (1996).

[42] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Complex dynamics in higher dimension. I.*, Asterisque **222** (1994), 201-231.

[43] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Complex dynamics in higher dimension. II.*, in Modern methods in Complex Analysis (Princeton, N. J., 1992), Ann. Math. Studies **137**, 135-187, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1995).

[44] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Okás inequality for currents and applications*, Math. Ann. **301** (1995), 399-419.

[45] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics*, Publ. Mat. **45** (2001), 529-547.

[46] P. Griffiths – J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience Publ. New York (1978).

[47] V. Guedj: *Dynamics of polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$, Amer. J. of Math. **124** (2002), 75-106.

[48] V. Guedj: *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. **161** (2005), 1589-1607.

[49] V. Guedj: *Desingularization of quasiplurisubharmonic functions*, International J. of Math. **16** (2005), 555-560.

[50] V. Guedj – A. Zeriahi: *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. **15** (2005), 607-639.

[51] R. Harvey – H.B. Lawson: *An intrinsic characterization of Kähler manifolds*, Invent. Math. **74** (1983), 169-198.

[52] J.H. Hubbard – P. Papadopol: *Superattractive Fixed Points in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 321-365.

[53] A. Huckelberry: *Subvarieties of homogeneous and almost homogeneous manifolds*, Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry, H. Skoda – J.M. Trépreau (eds.), Aspects of Math. E 26, Vieweg, Braunschweig (1994), 189-232.

[54] S. Kolodziej: *The Monge-Ampère Equation on Compact Kähler Manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 667-686.

[55] S. Kolodziej: *The Complex Monge-Ampère Equation and Pluripotential Theory*, Mem. AMS **178** n. 840 (2005).

[56] B. S. Magnusson: *Extremal* $\omega-$*plurisubharmonic functions as envelopes of disc functionals*, arXiv:0906.0902v1.

[57] M. Méo: *Image inverse d'un courant positif fermé par una application analytique surjective*, C. R. Acad. Sci. Paris **322** (1996), 1141-1144.

[58] M. Paun: *Sur l'effectivité numérique des images inverses de fibrés en droites*, Math. Ann. **310** (1998), 411-421.

[59] M. Paun: *Regularity Properties of the Degenerate Monge-Ampère Equations on Compact Kähler Manifolds*, Chin. Ann. Math. **29b** (2008), 623-630.

[60] D.H. Phong – J. Sturm: *The Dirichlet Problem for Degenerate Complex Monge-Ampère Equations*, arXiv:0904.1898v1.

[61] J.B. Poly – G. Raby: *Prolongement de courants positifs à travers de petit obstacles*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2091-2098.

[62] D. Popovici: *Regularization of currents with mass control and singular Morse inequalities*, J. Differential Geometry **80** (2008), 281-326.

[63] N. Sibony: *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Math. J. **52** (1985), 157-197.

[64] Y. T. Siu: *Analiticity of Sets associated to Lelong Numbers and the Extension of Closed Positive Currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53-156.

[65] J. Song – G. Tian: *The Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension*, Invent. Math. **170** (2007), 609-653.

[66] G. Tian: *Canonical metrics in Kähler geometry*, Lect. in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel (2000).

[67] J. Varouchas: *Stabilité de la classe des variétés kählériennes par certains morphismes propres*, Invent. Math. **77** (1984), 117-127.

[68] Y. Xing: *Weak convergence of currents*, Math. Z. **260** (2008), 253-264.

[69] Y. Xing: *Continuity of the Monge-Ampère operator on compact Kähler manifolds*, Math. Z. **263** (2009), 331-344.

[70] S.T. Yau: *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339-411.

Lavoro pervenuto alla redazione il ????
ed accettato per la pubblicazione il ????.
Bozze licenziate il 6 luglio 2010

Indirizzo dell'Autore:

Lucia Alessandrini – Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Parma – Viale Usberti 53 – I-43124 Parma, Italy
E-mail: lucia.alessandrini@unipr.it

Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 30, Roma (2010), 183-193

A note on the topology and geometry of F_4I

RAFAEL HERRERA – YASUYUKI NAGATOMO

Abstract: *We determine the intersection numbers and the structure of the rational cohomology ring of the symmetric space* $F_4/(Sp(3)Sp(1))$ *by using index theory and its quaternion-Kähler structure.*

1 – Introduction

An oriented connected irreducible Riemannian $4n$-manifold M is called a quaternion-Kähler manifold, $n \geq 2$, if its linear holonomy is contained in the group $Sp(n)Sp(1)$. Examples of such manifolds were given in [7], where Wolf showed that each compact centerless Lie group G is the isometry group of a quaternion-Kähler symmetric space given as the conjugacy class of a copy of $Sp(1)$ in G determined by a highest root of G. Thus, the symmetric space

$$F_4I = \frac{F_4}{Sp(3)Sp(1)}$$

is a 28-dimensional quaternion-Kähler manifold. Although the cohomology of homogeneous spaces has been extensively studied, and the integral cohomology of F_4I was determined in [3], here we give a description of the rational cohomology ring $H^*(F_4I;\mathbb{Q})$ in terms of classes determined by its quaternion-Kähler structure. The motivation for this work is the need to understand the topological structure of general quaternion-Kähler manifolds, whose rational cohomology we

Key Words and Phrases: *Cohomology ring – Exceptional Lie group – Symmetric space*
A.M.S. Classification: 57F15, 53C26.

expect to be generated by a small number of cohomology classes. This is indeed the case for the space F_4I, as its Poincaré polynomial shows

$$\begin{aligned} P_{F_4I}(t) &= (1+t^4+t^8+t^{12}+t^{16}+t^{20})(1+t^8) \\ &= 1+t^4+2t^8+2t^{12}+2t^{16}+2t^{20}+t^{24}+t^{28}. \end{aligned}$$

The note is organized as follows. In Section 2 we compute the intersection pairings of the relevant characteristic classes arising from the quaternion-Kähler structure of F_4I (see Theorem 2.1). In Section 3 we determine the ring structure of $H^*(F_4I;Q)$ by using the intersection numbers (see Theorem 3.1). In Section 4, as a corollary of our calculations, we compute explicitly the Pontrjagin classes and numbers of F_4I, which may be of use in other geometrical contexts. In Section 5, we revisit Ishitoya and Toda's result [3] on the torsion free part of the integral cohomology of F_4I in terms of our characteristic classes.

2 – Intersection numbers

The holonomy group $Sp(7)Sp(1) \subset SO(28)$ of a 28-dimensional quaternion-Kähler manifold M determines the following factorization of the complexified tangent bundle [6]

$$TM_c = E \otimes H \tag{1}$$

where the fibres of the (locally defined) bundles E and H are isomorphic to the standard representations $\mathbb{C}^{14}$ and $\mathbb{C}^2$ of $Sp(7)$ and $Sp(1)$ respectively. Furthermore, for F_4I, the representation E decomposes further under $Sp(3) \subset Sp(7)$

$$E = \bigwedge\nolimits_0^3 \tilde{E} \tag{2}$$

where $\tilde{E} \cong \mathbb{C}^6$ is the standard representation of $Sp(3)$, and $\bigwedge_0^p \tilde{E}$ denotes the irreducible representation of $Sp(3)$ obtained as the primitive subspace of $\bigwedge^p \tilde{E}$ with respect to wedging by a symplectic form. Furthermore, the faithful 26-dimensional representation of F_4 also decomposes under $Sp(3)Sp(1)$

$$26 = \bigwedge\nolimits_0^2 \tilde{E} \oplus \tilde{E} \otimes H, \tag{3}$$

where the left hand side now denotes a rank 26 trivial vector bundle on F_4I (cf. [1]). Note that (2) implies that the characteristic classes of E are given in terms of those of the rank 6 bundle $\tilde{E}$, and (3) implies relations between the characteristic classes of $\tilde{E}$ and H. More precisely, by computing the first three components of the Chern character of $\bigwedge_0^2 \tilde{E} \oplus \tilde{E} \otimes H$ and equating them to zero we find that

$$c_2(\tilde{E}) = u,$$
$$c_6(\tilde{E}) = c_4(\tilde{E})u;$$

where $u = -c_2(H)$. This provides us with two candidates for the generators of $H^*(F_4I)$: u in dimension 4 and $c_4(\tilde{E})$ in dimension 8. From now on, we shall denote

$$c_4 = c_4(\tilde{E}).$$

Thus, our first task is to compute the pairings

$$u^7, \quad c_4u^5, \quad c_4^2u^3, \quad c_4^3u, \tag{4}$$

where the notation really means the evaluation of representatives of these 28-dimensional cohomology classes on the fundamental cycle of F_4I. In order to compute such pairings, we will make use of a Hilbert polynomial given by the index of certain twisted Dirac operators [6, 5]. More precisely, we will use the polynomial in q given by

$$f(q) = \operatorname{ind}(\partial\!\!\!/ \otimes S^qH) = \left\langle \widehat{A} \cdot \operatorname{ch}(S^qH), [F_4I] \right\rangle,$$

where $\widehat{A}$ denotes the $\widehat{A}$-genus of the manifold, ch denotes the Chern character and S^qH denotes the q-th symmetric power of H.

On the one hand, due to (1), (2) and (3), the coefficients of $f(q)$ are linear combinations of the intersection pairings in (4). Namely,

$$\begin{aligned}
f(q) = {} & \frac{u^7q^{15}}{1307674368000} + \frac{u^7q^{14}}{87178291200} + \frac{u^7q^{13}}{37362124800} - \frac{u^7q^{12}}{2874009600} \\
& + \left(\frac{u^5c_4}{4105728000} - \frac{u^7}{522547200}\right)q^{11} + \left(\frac{u^7}{2612736000} + \frac{u^5c_4}{373248000}\right)q^{10} \\
& + \left(\frac{229u^7}{10973491200} + \frac{59u^5c_4}{10973491200}\right)q^9 + \left(\frac{13u^7}{406425600} - \frac{13u^5c_4}{406425600}\right)q^8 \\
& + \left(-\frac{151u^7}{3657830400} - \frac{149u^5c_4}{457228800} + \frac{221u^3c_4^2}{18289152000}\right)q^7 \\
& + \left(-\frac{113u^5c_4}{81648000} + \frac{221u^3c_4^2}{2612736000} - \frac{31u^7}{522547200}\right)q^6 \\
& + \left(-\frac{17u^5c_4}{18711000} + \frac{1037u^3c_4^2}{9580032000} + \frac{107u^7}{1368576000}\right)q^5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{1751u^3c_4^2}{5748019200}+\frac{2603u^5c_4}{359251200}-\frac{1751u^7}{5748019200}\right)q^4\\
&+\left(\frac{739163u^5c_4}{52306974720}+\frac{402959uc_4^3}{7846046208000}-\frac{3201281u^3c_4^2}{784604620800}-\frac{385673u^7}{523069747200}\right)q^3\\
&+\left(-\frac{13528111u^3c_4^2}{1307674368000}+\frac{1237813u^5c_4}{261534873600}+\frac{3721u^7}{20922789888}+\frac{402959uc_4^3}{2615348736000}\right)q^2\\
&+\left(\frac{2713u^7}{4828336128}-\frac{3383123u^3c_4^2}{980755776000}+\frac{535039uc_4^3}{7846046208000}-\frac{769633u^5c_4}{140107968000}\right)q\\
&+\left(\frac{12899u^7}{373621248000}+\frac{294779u^3c_4^2}{93405312000}-\frac{12899uc_4^3}{373621248000}-\frac{294779u^5c_4}{93405312000}\right).
\end{aligned}
$$

On the other hand, these indices can be seen as holomorphic Euler characteristics of the twistor space

$$Z = Z(F_4I) = \frac{F_4}{Sp(3)U(1)}$$

of F_4I by twistor transform [6, 5]. Namely,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\partial\!\!\!/ \otimes S^qH) &= \chi(Z, \mathcal{O}(L^{(q-7)/2})),\\
&= \sum_{i=0}^{15}(-1)^i \dim H^i(Z, \mathcal{O}(L^{(q-7)/2})),
\end{aligned}
$$

where L is the positive line bundle over Z which restricted to the $\mathbb{C}P^1$-fibres is $\mathcal{O}(2)$. These holomorphic Euler characteristics can be computed by means of the Bott-Borel-Weil theorem and the Weyl dimension formula as follows [4]. Let $R(\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{u}(1))$ be the set of roots of $Sp(3)U(1)\subset F_4$, R^+ be the set of positive roots of F_4 with $R(\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{u}(1))$ generated by simple roots, $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R+}\alpha$. Let $V(\lambda)$ be an irreducible representation for $Sp(3)U(1)$ with highest weight $\lambda\in R(\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{u}(1))$ and $\mathbf{V}(\lambda)$ the corresponding homogeneous vector bundle on F_4I. By the Bott-Borel-Weil theorem and the Weyl dimension formula [4] we have

$$\chi(Z,\mathcal{O}(\mathbf{V}(\lambda))) = (-\mathbf{1})^{\mathbf{s}}\prod_{\alpha\in\mathbf{R}+}\frac{\langle\alpha,\delta+\lambda\rangle}{\langle\alpha,\delta\rangle},$$

where

$$s=\sharp\{\alpha\in R+ \mid \langle\alpha,\delta+\lambda\rangle<0\}.$$

Let $\mathfrak{H}$ be the Cartan subalgebra of $(\mathfrak{f}_4)_c$ spanned by the following basic roots

$$\{\alpha_1=(1,-1,0,0),\alpha_2=(0,1,-1,0),\alpha_3=(0,0,2,0),\alpha_4=(-1,-1,-1,1)\}.$$

The coordinates have been chosen so that $\mathfrak{sp}(3)$ has the Cartan subalgebra spanned by $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ which is orthogonal to the maximal root $\rho=(0,0,0,2)$.

In this case $\delta = (3,2,1,8)$. The roots coming from $Sp(3)$ are thus embedded canonically in the first three coordinates and the one coming from $U(1)$ corresponds to the last coordinate. The bundle $L^{(q-7)/2}$ corresponds to $\frac{(q-7)}{2}(0,0,0,2)$. When adding δ we get $(3,2,1,q+1)$. Therefore

$$\begin{aligned}
f(q) = \chi(Z(F_4I), \mathcal{O}(L^{(q-7)/2})) &= \frac{1}{8583708672000}q^{15} + \frac{1}{572247244800}q^{14} \\
&+ \frac{1}{245248819200}q^{13} - \frac{13}{245248819200}q^{12} - \frac{59}{204374016000}q^{11} \\
&+ \frac{1}{11147673600}q^{10} + \frac{253}{78033715200}q^{9} + \frac{13}{2890137600}q^{8} - \frac{1111}{111476736000}q^{7} \\
&- \frac{541}{22295347200}q^{6} + \frac{23}{9083289600}q^{5} + \frac{8567}{245248819200}q^{4} + \frac{4751}{357654528000}q^{3} \\
&- \frac{29}{1907490816}q^{2} - \frac{1}{113541120}q.
\end{aligned}$$

Equating the coefficients of the two expressions of the polynomial $f(q)$ we get the intersection pairings which, by the way, show a remarkable symmetry.

Theorem 2.1. *Let $u = -c_2(H)$ and $c_4 = c_4(\tilde{E})$ where H and $\tilde{E}$ are the locally defined bundles by the isotropy factors of F_4I. The intersection numbers are the following*

$$u^7 = \frac{39}{256}, \quad c_4u^5 = \frac{3}{256}, \quad c_4^2u^3 = \frac{3}{256}, \quad c_4^3u = \frac{39}{256}.$$

3 – Cohomology ring

Armed with the intersection numbers of Theorem 2.1 and the Poincaré polynomial of F_4I, we can now compute the generators of $H^*(F_4I)$ and their relations.

- In dimension 4: u is non-degenerate, so it is non-zero in $H^4(F_4I)$.
- In dimension 8: We have two classes u^2 and c_4. Suppose

$$au^2 + bc_4 = 0.$$

Then

$$\begin{aligned}
au^7 + bc_4u^5 &= 0, \\
ac_4u^5 + bc4^2u^3 &= 0, \\
ac_4^2u^3 + bc4^3u &= 0,
\end{aligned}$$

which has no non-trivial solutions for a and b when we substitute the intersection numbers. Therefore, u^2 and c_4 generate $H^8(F_4I)$.

- In dimension 12: We have two classes u_3 and c_4u. Suppose

$$au^3 + bc_4u = 0.$$

Then we get the same system of equations as above

$$\begin{aligned} au^7 + bc_4u^5 &= 0, \\ ac_4u^5 + bc4^2u^3 &= 0, \\ ac_4^2u^3 + bc4^3u &= 0, \end{aligned}$$

which has no non-trivial solutions for a and b. Therefore, u^3 and c_4u generate $H^{12}(F_4I)$.

- In dimension 16: We have three classes: u^4, c_4u^2 and c_4^2 . Since $H^{16}(F_4I)$ is 2-dimensional, we must find the relation between these classes. Suppose

$$au^4 + bc_4u^2 + c_4^2 = 0.$$

Then we get

$$\begin{aligned} au^7 + bc_4u^5 + c_4^2u^3 &= 0, \\ ac_4u^5 + bc_4^2u^3 + c_4^3u &= 0, \end{aligned}$$

which have a unique solution

$$a = 1, \quad b = -14,$$

so that

$$c_4^2 = -u^4 + 14c_4u^2.$$

Moreover, u^4 and c_4u^2 are linearly independent since

$$au^4 + bc_4u^2 = 0$$

implies

$$\begin{aligned} au^7 + bc_4u^5 &= 0, \\ ac_4u^5 + bc4^2u^3 &= 0, \\ ac_4^2u^3 + bc4^3u &= 0, \end{aligned}$$

whose only solution is the trivial one. Therefore, u^4 and c_4u^2 generate $H^{16}(F_4I)$.

- In dimension 20: We have three classes u^5, c_4u^3 and c_4^2u. Suppose

$$au^5 + bc_4u^3 + c_4^2u = 0.$$

Then

$$au^7 + bc_4u^5 + c_4^2u^3 = 0,$$
$$ac_4u^5 + bc_4^2u^3 + c_4^3u = 0,$$

which have a unique solution

$$a = 1, \quad b = -14.$$

Thus,

$$c_4^2u = -u^5 + 14c_4u^3,$$

which comes from the relation found in dimension 16. Moreover, u^5 and c_4u^3 are linearly independent since

$$au^5 + bc_4u^3 = 0$$

implies

$$au^7 + bc_4u^5 = 0,$$
$$ac_4u^5 + bc_4^2u^3 = 0,$$

whose only solution is the trivial one. Therefore, u^5 and c_4u^3 generate $H^{20}(F_4I)$.

- In dimension 24: We have four classes u^6, c_4u^4, $c_4^2u^2$ and c_4^3. In this case, $H^{24}(F_4I)$ is 1-dimensional and we see that if

$$au^6 + c_4u^4 = 0,$$

then

$$a = -\frac{1}{13},$$

and the other classes can all be put in terms of u^6

$$13c_4u^4 = u^6,$$
$$13c_4^2u^2 = u^6,$$
$$c_4^3 = u^6.$$

Hence, we have proved the following.

Theorem 3.1. *Let $u = -c_2(H)$ and $c_4 = c_4(\tilde{E})$ where H and $\tilde{E}$ are the locally defined bundles by the isotropy factors of F_4I. The rational comohomology ring of F_4I is*

$$H^*(F_4I;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[u, c_4]/(c_4^2 + u^4 - 14c_4u^2, u^6 - 13c_4u^4).$$

4 – Pontrjagin classes and numbers

As a corollary of the intersection numbers and relations we obtain the Pontrjagin numbers of F_4I.

Corollary 4.1. *The Pontrjagin numbers of F_4I are given as follows:*

$$\begin{aligned} p_7 &= 348, \\ p_1^7 &= 2496, \\ p_2^3p_1 &= 8424, \\ p_2p_3p_1^2 &= 4932, \\ p_2^2p_3 &= 5904, \\ p_3^2p_1 &= 3972, \\ p_2^2p_1^3 &= 6192, \\ p_4p_2p_1 &= 4842, \\ p_3p_1^4 &= 3048, \\ p_2p_1^5 &= 3888, \\ p_6p_1 &= 2091, \\ p_4p_3 &= 2832, \\ p_5p_2 &= 2718, \\ p_4p_1^3 &= 4188, \\ p_5p_1^2 &= 3246, \end{aligned}$$

where p_i denotes the i^{th} Pontrjagin class of F_4I.

Proof. This follows from the relations described in the previous sections and

$$\begin{aligned} p_1 &= 4u, \\ p_2 &= 26u^2 - 14c_4, \\ p_3 &= 84u^3 - 76c_4u, \\ p_4 &= 281u^4 + 1866c_4u^2 + 65c_4^2, \\ &= 216u^4 + 2776c_4u^2, \\ p_5 &= 720u^5 + 7376c_4u^3 + 576c_4^2u, \\ &= 144u^5 + 15440c_4u^3, \\ p_6 &= 1620u^6 + 11864c_4u^4 + 12724c_4^2u^2 - 80c_4^3, \\ &= 44608c_4u^4, \\ p_7 &= 3200u^7 + 10624c_4^2u^3 + 5760c_4u^5 - 2176c_4^3u, \\ &= 348. \end{aligned}$$

□

5 – Torsion-free part of the integral cohomology of F_4I

We can go a little further by revisiting the following result of Ishitoya and Toda [3] about the torsion-free part of the integral cohomology of F_4I.

THEOREM 5.1. [3] *The torsion-free part of the integral cohomology of F_4I can be described as follows*

$$H^*(F_4I;\mathbb{Z})_{tf} = \frac{\mathbb{Z}[f_4, f_8, f_{12}]}{(f_4^3 - 12f_4f_8 + 8f_{12}, f_4f_{12} - 3f_8^2, f_8^3 - f_{12}^2)},$$

where $f_i \in H^{4i}(F_qI, \mathbb{Z})$, $i = 4, 8, 12$.

First, let us observe that $4u = p_1(F_4I)$ is integral and indivisible. If $4u = m\xi$ with $\xi \in H^4(F_4I;\mathbb{Z})$ an indivisible class and m an non-zero integer, then

$$\left(\frac{4u}{m}\right)^7 = \frac{4^3 39}{m^7}$$

should be an integer, which can only happen if $m = \pm 1$. Thus, let us set

$$f_4 = 4u.$$

Taking the relations in Theorem 5.1 we see that

$$\begin{aligned} f_{12} &= -\frac{1}{8}f_4^3 + \frac{3}{2}f_4f_8, \\ f_8^2 &= -\frac{1}{24}f_4^4 + \frac{1}{2}f_4^2f_8, \\ f_4^6 &= \frac{104}{11}f_4^4f_8, \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} u^5f_8 &= \frac{33}{128}, \\ u^3f_8^2 &= \frac{7}{16}, \\ uf_8^3 &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

By setting $f_8 = au^2 + bc_4$ we get three equations

$$\begin{aligned} a^2u^7 + 2abc_4u^5 + b^2c_4^2u^3 &= \frac{7}{16}, \\ au^7 + bc_4u^5 &= \frac{33}{128}, \\ a^3u^7 + 3a^2bc_4u^5 + 3ab^2c_4^2u^3 + b^3c_4^3u &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{39}{256}a + \frac{3}{256}b = \frac{33}{128},$$
$$\frac{39}{256}a^2 + \frac{3}{128}ab + \frac{3}{256}b^2 = \frac{7}{16},$$
$$\frac{39}{256}a^3 + \frac{9}{256}a^2b + \frac{9}{256}ab^2 + \frac{39}{256}b^3 = \frac{3}{4},$$

with unique solution

$$a = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{1}{3},$$

i.e.

$$f_8 = \frac{5}{3}u^2 + \frac{1}{3}c_4, \quad \text{and} \quad f_{12} = 2u^3 + 2c_4u.$$

It is interesting to notice that

$$6f_8 = 10u^2 + 2c_4 = c_4(\tilde{E} \otimes H) \quad \text{and} \quad f_{12} = e([\tilde{E} \otimes H]_{\mathbb{R}})$$

where $[\tilde{E} \otimes H]_{\mathbb{R}}$ denotes the underlying real vector bundle of $\tilde{E} \otimes H$, so that these classes have a geometrical interpretation.

This results can be used to reinterpret the integral cohomology ring of the twistor space $Z(F_4 I)$, which is torsion free. In [2], they calculated such a cohomology ring using a Schubert calculus approach. It may be interesting to investigate the geometry arising from that description in combination with the geometry encoded in the Chern classes u and c_4.

Acknowledgement

The first author wishes to thank Kyushu University and the Max Planck Institute of Mathematics (Bonn) for their hospitality and support during the preparation of this work. The second author wishes to thank Centro de Investigación en Matemáticas (México) for its hospitality.

REFERENCES

[1] J.F. Adams: *Lectures on exceptional Lie groups*, Ed. by Zafer Mahmud and Mamoru Mimura. (English) Chicago Lectures in Mathematics. Chicago, IL: University of Chicago Press. XIV, 122.

[2] H. Duan – X. Zhao: *The Chow rings of generalized Grassmannians*, Preprint math.AG/0510085.

[3] K. Ishitoya – H. Toda: *On the cohomology of irreducible symmetric spaces of exceptional type*, J. Math. Kyoto Univ., **17** (1977), **2**, 225–243.

[4] A. W. Knapp: *Introduction to representations in analytic cohomology*, Contemp. Math., **154**, (1993) 1–18.

[5] C. R. LeBrun – S. M. Salamon: *Strong rigidity of positive quaternion-Kähler manifolds*, Invent. Math., **118**, (1994) 109–132.

[6] S. M. Salamon: *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math., **67**, (1982) 143–171.

[7] J. A. Wolf: *Complex homogeneous contact structures and quaternionic symmetric spaces*, J. Math. Mech., **14**, (1965) 1033–1047.

Lavoro pervenuto alla redazione il ???
ed accettato per la pubblicazione il ???.
Bozze licenziate il 6 luglio 2010

Indirizzo degli Autori:

Rafael Herrera – Centro de Investigación en Matemáticas – A. P. 402 Guanajuato Gto., C.P. 36000 México
E-mail: rherrera@cimat.mx

Yasuyuki Nagatomo – Graduate School of Mathematics – Kyushu University , 744 Motooka – Nishi-Ku – Fukuoka 819-0395, Japan,
E-mail: nagatomo@math.kyushu-u.ac.jp

Partially supported by a JSPS Research Fellowship PE-05030, Apoyo CONACYT J48320-F

Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 30, Roma (2010), 195-219

A Dunkl-classical *d*-symmetric *d*-orthogonal polynomial set

Y. BEN CHEIKH – M. GAIED

Abstract: *In this paper, we apply a d-orthogonality preserving operator to the Humbert polynomials to derive a new Dunkl-classical d-orthogonal polynomials generalizing the Humbert ones. For the resulting polynomials, we state a $(d+1)$-order recurrence relation and a $(d+1)$-order differential-difference equation. We also obtain an explicit expression of the d-dimensional functional vector for which the d-orthogonality holds. We show that the components of this d-symmetric Dunkl-classical d-orthogonal polynomial set are classical d-orthogonal.*

1 – Introduction

Let $\mathcal{P}$ be the linear space of polynomials with complex coefficients. A linear operator L acting on $\mathcal{P}$ is said to be a lowering operator if it fulfills:

$$L(\mathcal{P}) = \mathcal{P}, \quad L(1) = 0 \quad \text{and} \quad \deg(L(x^n)) = n-1, \quad n \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}.$$

Some lowering operators were used, in the orthogonal polynomials theory, to classify orthogonal polynomials according to the following definition:

Definition 1.1. An orthogonal polynomial set $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is said to be L-classical whenever the polynomial set $\{Q_n = LP_{n+1}\}_{n\geq 0}$ is also orthogonal.

Key Words and Phrases: *d-orthogonal polynomials – Classical d-orthogonal polynomials – Dunkl-classical d-orthogonal polynomials – d-symmetric polynomials – Components of a d-symmetric polynomial set – Humbert polynomials*
A.M.S. Classification: 33C45, 42C05.

Among such lowering operators, we mention the derivative operator D, the difference operator Δ and the Hahn operator H_q. In the sequel, for shorter, we write "classical" instead of "D-classical".

The literature on these topics is extremely vast. We quote, for instance, [1], [2], [14], [16], [18]. Notice also that Definition 1.1 was extended by replacing the "orthogonal" property by "d-orthogonal". The notion of d-orthogonal polynomials is a generalization of orthogonal polynomials in the sense that the polynomials satisfy orthogonality conditions with respect to d functionals. That was introduced in [20], [25].

Recently, we consider a further lowering operator to treat analogue questions. That is $T_\mu := D + 2\mu H_{-1}$, $\mu > -1/2$, the Dunkl operator to introduce the so called T_μ-classical (or Dunkl-classical) polynomials. In [7], we characterize the T_μ-classical symmetric orthogonal polynomials. In [8], we introduce a T_μ-classical d-symmetric d-orthogonal polynomial family generalizing the Gould-Hopper ones by solving a characterization problem. In this work, we introduce a second example of T_μ-classical d-symmetric d-orthogonal polynomial set as the range of the Humbert polynomials by a suitable d-orthogonality preserving operator. Notice by the way that Humbert polynomials include many special cases considered in the literature (see Subsection 2.4). The outline of the paper is as follows. In Section 2, we recall some definitions and results to be used in the sequel. In Section 3, we introduce a new d-symmetric polynomial set generalizing the Humbert polynomials. For a restricted condition on d, we show that these polynomials are Dunkl-classical d-orthogonal and we explicitly express the d-dimensional functional for which the d-orthogonality holds. In Section 4, for positive integer d, we derive a $(d+1)$-order differential-difference equation satisfied by the generalized Humbert polynomials. For the components of these polynomials we state an hypergeometric representation. From which, we deduce that these components are classical d-orthogonal. Finally, in Section 5, we discuss the significance of the generalized Humbert polynomials, the method how these polynomials were introduced and some questions arising in the d-orthogonal polynomial theory.

2 – Preliminaries and notations

Throughout this paper, we shall use the following notations, definitions and formulas.

2.1 – Dunkl-operator

Let μ be a real number with $\mu > -1/2$. The Dunkl operator T_μ is defined in the linear space of entire functions as follows [13]

$$T_\mu \phi(x) = \phi^{'}(x) + \mu \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}. \tag{2.1}$$

The operator T_0 is reduced to the derivative operator D.

One easily verifies that

$$T_\mu x^n = \frac{\gamma_\mu(n)}{\gamma_\mu(n-1)} x^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*, T_\mu(1) = 0 \tag{2.2}$$

where γ_μ is defined by

$$\gamma_\mu(2n) := \frac{2^{2n} n!\ \Gamma(n+\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+1/2)} = (2n)!\ \frac{\Gamma(n+\mu+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)\Gamma(\mu+1/2)} \tag{2.3}$$

and

$$\gamma_\mu(2n+1) := \frac{2^{2n+1} n!\ \Gamma(n+\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1/2)} = (2n+1)!\ \frac{\Gamma(n+\mu+3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(\mu+1/2)}. \tag{2.4}$$

γ_μ plays the role of generalized factorial [23], since

$$\gamma_\mu(n+1) = (n+1+2\mu\theta_{n+1})\gamma_\mu(n), \quad n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\},$$

where θ_n is defined to be 0 if $n \in 2\mathbb{N}$ and 1 if $n \in (2\mathbb{N}+1)$.

The associated commutative algebra of Dunkl operator T_μ is intertwined with the algebra of the standard derivative operator D by a unique linear and homogeneous isomorphism V_μ in the linear space $\mathcal{P}$ of polynomials with complex coefficients in the sens that:

(i) $V_\mu(1) = 1$;
(ii) $V_\mu(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$, where $\mathcal{P}_n$ denotes the linear subspace of polynomials of degree at most n;
(iii) $T_\mu V_\mu = V_\mu D$.

The expression of V_μ in terms of its action on the canonical basis of $\mathcal{P}$ is given by

$$V_\mu(x^n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{[\frac{n+1}{2}]}}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{[\frac{n+1}{2}]}} x^n = \frac{n!}{\gamma_\mu(n)} x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

where, and in what follows, $[x]$ denotes the greatest integer in x and $(a)_p$ the Pochhammer symbol given by $(a)_p = \frac{\Gamma(a+p)}{\Gamma(a)}$, $p \in \mathbb{N}$.

This amounts to the following integral representation [13]

$$V_\mu(f(x)) = \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu)} \int_{-1}^{1} f(xt)(1-t)^{\mu-1}(1+t)^\mu dt.$$

2.2 – d-orthogonal polynomials

Let $\mathcal{P}$ be the vector space of polynomials with coefficients in $\mathbb{C}$ and let $\mathcal{P}'$ be its algebraic dual. We denote by $\langle u, f\rangle$ the effect of the functional $u \in \mathcal{P}'$ on the polynomial $f \in \mathcal{P}$. A polynomial sequence $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is called a *polynomial set* (PS, for shorter) if and only if $\deg P_n = n$ for all non-negative integer n. The PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is called monic if $P_n(x) = x^n + \pi_{n-1}(x)$ with $\deg \pi_{n-1} \leq n-1$.

Let $\{P_n\}_{n\geq 0}$ be a sequence of monic polynomials. The dual sequence associated with $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is a sequence of forms $\{u_k\}_{k\geq 0}$ such that

$$\langle u_k, P_n\rangle = \delta_{k,n}, \quad n, k \geq 0.$$

Throughout this paper, d denotes a positive integer.

Definition 2.1 ([25]). A PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is called *d-orthogonal* (d-OPS, for shorter) with respect to the d-dimensional functional vector $\Gamma = {}^t(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d-1})$ if it satisfies the following orthogonality relations:

$$\begin{cases} \langle \Gamma_k, P_r P_n\rangle = 0, & r > nd+k, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \langle \Gamma_k, P_n P_{nd+k}\rangle \neq 0, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.7}$$

for each integer k belonging to $N_d := \{0, 1, \ldots, d-1\}$.

For $d = 1$, the d-orthogonality is reduced to the orthogonality.

The d-dimensional functional $\Gamma = {}^t(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d-1})$ given in this definition is not unique according to the following result.

Lemma 2.2 ([11]). *If a PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is d-orthogonal with respect to a d-dimensional functional vector $\Gamma = {}^t(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d-1})$, then this PS is also d-orthogonal with respect to the d-dimensional functional vector $\mathcal{U} = {}^t(u_0, u_1, \ldots, u_{d-1})$, where the forms $u_0, u_1, \ldots, u_{d-1}$ are the d first elements of the dual sequence $\{u_n\}_{n\geq 0}$ associated with $\{P_n\}_{n\geq 0}$.*

2.3 – d-Symmetric polynomials

Definition 2.3 ([10]). A PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is called d-symmetric if it fulfills for all $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(w_{d+1}x) = w_{d+1}^n P_n(x) \tag{2.8}$$

where $w_{d+1} = \exp(2i\frac{\pi}{d+1})$.

For $d = 1$, $w_2 = -1$, the PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is symmetric *i.e.* $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Lemma 2.4 ([10]). *A PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is d-symmetric if and only if there exist $(d+1)$ sequences $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, such that $P_{(d+1)n+k}(x) = x^k P_n^k(x^{d+1})$, $n \geq 0$.*

The $(d+1)$ PSs $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k\in\mathbb{N}_{d+1}$, are called the components of the d-symmetric PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$.

Lemma 2.5 ([10]). *Let $\{P_n\}_{n\geq 0}$ be a monic d-OPS. Then $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is d-symmetric if and only if $\{P_n\}_{n\geq 0}$ satisfies the $(d+1)$-order recurrence relation:*

$$\begin{cases} P_n(x) = x^n, & n\in\mathbb{N}_{d+1} \\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \gamma_n P_{n-d}(x), & n\geq d \end{cases} \tag{2.9}$$

where $\gamma_n \neq 0$, $n\geq d$.

2.4 – Humbert polynomials

The Humbert polynomials are generated by [15]

$$\left(1-(d+1)xt+t^{d+1}\right)^{-\nu} = \sum_{n\geq 0} h_{n,d+1}^{\nu}(x)\ t^n \tag{2.10}$$

where $\nu > -\frac{1}{2}$ and $\nu\neq 0$.

The explicit representation of the Humbert polynomials is given by [5]

$$h_{n,d+1}^{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{d+1}]} \frac{(-1)^k(\nu)_{n-dk}}{k!(n-(d+1)k)!}\left((d+1)x\right)^{n-(d+1)k}. \tag{2.11}$$

Let us give an overview of some special cases that were investigated in the literature.

- *Gegenbauer polynomials*: by letting $d=1$ in (2.10), we meet the Gegenbauer polynomials $\{C_n^{\nu}(x)\}_{n\geq 0}$.
- *Pincherle type polynomials*: for $d=2$, the Humbert polynomials are reduced to the Pincherle type polynomials [22], which, in the limiting case $\nu=-\frac{1}{2}$, are reduced to the Pincherle polynomials.
- *Chebyshev type d-OPS*: by letting $\nu=1$ in (2.10), we meet the Chebyshev type d-OPS of the second kind $\{U_n(.;d)\}_{n\geq 0}$ studied by Douak and Maroni [12] and generated by:

$$\left(1+bt^{d+1}-xt\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0} U_n(x;d)\ t^n,\ b\neq 0. \tag{2.12}$$

  For $d=b=1$, these polynomials are reduced to the *Chebyshev polynomials of the second kind* $\{U_n(.)\}_{n\geq 0}$.
- *Legendre type d-OPS*: by letting $\nu=\frac{1}{2}$ in (2.10), we meet the d-OPS of Legendre type $\{L_n(.\,;d)\}_{n\geq 0}$ considered by Lamiri and Ouni [17]. This PS is a natural extension of the Legendre ones.

- *Kinney polynomials*: for $\nu = \frac{1}{d+1}$, the Humbert PS $\{h^{\nu}_{n,d+1}(x)\}_{n\geq 0}$ is reduced to the Kinney PS $\{K_n(.;d)\}_{n\geq 0}$. That includes as particular cases, the Legendre polynomials $\{L_n(x)\}_{n\geq 0}$ $(d = 1)$, and the Pincherle type polynomials $\{P_n^{\frac{1}{3}}(x)\}_{n\geq 0}$ $(d = 2)$.

LEMMA 2.6 ([5]). *The Humbert polynomials $\{h^{\nu}_n\}_{n\geq 0}$ are d-symmetric classical d-orthogonal.*

3 – A Dunkl-classical d-symmetric d-orthogonal polynomial set

Replacing the derivative operator in the definition of classical d-OPS, introduced by Douak and Maroni, by the Dunkl operator T_μ, one obtains the following.

DEFINITION 3.1. A PS $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is called T_μ-classical (or Dunkl-classical) d-orthogonal if and only if both $\{P_n\}_{n\geq 0}$ and $\{T_\mu P_{n+1}\}_{n\geq 0}$ are d-orthogonal.

Next, we introduce and study a T_μ-classical d-OPS.

3.1 – Generalized Humbert polynomials

The generalized Gegenbauer polynomials $S^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ are orthogonal with respect to the weight function:

$$|x|^{2\beta+1}(1-x^2)^{\alpha}; \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

For $\beta = -1/2$, these polynomials are reduced to Gegenbauer polynomials. In [7], we gave the relation linking the generalized Gegenbauer polynomials $\{S^{(\alpha,\mu-1/2)}_n\}_{n\geq 0}$ and the Gegenbauer polynomials $\{C^{\alpha+\mu+1/2}_n\}_{n\geq 0}$. That is

$$V_\mu(C^{\alpha+\mu+1/2}_n) = S^{(\alpha,\mu-1/2)}_n \tag{3.1}$$

where V_μ is the isomorphism defined by (2.6).

Starting from this identity, we remark that, for this case, the operator V_μ preserves two main properties of the Gegenbauer polynomials, the symmetry and the orthogonality, while the "classical" property is replaced by the T_μ-classical ones. On the other hand, from Lemma 2.6, we notice that these three properties of the Gegenbauer polynomials have corresponding ones satisfied by the Humbert polynomials, another generalization of Gegenbauer polynomials. That suggests us to consider the polynomials:

$$\mathcal{H}^{(\nu,\mu-1/2)}_{n,d+1}(x) = \frac{\gamma_\mu(n)}{n!} V_\mu(h^{\nu}_{n,d+1}(x)), \tag{3.2}$$

in order to introduce a further example of T_μ-classical d-orthogonal polynomial set. We refer to these polynomials as *generalized Humbert polynomials.*

In the sequel, for the sake of simplicity, we will adopt the notation: $\mathcal{H}_n^{\nu}(.,d+1) := \mathcal{H}_{n,d+1}^{(\nu,\mu-1/2)}(.)$, $n \in \mathbb{N}$.

THEOREM 3.2. *The PS* $\{\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(.,d+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is a Dunkl-classical* d*-symmetric* d*-OPS if*

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{d}{d+1}(2\mu+1), \\ (\mu,d) \in \{0\} \times \mathbb{N}^* \ \textit{or}\ (\mu,d) \in (]-1/2,+\infty[)\setminus\{0\} \times (2\mathbb{N}+1). \end{cases} \tag{3.3}$$

To prove this result, we need the following.

LEMMA 3.3. *The generalized Humbert Polynomials* $\{\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(.,d+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfy the* $(d+1)$*-order recurrence relation*:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{n+1}^{\nu+\gamma}(x,d+1) = \dfrac{(d+1)(\nu+\gamma+n)}{n+1} x\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(x,d+1) + \\ \quad -\dfrac{\gamma_\mu(n)(n-d)!(n+(d+1)\nu+2\mu d\theta_n)}{(n+1)!\gamma_\mu(n-d)} \mathcal{H}_{n-d}^{\nu+\gamma}(x,d+1),\ n \geq d, \\ \mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(x,d+1) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}_{d+1}, \end{cases} \tag{3.4}$$

where γ, μ *and* d *satisfies* (3.3).

PROOF. In order to prove (3.4), we put

$$\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(x,d+1) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{d+1}]} C_{n,k} x^{n-(d+1)k}.$$

Taking account of (2.11), (3.2) and (2.6), ones obtains

$$C_{n,k} = \frac{(-1)^k \gamma_\mu(n)(\nu+\gamma)_{n-dk}(d+1)^{n-(d+1)k}}{k!n!\gamma_\mu(n-(d+1)k)}.$$

The coefficient of $x^{n+1-(d+1)k}$ in $\frac{(d+1)(\nu+\gamma+n)}{n+1} x\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(x,d+1) - \mathcal{H}_{n+1}^{\nu+\gamma}(x,d+1)$, $k \in \left\{1,2,\ldots,\left[\frac{n}{d+1}\right]\right\}$, is given by

$$\begin{aligned} &\frac{(d+1)(\nu+\gamma+n)}{n+1} C_{n,k} - C_{n+1,k} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}\gamma_\mu(n)(\nu+\gamma)_{n-dk}(d+1)^{n+1-(d+1)k}}{k!(n+1)!\gamma_\mu(n+1-(d+1)k)} \times A \end{aligned}$$

where

$$A = k(n+(\nu+\gamma)(d+1)-d-2\mu d\theta_{n+1})+\mu(n+\nu+\gamma)(-1)^n\left(1-(-1)^{(d+1)k}\right).$$

Next, we consider the case (3.3). Then

$$A = k(n+\nu(d+1)+2\mu d\theta_n)$$

and

$$\frac{(d+1)(\nu+\gamma+n)}{n+1}C_{n,k}-C_{n+1,k}=\frac{\gamma_\mu(n)(n-d)!(n+(d+1)\nu+2\mu d\theta_n)}{(n+1)!\gamma_\mu(n-d)}C_{n-d,k-1}.$$

That leads to (3.4). $\square$

Proof of Theorem 3.1. From Lemma 2.5 and Lemma 3.4, we deduce that $\{\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(x,d+1)\}_{n\geq 0}$ is a d-symmetric d-OPS.

Now, let T_μ operate on both sides of (3.2). Taking account of Equation (2.11), using (2.2) and the following transformation

$$(a)_{i+j}=(a)_i(a+i)_j,\quad i,j\in\mathbb{N} \tag{3.5}$$

one obtains

$$T_\mu\mathcal{H}_n^{\nu+\gamma}(x,d+1)=\frac{(d+1)(\nu+\gamma)\gamma_\mu(n)}{n\gamma_\mu(n-1)}\mathcal{H}_{n-1}^{\nu+\gamma+1}(x,d+1).$$

It follows that the PS $\{H_n^{\nu+\gamma}(.,d+1)\}_{n\geq 0}$ is Dunkl-classical. $\square$

3.2 – d-dimensional functionals

In this subsection, we express explicitly the d-dimensional functional for which we have the d-orthogonality of the generalized Humbert polynomials. Then, we consider some special cases.

According to Lemma 2.2, we will determinate the d first elements of the corresponding dual sequence to construct the d forms ensuring the d-orthogonality of these polynomials. To this end, we follow an approach used by Lamiri and Ouni [17] based on the inversion formula. We state the following.

Theorem 3.4. *With the conditions*:

$$(\mu,d)\in\{0\}\times\mathbb{N}^*\ \textit{or}\ (\mu,d)\in(]-1/2,+\infty[)\setminus\{0\}\times(2\mathbb{N}+1),$$

the generalized Humbert PS $\{\mathcal{H}_n^{\nu}(.,d+1)\}_{n\geq 0}$, $\nu-\mu>-\frac{1}{2}$, *defined by* (3.2) *is a d-OPS with respect to the d-dimensional functional vector* $\mathcal{U} = {}^t(u_0,u_1,\ldots,u_{d-1})$ *given by*:

$$\langle u_r, x^n\rangle = \delta_{r,i}\int_0^{d^{-\frac{d}{d+1}}} \xi^n\ \varphi_{r,d}(\xi)d\xi, \tag{3.6}$$

where $n=i+(d+1)k$, $k\in\mathbb{N}$, $i=0,1,\ldots,d$, $r=0,1,\ldots,d-1$ *and*

$$\begin{aligned}\varphi_{r,d}(\xi) = {} & \frac{2^r r!\left[\frac{r}{2}\right]!(\mu+1/2)_{\left[\frac{r+1}{2}\right]}\displaystyle\prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{\nu+r+j}{d}\right)}{\gamma_\mu(r)(d+1)^{r-1}(\nu)_r\displaystyle\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\mu-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}\right)} \\ & \times\xi^{-(r+1)}G_{d+1,\ d+1}^{d+1,0}\left(d^d\xi^{d+1}\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_{d+1}\\ \beta_1,\ldots,\beta_{d+1}\end{matrix}\right.\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

where

$$\alpha_j = \begin{cases}\dfrac{\nu+r+j}{d}, & 1\leq j\leq d,\\ 1, & j=d+1\end{cases}$$

and

$$\beta_j = \begin{cases}\dfrac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}, & 1\leq j\leq\dfrac{d+1}{2},\\ \dfrac{\mu-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}-1, & \dfrac{d+1}{2}<j\leq d+1\end{cases}$$

with $q=\frac{d+1}{2}$.

Here, $G_{p,\ q}^{m,\ n}$, *designates the Meijer's G-function defined by* [19, p. 143]*:*

$$G_{p,\ q}^{m,\ n}\left(z\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right) = (2\pi i)^{-1}\int_{\mathcal{L}} z^{\xi}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\xi)}{\displaystyle\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\xi)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\xi)}d\xi,$$

where (a_p) *abbreviates the set* $\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$. *We refer to* [19, p. 144] *for the details regarding the type of the contour* $\mathcal{L}$.

PROOF. Recall first that the inversion formula related to the Humbert polynomial set $\left\{h^{\nu}_{n,d+1}\right\}_{n\geq 0}$ is given by [3]:

$$x^n = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{d+1}]} \frac{(\nu+n-(d+1)j)}{(\nu)_{n+1-j}} \frac{n!}{(d+1)^n j!}\ h^{\nu}_{n-(d+1)j,\ d+1}(x). \tag{3.8}$$

Letting V_μ operate on both sides of (3.8) and using (2.6) and (3.2), we deduce that the inversion formula related to the generalized Humbert polynomial set $\{\mathcal{H}^{\nu+\gamma}_n(.,d+1)\}_{n\geq 0}$ is given by

$$x^n = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{d+1}]} \frac{(\nu+n-(d+1)j)}{(\nu)_{n+1-j}} \frac{\gamma_\mu(n)}{(d+1)^n j!} \frac{(n-(d+1)j)!}{\gamma_\mu(n-(d+1)j)} \mathcal{H}^{\nu}_{n-(d+1)j}(x, d+1). \tag{3.9}$$

According to the definition of a linear functional vector, we have from (3.9):

$$\langle u_r, x^n\rangle = \delta_{r,i} \frac{(\nu+r)}{(d+1)^{r+(d+1)k}} \frac{\gamma_\mu(r+(d+1)k)}{k!(\nu)_{r+1+dk}} \frac{r!}{\gamma_\mu(r)} \tag{3.10}$$

where $n = i + (d+1)k$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, d$, $r = 0, 1, \dots, d-1$.

Taking account of (2.3) and (2.4), one obtains, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_\mu(n) = 2^n [\frac{n}{2}]!(\mu+1/2)_{[\frac{n+1}{2}]}.$$

The use of the identities (3.10), (3.5) and the following transformation:

$$(a)_{m\,k} = m^{m\,k} \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{a+j}{m}\right)_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.11}$$

leads, with $q = \frac{d+1}{2}$, to

$$\gamma_\mu(r+(d+1)k) = 2^{r+(d+1)k} \left(\left[\frac{r}{2}\right] + qk\right)!(\mu+1/2)_{[\frac{r+1}{2}]+qk}$$

$$= 2^{r+(d+1)k} \left[\frac{r}{2}\right]! q^{(d+1)k} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}\right)_k (\mu+1/2)_{[\frac{r+1}{2}]} \prod_{j=0}^{q-1} \left(\frac{\mu+1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}\right)_k$$

and

$$\langle u_r, x^n\rangle = \delta_{r,i} \frac{2^r r! \left[\frac{r}{2}\right]! \prod_{j=1}^{q}\left(\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}\right)_k (\mu+1/2)_{[\frac{r+1}{2}]} \prod_{j=0}^{q-1}\left(\frac{\mu+1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}\right)_k}{\gamma_\mu(r)(d+1)^r(\nu)_r d^{dk} k! \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{\nu+r+j}{d}\right)_k}$$

$$= \delta_{r,i} \frac{2^r r! \left[\frac{r}{2}\right]! (\mu+1/2)_{[\frac{r+1}{2}]} \prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{\nu+r+j}{d}\right)}{\gamma_\mu(r)(d+1)^r(\nu)_r \prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}\right) \prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\mu-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}\right)} \cdot A_{k,r}$$

with

$$A_{k,r} = \frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}+k\right) \prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\mu-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}+k\right)}{d^{dk} k! \prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{\nu+r+j}{d}+k\right)}.$$

Setting

$$\gamma_j = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}+k-1, \ 1\le j\le \dfrac{d+1}{2}, \\[2ex] \dfrac{\mu-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}+k-2, \dfrac{d+1}{2} < j \le d+1, \end{cases}$$

$$l_j = \begin{cases} \dfrac{\nu(d+1)+(d+1)r-2d\left[\frac{r}{2}\right]+(1-d)j}{d(d+1)}, 1\le j\le \dfrac{d+1}{2}, \\[2ex] \dfrac{\nu(d+1)+(d+1)r-2d\left[\frac{r+1}{2}\right]+(1-d)j-(2\mu-1)d}{d(d+1)}+1, \dfrac{d+1}{2}<j\le d, \\[2ex] -1-\dfrac{\mu-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]}{q}, j=d+1, \end{cases}$$

we obtain

$$A_{k,r}(d) = \frac{1}{d^{dk}} \prod_{j=1}^{d+1} \left(\frac{\Gamma(\gamma_j + 1)}{\Gamma(\gamma_j + l_j + 1)} \right) \tag{3.13}$$

and $\sum_{j=1}^{d+1} l_j = \nu - \mu + 1/2$.

On the other hand, if $\sum_{j=1}^{d+1} l_j > 0$, the first author and Douak [6] showed that

$$\begin{aligned} {}_pF_q\left(\begin{matrix} (a_p) \\ (\gamma_q + l_q + 1) \end{matrix} ; x \right) = & \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{\Gamma(\gamma_i + 1 + l_i)}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \\ & \times \int_0^1 G_{q,\ q}^{q,\ 0}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix} (\gamma_q + l_q) \\ (\gamma_q) \end{matrix} \right) {}_pF_q\left(\begin{matrix} (a_p) \\ (\gamma_q + 1) \end{matrix} ; xt \right) dt, \end{aligned} \tag{3.14}$$

where the ${}_pF_q$, as usual, denotes the generalized hypergeometric functions defined by:

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_p \\ & & & ; & z \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_q \end{matrix} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m \ldots (\alpha_p)_m}{(\beta_1)_m \ldots (\beta_q)_m} \frac{z^m}{m!}, \tag{3.15}$$

- p and q are positive integers or zero (interpreting an empty product as 1);
- z is a complex variable;
- the numerator parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ and the denominator parameters $\beta_1, \ldots, \beta_q$ take in complex values. β_j; $j \in \mathbb{N}_{q+1}^*$: being non-negative integers.

The identity (3.14), for $x = 0$ and $q = d + 1$, is reduced to

$$\prod_{j=1}^{d+1} \left(\frac{\Gamma(\gamma_j + 1)}{\Gamma(\gamma_j + 1 + l_j)} \right) = \int_0^1 G_{d+1,\ d+1}^{d+1,\ 0}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix} (\gamma_{d+1} + l_{d+1}) \\ (\gamma_{d+1}) \end{matrix} \right) dt. \tag{3.16}$$

Thus, for $\nu > -\frac{1}{2}$, the identity (3.13) can be rewritten under the form

$$A_{k,r}(d) = \frac{1}{d^{dk}}$$

$$\int_0^1 G_{d+1,d+1}^{d+1,0}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{\nu+r+1}{d} - 1 + k, \ldots, \frac{\nu+r+d}{d} - 1 + k, k \\ \frac{\left[\frac{r}{2}\right]+1}{q} - 1 + k, \ldots, \frac{\left[\frac{r}{2}\right]+q}{q} - 1 + k, \frac{\mu + 1/2 + \left[\frac{r+1}{2}\right]}{q} + \\ +k-1, \ldots, \frac{\mu+1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+q-1}{q} + k - 1 \end{matrix} \right) dt.$$

Then, according to the transformation [[24], p. 46]

$$z^k G^{m,n}_{p,\,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_p\\ \beta_1,\dots,\beta_q\end{matrix}\right) = G^{m,n}_{p,\,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha_1+k,\dots,\alpha_p+k\\ \beta_1+k,\dots,\beta_q+k\end{matrix}\right), \tag{3.17}$$

we get

$$A_{k,r}(d) =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{t}{d^d}\right)^k G^{d+1,0}_{d+1,\,d+1}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix}\frac{\nu+r+1}{d}-1,\dots,\frac{\nu+r+d}{d}-1,0\\ \frac{\left[\frac{r}{2}\right]+1}{q}-1,\dots,\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+q}{q}-1,\frac{\mu+1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]}{q}+\\ -1,\dots,\frac{\mu+1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+q-1}{q}-1\end{matrix}\right)dt.$$

That, upon the change of variables $t = d^d\xi^{(d+1)}$, leads to

$$\begin{aligned} A_{k,r}(d) = \int_0^{d^{-\frac{d}{d+1}}} &\xi^{k(d+1)} G^{d+1,\,0}_{d+1,\,d+1}\cdot\\ &\cdot\left(d^d\xi^{d+1} \,\middle|\, \begin{matrix}\frac{\nu+r+1}{d}-1,\dots,\frac{\nu+r+d}{d}-1,0\\ \gamma_1-k,\dots,\gamma_{d+1}-k\end{matrix}\right)(d+1)d^d\xi^d d\xi.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Substituting (3.18) in (3.12), we obtain

$$\langle u_r, x^n\rangle = \delta_{r,i}\frac{2^r r!\left[\frac{r}{2}\right]!(\mu+1/2)_{\left[\frac{r+1}{2}\right]}\prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{\nu+r+j}{d}\right)}{\gamma_\mu(r)(d+1)^{r-1}(\nu)_r\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q}\right)\prod_{j=0}^{q-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}\right)}$$

$$\begin{aligned}&\times\int_0^{d^{-\frac{d}{d+1}}} \xi^{r+k(d+1)}\xi^{-(r+1)}\left(d^d\xi^{d+1}\right)\ G^{d+1,\,0}_{d+1,\,d+1}\times\\ &\times\left(d^d\xi^{d+1} \,\middle|\, \begin{matrix}\frac{\nu+r+1}{d}-1,\dots,\frac{\nu+r+d}{d}-1,\ 0\\ \gamma_1-k,\dots,\gamma_{d+1}-k\end{matrix}\right)d\xi.\end{aligned}$$

That, by virtue of (3.17), leads to (3.6). $\square$

3.2.1 – Special cases

In this subsection, we consider some particular cases of generalized Humbert polynomials by specializing the parameters d and μ.

Case 1 (Generalized Gegenbauer polynomials). Letting $d = 1$ in (3.2), we meet the generalized Gegenbauer polynomials $\left\{S_n^{(\nu-\mu-1/2,\mu-1/2)}(x)\right\}_{n\geq 0}$. Indeed, from (3.7) with $d = 1$ and the transformation 24, p. 46]

$$G_{p,\,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1},\beta_1\\ \beta_1,\dots,\beta_q\end{matrix}\right)= \tag{3.19}$$
$$= G_{p-1,q-1}^{m-1,n}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}\\ \beta_2,\dots,\beta_q\end{matrix}\right);\ m,p,q\geq 1;$$

we have

$$\varphi_{0,1}(\xi)=\frac{2\Gamma\left(\nu+1\right)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{1}{2}\right)}\,\xi^{-1}\,G_{1,\,1}^{1,\,0}\left(\xi^2\,\middle|\,\begin{matrix}\nu+1\\ \mu+\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

Taking account of the following identity [6]

$$G_{1,\,1}^{1,\,0}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha+\beta\\ \alpha\end{matrix}\right)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(1-x\right)^{\beta-1}x^{\alpha}, \tag{3.20}$$

we obtain

$$\varphi_{0,1}(\xi)=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\mu+\dfrac{1}{2}\right)}\xi^{2\mu}\left(1-\xi^2\right)^{\nu-\mu-\frac{1}{2}}. \tag{3.21}$$

Consequently, the linear functional u_0 of the generalized Gegenbauer polynomials is given by

$$\langle u_0,x^n\rangle=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\mu+\dfrac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\xi^n|\xi|^{2\mu}\left(1-\xi^2\right)^{\nu-\mu-\frac{1}{2}}d\xi.$$

If moreover $\mu = 0$, we meet the Gegenbauer polynomials $\{C_n^\nu\}_{n\geq 0}$. These polynomials are orthogonal with respect to the well known weight function

$$\varphi_{0,1}(\xi) = \frac{\nu(\Gamma(\nu))^2}{\pi\Gamma(2\nu)2^{1-2\nu}}\left(1-\xi^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Case 2 (Humbert polynomials). In this case, $\mu = 0$, $d \in \mathbb{N}^*$ and

$$\begin{aligned}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{d+1}\} &= \left\{\frac{\left[\frac{r}{2}\right]+j}{q},\ 1 \leq j \leq \frac{d+1}{2}\right\}\bigcup\\ &\bigcup\left\{\frac{-1/2+\left[\frac{r+1}{2}\right]+j}{q}-1,\ \frac{d+1}{2} < j \leq d+1\right\}\\ &= \left\{\frac{r+1}{d+1}, \frac{r+2}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1}\right\}.\end{aligned}$$

Since $r = [\frac{r}{2}] + [\frac{r+1}{2}]$, then $2^r[\frac{r}{2}]!(1/2)_{[\frac{r+1}{2}]} = r!$ and (3.7) is reduced to

$$\begin{aligned}\varphi_{r,d}(\xi) &= \frac{r!\displaystyle\prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{\nu+r+j}{d}\right)}{(d+1)^{r-1}(\nu)_r\displaystyle\prod_{j=1}^{d+1}\Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)}\times\\ &\times\xi^{-(r+1)}G^{d+1,0}_{d+1,\ d+1}\left(d^d\xi^{d+1}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{\nu+r+1}{d},\dots,\frac{\nu+r+d}{d},1\\ \frac{r+1}{d+1},\dots,\frac{r+(d+1)}{d+1}\end{matrix}\right).\end{aligned} \tag{3.22}$$

That was obtained by Lamiri and Ouni [17].

4 – Properties of the generalized Humbert polynomials

4.1 – A T_μ-equation

In this subsection, we state a $(d+1)$-order differential-difference equation satisfied by the generalized Humbert polynomials. To this end, we need the linear operator U_μ defined on polynomials by means of

$$U_\mu(x^n) := \frac{(n+1)\gamma_\mu(n)}{\gamma_\mu(n+1)}x^{n+1}, \tag{4.1}$$

where $\gamma_\mu(n)$ is defined by (2.3) and (2.4).

We have the following.

THEOREM 4.1. *The generalized Humbert polynomial* $\mathcal{H}_n^\nu(.,d+1)$, $n = 0,1,\ldots$, *satisfy the following* $(d+1)$*-order differential-difference equation*:

$$\left(T_\mu^{d+1} - (U_\mu T_\mu - n)\prod_{j=0}^{d-1}(d\,(U_\mu T_\mu - n + d + 1) + (d+1)(\nu + n - j - 1))\right) y = 0, \quad n > d. \tag{4.2}$$

PROOF. The Humbert polynomials $h_{n,d+1}^\nu$, $n = 0,1,\ldots$, satisfy the following $(d+1)$-order differential equation [5]:

$$L_n(y) := \left(D^{d+1} - (xD - n)\prod_{j=0}^{d-1}(d\,(xD - n + d + 1) + (d+1)(\nu + n - j - 1))\right) y = 0, \quad n > d.$$

From the identities (2.5) and (4.1), we deduce that $D = V_\mu^{-1}T_\mu V_\mu$ and $U_\mu V_\mu = V_\mu X$.

Then

$$V_\mu(XD) = U_\mu T_\mu V_\mu$$

and

$$V_\mu(XD)^k = (U_\mu T_\mu)^k V_\mu. \tag{4.3}$$

Put

$$L_n = D^{d+1} + \sum_{k=0}^{d}\alpha_{n,k}(XD)^k. \tag{4.4}$$

Letting V_μ operate on both sides of (4.4) and using (4.3), we deduce that

$$V_\mu L_n(h_{n,d+1}^\nu) = \widetilde{L_n}(V_\mu(h_{n,d+1}^\nu)) = \widetilde{L_n}(\mathcal{H}_n^\nu(.,d+1)) = 0$$

where

$$\widetilde{L_n} := T_\mu^{d+1} + \sum_{k=0}^{d} \alpha_{n,k}(U_\mu T_\mu)^k. \qquad \square$$

Put $d = 1$ in (4.2), we meet the second-order differential-difference equation satisfied by the generalized Gegenbauer polynomials $\{S_n^{(\alpha,\mu-1/2)}\}_{n\geq 0}$. Indeed, from (4.2), with $d = 1$, we have

$$\left(T_\mu^2 - (U_\mu T_\mu - n)\,(U_\mu T_\mu + n + 2\nu)\right) y = 0, \quad n > 1. \tag{4.5}$$

Since, for $k = 0, 1, \dots, n$ and $n - k \in 2\mathbb{N}$,

$$(n - U_\mu T_\mu)\,(U_\mu T_\mu + n + 2\nu)\, x^k =$$

$$= \left(-x^2 T_\mu^2 - 2(\alpha+1)xT_\mu + \frac{\gamma_\mu(n)}{\gamma_\mu(n-1)}\left(\frac{\gamma_\mu(n-1)}{\gamma_\mu(n-2)} + 2(\alpha+1)\right)\right) x^k,$$

with $\alpha = \nu - \mu - 1/2$, (4.5) becomes [7]

$$\left((1-x^2)T_\mu^2 - 2(\alpha+1)xT_\mu + \frac{\gamma_\mu(n)}{\gamma_\mu(n-1)}\left(\frac{\gamma_\mu(n-1)}{\gamma_\mu(n-2)} + 2(\alpha+1)\right)\right) S_n^{(\alpha,\mu-1/2)}(x) = 0.$$

4.2 – Components of generalized Humbert polynomials

According to Lemma 2.4, the components $\{\mathcal{H}_n^{\nu,k}\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, of the generalized Humbert PS $\{\mathcal{H}_n^{\nu}\}_{n\geq 0}$ are defined by

$$\mathcal{H}^{\nu}_{(d+1)m+k}(x, d+1) = \frac{\gamma_\mu(n(d+1)+k)}{(n(d+1)+k)!} x^k \mathcal{H}_m^{\nu,k}(x^{d+1}, d+1), \quad k \in \mathbb{N}_{d+1}. \tag{4.6}$$

With $d = 1$, the identity (4.6) is reduced to the classical relation between generalized Gegenbauer polynomials and Jacobi polynomials.

Next we give some properties of these components.

Theorem 4.2. *The components $\{\mathcal{H}_n^{\nu,k}(., d+1)\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, are classical d-orthogonal.*

The proof of this theorem, follows from the following three lemmas.

LEMMA 4.3. *The components* $\{\mathcal{H}_n^{\nu,k}(.,d+1)\}_{n\geq 0}$, $k\in\mathbb{N}_{d+1}$, *are generated by*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{\nu,k}(x,d+1)\ t^n=\\ &=\frac{(\nu)_k}{\gamma_\mu(k)}(d+1)^k(1+t)^{-k-\nu}{}_{d+1}F_d\left(\begin{matrix}\Delta\,(d+1,k+\nu)\\ \Delta_\mu^*\,(d+1,k+1)\end{matrix};\left(\frac{d+1}{1+t}\right)^{d+1}xt\right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

where $\Delta(n,a)$ *abbreviates the array of* n *parameters* $\frac{a+j-1}{n}$, $j=1,\dots,n$ *and*

$$\Delta_\mu^*(n,l):=\left\{\frac{l+j+2\mu\theta_{l+j}}{n};\ j=0,1,\dots,n-1\right\}\Big\backslash\left\{\frac{n}{n}\right\}.$$

PROOF. The Humbert polynomials are generated by (2.10), which can be rewritten in the form

$$(1+t^{d+1})^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu)_n}{n!}\left(\frac{(d+1)xt}{1+t^{d+1}}\right)^n=\sum_{n\geq 0}h_{n,d+1}^{\nu}(x)\ t^n.\tag{4.8}$$

Let $\Pi_{[d+1,k]}$ be the linear operator on formel power series defined by

$$\Pi_{[d+1,k]}f(z)=\frac{1}{d+1}\sum_{l=0}^{d}w_{d+1}^{-kl}f(w_{d+1}^{l}z)\ ,\quad k\in\mathbb{N}_{d+1}.\tag{4.9}$$

Applying the operator $\Pi_{[d+1,k]},k\in\mathbb{N}_{d+1}$, to the two members of the identity (4.8) considered as functions of the variable x, and using the fact that the Humbert polynomials $h_{n,d+1}^{\nu}(x)$ are d-symmetric, we obtain

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 0}h^{\nu}_{n(d+1)+k,d+1}(x)\ t^{n(d+1)+k}=\\ &=(1+t^{d+1})^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu)_{n(d+1)+k}}{(n(d+1)+k)!}\left(\frac{(d+1)xt}{1+t^{d+1}}\right)^{n(d+1)+k}.\end{aligned}$$

Letting V_μ operate on both sides of the last identity considered as functions of the variable x and using (2.6) and (3.2), we deduce that the generalized Humbert polynomial set $\{\mathcal{H}_n^{\nu}(x,d+1)\}_{n\geq 0}$ is generated by

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 0}\frac{(n(d+1)+k)!}{\gamma_\mu(n(d+1)+k)}\mathcal{H}^{\nu}_{n(d+1)+k}(x,d+1)\ t^{n(d+1)+k}=\\ &=(1+t^{d+1})^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu)_{n(d+1)+k}}{\gamma_\mu(n(d+1)+k)}\left(\frac{(d+1)xt}{1+t^{d+1}}\right)^{n(d+1)+k}.\end{aligned}$$

Notice that

$$\begin{aligned}\gamma_\mu(n(d+1)+k) &= \prod_{j=1}^{n(d+1)+k} (j+2\mu\theta_j)\\ &= (d+1)^{n(d+1)}\gamma_\mu(k) \prod_{j=1}^{n(d+1)} \left(\frac{j+k+2\mu\theta_{j+k}}{d+1}\right)\\ &= (d+1)^{n(d+1)}\gamma_\mu(k) \prod_{l=1}^{d+1}\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{k+l+j(d+1)+2\mu\theta_{k+l+j(d+1)}}{d+1}\right).\end{aligned}$$

Since $j(d+1)$ is even, for $j=0,1,\dots,d$, we have

$$\gamma_\mu(n(d+1)+k) = \\ = (d+1)^{n(d+1)}\gamma_\mu(k)\; n! \prod_{l=1, l+k\neq d+1}^{d+1} \left(\frac{k+l+2\mu\theta_{k+l}}{d+1}\right)_n.$$

Using (3.5) and (3.11), we write

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n(d+1)+k)!}{\gamma_\mu(n(d+1)+k)} \mathcal{H}^{\nu}_{n(d+1)+k}(x,d+1)\; t^{n(d+1)+k} =$$

$$= (1+t^{d+1})^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_k \displaystyle\prod_{j=0}^{d}\left(\frac{\nu+k+j}{d+1}\right)_n}{\gamma_\mu(k) n! \displaystyle\prod_{l=1, l+k\neq d+1}^{d+1}\left(\frac{k+l+2\mu\theta_{k+l}}{d+1}\right)_n} \left(\frac{(d+1)xt}{1+t^{d+1}}\right)^{n(d+1)+k} =$$

$$= \frac{(\nu)_k}{\gamma_\mu(k)}((d+1)xt)^k (1+t^{d+1})^{-k-\nu}\; {}_{d+1}F_d\left(\begin{matrix}\Delta(d+1,k+\nu)\\ \Delta^*_\mu(d+1,k+1)\end{matrix}; \left(\frac{(d+1)xt}{1+t^{d+1}}\right)^{d+1}\right).$$

Which, by virtue of (4.6) leads to (4.7). ∎

Lemma 4.4. *The components $\mathcal{H}^{\nu,k}_n(.,d+1)$, $k\in\mathbb{N}_{d+1}$, have the following hypergeometric representation.*

$$\mathcal{H}^{\nu,k}_n(x,d+1) = \\ = \frac{(\nu)_k(d+1)^k}{\gamma_\mu(k)} \frac{(-1)^n(\nu+k)_n}{n!}\; {}_{d+1}F_d\left(\begin{matrix}-n, \Delta(d,\nu+k+n)\\ \\ \Delta^*_\mu(d+1,k+1)\end{matrix}; d^d x\right). \tag{4.10}$$

PROOF. From (4.7), we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{\nu,k}(x,d+1)\;t^n =$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\nu)_k\prod_{j=0}^{d}\left(\frac{\nu+k+j}{d+1}\right)_l(d+1)^{l(d+1)+k}}{\gamma_\mu(k)l!\prod_{j=1,j+k\neq d+1}^{d+1}\left(\frac{k+j+2\mu\theta_{k+j}}{d+1}\right)_l}(1+t)^{-(k+\nu)-l(d+1)}\,x^lt^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\nu)_k\prod_{j=0}^{d}\left(\frac{\nu+k+j}{d+1}\right)_l(d+1)^{l(d+1)+k}}{\gamma_\mu(k)l!\prod_{j=1,j+k\neq d+1}^{d+1}\left(\frac{k+j+2\mu\theta_{k+l}}{d+1}\right)_l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n((k+\nu)+l(d+1))_n}{n!}t^nx^lt^l$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(\nu)_k\prod_{j=0}^{d}\left(\frac{\nu+k+j}{d+1}\right)_l(d+1)^{l(d+1)+k}}{\gamma_\mu(k)l!\prod_{j=1,j+k\neq d+1}^{d+1}\left(\frac{k+j+2\mu\theta_{k+l}}{d+1}\right)_l}\frac{(-1)^{n-l}(k+\nu+l(d+1))_{n-l}}{(n-l)!}x^lt^n$$

$$=\frac{(\nu)_k(d+1)^k}{\gamma_\mu(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-n)_l(\nu+k)_{n+dl}}{l!\prod_{j=1,j+k\neq d+1}^{d+1}\left(\frac{k+j+2\mu\theta_{k+l}}{d+1}\right)_l}x^lt^n$$

$$=\frac{(\nu)_k(d+1)^k}{\gamma_\mu(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\nu+k)_n}{n!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-n)_ld^{dl}\prod_{j=0}^{d-1}\left(\frac{\nu+k+n+j}{d}\right)_l}{l!\prod_{j=1,j+k\neq d+1}^{d+1}\left(\frac{k+j+2\mu\theta_{k+l}}{d+1}\right)_l}x^lt^n.$$

Equaling the coeffitients of t^n and using (3.15), we obtain (4.10). ☐

LEMMA 4.5 ([17]). *The polynomials defined by*

$$_{d+1}F_d\left(\begin{matrix}-n,\Delta\left(d,\nu+k+n\right)\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_d\end{matrix};x\right)$$

are classical d-orthogonal.

5 – Concluding remarks

In this section, we discuss the significance of the polynomials given by (3.2) and the method how these polynomials were introduced. As example of a special function, we show that these polynomials are a generalization of Gegenbauer polynomials having a property related to an orthogonality notion and as example of a T_μ-classical d-OPS, we show that these polynomials give negative answers to two questions arising in the d-orthogonal polynomial theory and suggest an open one.

5.1 – Generalized Gegenbauer polynomials and some orthogonality notions

The literature on generalizations of Gegenbauer polynomials contains several references. But only a few ones have a property related to an orthogonality notion. Let us give an overview of some different generalizations that were investigated in the literature.

- The Jacobi polynomials $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ are orthogonal with respect to the weight function:

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta; \qquad -1\leq x\leq 1.$$

For $\alpha=\beta$, the Jacobi polynomials $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ becomes the Gegenbauer polynomial.

- The generalized Gegenbauer polynomials $\{S_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ are orthogonal with respect to the weight function:

$$|x|^{2\beta+1}(1-x^2)^\alpha; \qquad -1\leq x\leq 1.$$

For $\beta=-1/2$, these polynomials are reduced to Gegenbauer polynomials.

- The Humbert polynomials $\{h_{n,d+1}^\nu\}_{n\geq 0}$ generated by (2.10). They are d-orthogonal with respect to the weights functions $\varphi_{r,d}$, $r=0,1,\ldots,d$, given by (3.22).
- The generalization given by Milovanovic [21]:

$$\pi_N(z)=2^{-n}z^\nu\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta_\nu)}(2z^{2m}-1), \quad N=2mn+\nu, \quad n=\left[\frac{N}{2m}\right],$$

where $\nu\in\mathbb{N}_{2m}$, $\beta_\nu=\gamma+(2\nu+1-2m)/(2m)$, and $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ denotes the monic Jacobi polynomial.
They are orthogonal relative to the inner product

$$(f,g)=\int_0^1\left(\sum_{s=0}^{2m-1}f(x\epsilon_s)\overline{g(x\epsilon_s)}\right)w(x)dx,$$

where $m \in \mathbb{N}$, $\epsilon_s = \exp(i\pi s/m)$, $s \in \mathbb{N}_{2m}$, and

$$w(x) = (1 - x^{2m})^\alpha x^{2m\gamma}, \quad \alpha > -1, \quad \gamma > -\frac{1}{2m}.$$

That corresponds to an orthogonal polynomial set over the star (OPS/$\star$, for shorter).

The link between the aforementioned polynomial sets and the obtained polynomials in this paper and defined by (3.2) may be summarized by the following scheme:

5.2 – The "L-classical" d-symmetric d-OPS and its components

Two general interesting questions may be discussed about a d-symmetric d-OPS $\{P_n\}_{n\geq 0}$, its components $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, and L-classical property:

Question 1. If $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is L-classical, what about its components?

Question 2. If all the components $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, are L-classical, what about $\{P_n\}_{n\geq 0}$?

As far as we know, only a particular case of Question 1, where L is the derivative operator D, was considered in the literature. Indeed, if $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is classical, Douak and Maroni [10] showed that the first component $\{P_n^0\}_{n\geq 0}$ is classical and, recently, Blel [9] showed that all the components $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, are classical. For the converse of this result, one can formulate Question 2 as follows.

Question 2.1. If all the components $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, are classical, is $\{P_n\}_{n\geq 0}$ too?

To generalize Blel result, one can formulate Question 1 as follows.

Question 1.1. If $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is L-classical, are all the components $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, too?

The example (3.2), introduced and studied in this paper, gives negative answers to the two last questions. Indeed, from Theorem (3.2) and Theorem (4.2), we deduce that the PS given by (3.2) is T_μ-classical but its components are classical. Another example of T_μ-classical d-symmetric d-OPS having classical d-orthogonal components was treated in [8] where we showed that the components of the Gould-Hopper type polynomials are of Laguerre type which are classical d-orthogonal according to Theorem 1 in [4]. These two examples suggest us the following particular case of Question 1.

Question 1.2. If $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is T_μ-classical, are the components $\{P_n^k\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}_{d+1}$, classical?

This question remains open.

5.3 – About the introduction of a new d-OPS

In this work, we introduce and study a Dunkl-classical d-symmetric d-OPS. As far as we know, the method used here to introduce new d-OPSs is original. In fact, most of the known d-OPSs were introduced as solutions of characterization problems or as components of d-symmetric d-OPSs while this polynomial set was introduced as a range of another one, the Humbert PS, by a suitable d-orthogonality preserving operator V_μ.

In a forthcoming investigation we will benefit from the present method to derive new Dunkl-classical d-symmetric d-OPSs.

Acknowledgements

The work has been supported by the Ministry of Hight Education and Technology, Tunisia (02/UR/1501) and by King Saud University, Riyadh througt Grant DSFP/ Math 01.

REFERENCES

[1] W. A. Al-Salam: *Characterization theorems for orthogonal polynomials*, P. Nevai Ed., Orthogonal polynomials: Theory and Practice, **294** (1990), 1–24.

[2] G. E. Andrews – R. Askey – R. Roy: *Special Functions*, Ensyclopedia of Mathematicsand its Applications, **71**, Cambridge University Press. Cambridge, 1999.

[3] Y. Ben Cheikh – H. Chaggara: *Connection coefficients between Boas-Buck polynomial sets*, J. Math. Anal. Appl., **319** (2006), 665–689.

[4] Y. Ben Cheikh – K. Douak: *A generalized hypergeometric d-orthogonal polynomial set*, C. R. Acad. Sci. Paris, t., **331** (I) (2000), 349–354.

[5] Y. Ben Cheikh – K. Douak: *On the classical d-orthogonal polynomials defined by certain generating functions I*, Bull. Belg. Math. Soc., **7** (2000), 107–124.

[6] Y. Ben Cheikh – K. Douak: *On the classical d-orthogonal polynomials defined by certain generating functions II*, Bull. Belg. Math. Soc., **8** (2001), 591–605.

[7] Y. Ben Cheikh – M. Gaied: *Characterization of the Dunkl-classical symmetric orthogonal polynomials*, Appl. Math. Comput., **187** (2007), 105–114.

[8] Y. Ben Cheikh – M. Gaied: *Dunkl-Appell d-orthogonal polynomials*, Integral Transforms Spec. Func., **18** (2007), 581–597.

[9] M. Blel: *On m-symmetric d-orthogonal polynomials*, Submitted.

[10] K. Douak – P. Maroni: *Les polynômes orthogonaux classiques de dimension deux*, Analysis, **12** (1992), 71–107.

[11] K. Douak – P. Maroni: *Une caractérisation des polynômes classiques de dimension d*, J. Approx. Theory, **82** (1995), 177–204.

[12] K. Douak – P. Maroni: *On d-orthogonal Tchebyshev polynomials I*, Appl. Num. Math., **24** (1997), 23–53.

[13] C. F. Dunkl: *Integral kernels with reflection group invariance*, Canad. J. Math., **43** (1991), 1213–1227.

[14] W. Hahn: *Über orthogonalpolynome, die q-differenzengleichungen genügen*, Math. Nachr, **2** (1949), 4–34.

[15] P. Humbert: *Some extensions of Pincherle's polynomials*, Proc. Edinbugh. Math. Soc., **39** (1920), 21–24.

[16] M. E. H. Ismail: *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Ensyclopedia of Mathematicsand its Applications **98**, Cambridge University Press. Cambridge, 2005.

[17] I. Lamiri – A. Ouni: *d-orthogonality of Humbert and Jacobi type polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 24–51.

[18] P. Lesky: *Über polynomsysteme, die sturm-liouvilleschen differenzengleichungen genügen*, Math. Zeit., **78** (1962), 439–445.

[19] Y. L. Luke: *The Special Functions and their Approximations*, vol. I, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1969.

[20] P. Maroni: *L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **10** (1989), 105–139.

[21] Gradimir V. Milovanović: *A class of orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., **206** (1997), 121–139.

[22] S. Pincherle: *Una nuova extensione delle funzione spherich*, Mem. Della R. Accad. di Bologna, **5** (1890), 337–362.

[23] M. Rosenblum: *Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus*, Oper. Theoey Adv. Appl., **73** (1994), 369–396.

[24] H. M. Srivastava – H. L. Manocha: *A Treatise on Generating Functions*, John Willey and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1984.

[25] J. Van Iseghem: *Vector orthogonal relations. Vector QD-algorithm*, J. Comput. Appl. Math., **19** (1987), 141–150.

Lavoro pervenuto alla redazione il ??????
ed accettato per la pubblicazione il ??????.
Bozze licenziate il 6 luglio 2010

Indirizzo degli Autori:

Y. Ben Cheikh – Département de Mathématiques – Faculté des Sciences de Monastir – 5019 Monastir, Tunisia
E-mail: youssef.bencheikh@planet.tn

M. Gaied – Institut Supérieure de Mathématiques Appliquées et d'Informatique de Kairouan, Tunisia

Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 30, Roma (2010), 221-238

A relative version of the ordinary perturbation lemma

MARCO MANETTI

Abstract: *The perturbation lemma and the homotopy transfer for L_∞-algebras is proved in a elementary way by using a relative version of the ordinary perturbation lemma for chain complexes and the coalgebra perturbation lemma.*

1 – Introduction

Let N be a differential graded vector space and let $M \subset N$ be a differential graded subspace such that the inclusion map $\imath \colon M \to N$ is a quasi-isomorphism. The basic homology theory shows that there exists a homotopy $h \colon N \to N$ such that $Id + dh + hd \colon N \to N$ is a projection onto M. If $\tilde{d}$ is a new differential on N such that $\partial = \tilde{d} - d$ is "small" in some appropriate sense, then the *ordinary perturbation lemma* (Theorem 3.6) gives explicit functorial formulas, in terms of ∂ and h, for a differential $\tilde{D}$ on M and for an injective morphism of differential graded vector spaces $\tilde{\imath} \colon (M, \tilde{D}) \to (N, \tilde{d})$.

Has been pointed out by Huebschmann and Kadeishvili [4] that if M, N are differential graded (co)algebra, and h is a (co)algebra homotopy (Definition 2.5), then also $\tilde{\imath}$ is a morphism of differential graded (co)algebras. This assumption are verified for instance when we consider the tensor coalgebras generated by M, N and the natural extension of h to $T(N)$ (this fact is referred as *tensor trick* in the literature). Therefore the ordinary perturbation lemma can be easily used to prove Kadeishvili's Theorem [10, 11] on the homotopy transfer of A_∞ structures (see also [4, 9, 13, 14, 18, 19]).

Key Words and Phrases: **MISSING**
A.M.S. Classification: 16T15, 17B55, 18G35

If we wants to use the same strategy for L_∞-algebras, we have to face the following problems:

(1) the tensor trick breaks down for symmetric powers and coalgebra homotopies are not stable under symmetrization,
(2) not every L_∞-algebra is the symmetrization of an A_∞-algebra.

Therefore the proof of the homotopy transfer for L_∞-algebras requires either a nontrivial additional work [5, 6, 7] or a different approach, see *e.g.* [3, 12] and the arXiv version of [2].

The aim of this paper is to show that the homotopy transfer for L_∞-algebras (Theorem 6.1) follows easily from a slight modification (Theorem 4.3) of the ordinary perturbation lemma in which we assume that $\tilde{d}$ is a differential when restricted to a differential graded subspace $A \subset N$ satisfying suitable properties.

The paper is written in a quite elementary style and we do not assume any knowledge of homological perturbation theory. We only assume that the reader is familiar with the basic properties of graded tensor and graded symmetric coalgebras. The bibliography contains the documents that have been more useful in the writing of this paper and it is necessarily incomplete; for more complete references the reader may consult [8, 9]. I apologize in advance for every possible misattribution of previous results.

2 – The category of contractions

Let R be a fixed commutative ring; by a differential graded R-module we mean a $\mathbb{Z}$-graded R-module $N = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i$ together a R-linear differential $d_N\colon N \to N$ of degree $+1$.

Given two differential graded R-modules M, N we denote by $\mathrm{Hom}^n_R(M,N)$ the module of R-linear maps of degree n:

$$\mathrm{Hom}^n_R(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid f(M_i) \subset N_{i+n},\ \forall\, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Notice that $\mathrm{Hom}^0_R(M,N)$ are the morphisms of graded R-modules and

$$\{f \in \mathrm{Hom}^0_R(M,N) \mid d_N f = f d_M\}$$

is the set of cochain maps (morphisms of differential graded R-modules).

Definition 2.1 (Eilenberg and Mac Lane [1, p. 81]) A *contraction* is the data

$$\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h \right)$$

where M, N are differential graded R-modules, $h \in \mathrm{Hom}^{-1}_R(N,N)$ and $\imath, \pi$ are cochain maps such that:

(1) (deformation retraction) $\pi\imath = \mathrm{Id}_M$, $\imath\pi - \mathrm{Id}_N = d_N h + h d_N$,
(2) (annihilation properties) $\pi h = h\imath = h^2 = 0$.

Remark 2.2 In the original definition Eilenberg and Mac Lane do not require $h^2 = 0$; however, if h satisfies the remaining 4 conditions, then $h' = hd_N h$ satisfies also the fifth (cf. [7, Rem. 2.1]).

Definition 2.3 A *morphism* of contractions

$$f\colon \left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right) \to \left(A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B, k\right)$$

is a morphism of differential graded R-modules $f\colon N \to B$ such that $fh = kf$. Given a morphism of contractions as above we denote by $\hat{f}\colon M \to A$ the morphism of differential graded R-modules $\hat{f} = pf\imath$.

In the notation of Definition 2.3 it is easy to see that the diagrams

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{f}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \imath} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ N & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow{\hat{f}} & A \end{array}$$

are commutative. In fact

$$i\hat{f} = ipf\imath = f\imath + (d_B kf + kd_B f)\imath = f\imath + f(d_N h + hd_N)\imath = f\imath + f(\imath\pi - \mathrm{Id}_N)\imath = f\imath,$$

$$\hat{f}\pi = pf\imath\pi = pf(\mathrm{Id}_N + d_N h + hd_N) = pf + p(d_B k + kd_B)f = pf + p(ip - \mathrm{Id}_B) = pf.$$

Definition 2.4 The *composition* of contractions is defined as

$$\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right) \circ \left(N \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} P, k\right) = \left(M \underset{\pi p}{\overset{i\imath}{\rightleftarrows}} P, k + ihp\right)$$

Given two contractions $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ and $\left(A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B, k\right)$ we define their tensor product as

$$\left(M \otimes_R A \underset{\pi \otimes p}{\overset{\imath \otimes i}{\rightleftarrows}} N \otimes_R B, h * k\right), \qquad h * k = \imath\pi \otimes k + h \otimes \mathrm{Id}_B\,.$$

It is straightforward to verify that the tensor product of two contractions is a contraction, it is bifunctorial and, up to the canonical isomorphism $(L \otimes_R M) \otimes_R N \cong L \otimes_R (M \otimes_R N)$, it is associative.

Given a contraction $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$, its tensor nth power is

$$\bigotimes\nolimits_R^n \left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right) = \left(M^{\otimes n} \underset{\pi^{\otimes n}}{\overset{\imath^{\otimes n}}{\rightleftarrows}} N^{\otimes n}, T^n h\right),$$

where

$$T^n h = \sum_{i=1}^{n} (\imath\pi)^{\otimes i-1} \otimes h \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-i}\,.$$

The tensor product allows to define naturally the notion of algebra and coalgebra contraction; we consider here only the case of coalgebras.

Definition 2.5. Let N be a differential graded coalgebra over a commutative ring R with coproduct $\Delta\colon N \to N \otimes_R N$. We shall say that a contraction $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ is a *coalgebra contraction* if

$$\Delta\colon \left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right) \to \left(M \otimes_R M \underset{\pi\otimes\pi}{\overset{\imath\otimes\imath}{\rightleftarrows}} N \otimes_R N, h * h\right)$$

is a morphism of contractions.

Notice that if Δ is a morphism of contractions then $\hat{\Delta}$ is a coproduct and $\pi, \imath$ are morphisms of differential graded coalgebras. Conversely, a contraction $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ is a coalgebra contraction if $\pi, \imath$ are morphisms of differential graded coalgebras and

$$(\imath\pi \otimes h + h \otimes \mathrm{Id}_N) \circ \Delta = \Delta \circ h.$$

Example 2.6 (tensor trick). Given a contraction $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ of differential graded R-modules, we can consider the *reduced tensor coalgebra*

$$\overline{T}(N) = \textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigotimes_R^n N$$

with the coproduct

$$\mathfrak{a}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n).$$

We have seen that there exists a contraction

$$\left(\overline{T}(M) \underset{T(\pi)}{\overset{T(\imath)}{\rightleftarrows}} \overline{T}(N), Th\right),$$

where $T(\imath) = \sum \imath^{\otimes n}$, $T(\pi) = \sum \pi^{\otimes n}$ and $Th = \sum_n T^n h$.

We want to prove that $\left(\overline{T}(M) \underset{T(\pi)}{\overset{T(\imath)}{\rightleftarrows}} \overline{T}(N), Th\right)$ is a coalgebra contraction, *i.e.* that

$$(T(\imath\pi) \otimes Th + Th \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \circ Th.$$

Let n be a fixed positive integer, writing

$$T^n h = \sum_{i=1}^{n} T_i^n h\,, \qquad T_i^n h = (\imath\pi)^{\otimes i-1} \otimes h \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-i},$$

for every $i = 1, \dots, n$ we have

$$\mathfrak{a} \circ T_i^n h = \sum_{j=1}^{i-1} (\imath\pi)^{\otimes j} \otimes T_{i-j}^{n-j} h + \sum_{j=i}^{n-1} T_i^j h \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-j}\,.$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \circ T^n h = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a} \circ T_i^n h &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (\imath\pi)^{\otimes j} \otimes T_{i-j}^{n-j} h + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n-1} T_i^j h \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (\imath\pi)^{\otimes j} \otimes T_{i-j}^{n-j} h + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} T_i^j h \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (\imath\pi)^{\otimes j} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n-j} T_i^{n-j} h \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{j} T_i^j h \right) \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (\imath\pi)^{\otimes j} \otimes T^{n-j} h + \sum_{j=1}^{n-1} T^j h \otimes \mathrm{Id}_N^{\otimes n-j}\,.
\end{aligned}$$

It is now sufficient to sum over n.

3 – Review of ordinary homological perturbation theory

Convention: *In order to simplify the notation, from now on, and unless otherwise stated, for every contraction* $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ *we assume that* M *is a submodule of* N *and* $\imath$ *the inclusion.*

Given a contraction $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ of differential graded R-modules and a morphism $\partial \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{N}, \mathrm{N})$, the ordinary homological perturbation theory consists is a series of statements about the maps

$$\imath_\partial = \sum_{n \geq 0} (h\partial)^n \imath \ \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}), \tag{3.1}$$

$$\pi_\partial = \sum_{n \geq 0} \pi(\partial h)^n \ \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{R}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}), \tag{3.2}$$

$$D_\partial = \pi\partial\imath_\partial = \pi_\partial\partial\imath \ \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \mathrm{M}), \tag{3.3}$$

In order to have the above maps defined we need to impose some extra assumption. This may done by considering filtered contractions of complete modules (as in [4]) or by imposing a sort of local nilpotency for the operators $h\partial, \partial h$.

DEFINITION 3.1. Given a contraction $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ denote

$$\mathcal{N}(N,h) = \{\partial \in \mathrm{Hom}^1_R(N,N) \mid \cup_n \ker((h\partial)^n \imath) = M,\ \cup_n \ker(\pi(\partial h)^n) = N\}.$$

It is plain that the maps $\imath_\partial, \pi_\partial$ and D_∂ are well defined for every $\partial \in \mathcal{N}(N,h)$. Moreover they are functorial in the following sense: given a morphism of contractions

$$f : \left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right) \to \left(A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B, k\right)$$

and two elements $\partial \in \mathcal{N}(N,h)$, $\delta \in \mathcal{N}(B,k)$ such that $f\partial = \delta f$ we have

$$f\imath_\partial = \sum_{n\geq 0} f(h\partial)^n \imath = \sum_{n\geq 0} (k\delta)^n f\imath = \sum_{n\geq 0} (k\delta)^n i\hat{f} = i_\delta \hat{f}.$$

Similarly we have $\hat{f}\pi_\partial = p_\delta f$, $\hat{f}D_\partial = D_\delta \hat{f}$.

LEMMA3.2. *Let* $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ *be a contraction and* $\partial \in \mathcal{N}(N,h)$. *Then* $\imath_\partial$ *is injective and*

$$\pi_\partial \imath_\partial = \pi\imath = \mathrm{Id}_M .$$

PROOF. Immediate consequence of annihilation properties. It is useful to point out that the proof of the injectivity of $\imath_\partial$ does not depend on the annihilation properties. Assume $\imath_\partial(x) = 0$ and let $s \geq 0$ be the minimum integer such that $(h\partial)^s \imath(x) = 0$. If $s > 0$ then

$$0 = (h\partial)^{s-1}\imath_\partial(x) = (h\partial)^{s-1}\imath(x) + \sum_{k\geq s}(h\partial)^k \imath(x) = (h\partial)^{s-1}\imath(x)$$

giving a contradiction. Hence $s = 0$ and $\imath(x) = 0$. ∎

PROPOSITION 3.3. *The formula* (3.1) *is compatible with composition of contractions. More precisely, if*

$$\left(L \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} M, k\right) \circ \left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right) = \left(L \underset{p\pi}{\overset{\imath i}{\rightleftarrows}} , Nh + \imath k\pi\right)$$

then $(\imath i)_\partial = \imath_\partial i_{D_\partial}$, *provided that all terms of the equation are defined.*

Proof. We have

$$\begin{aligned}
\imath_\partial i_{D_\partial} &= \sum_{n\geq 0}(h\partial)^n \imath \sum_{m\geq 0}(kD_\partial)^m i\\
&= \sum_{n\geq 0}(h\partial)^n \sum_{m\geq 0} \imath(k\pi\partial \sum_{s\geq 0}(h\partial)^s \imath)^m i\\
&= \sum_{n\geq 0}(h\partial)^n \sum_{m\geq 0} (\imath k\pi\partial \sum_{s\geq 0}(h\partial)^s)^m \imath i\\
&= \sum_{n\geq 0}(h\partial + \imath k\pi\partial)^n \imath i\\
&= (\imath i)_\partial.
\end{aligned}$$

∎

Proposition 3.4. *Let* $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h\right)$ *be a coalgebra contraction and* $\partial \in \mathcal{N}(N,h)$*. If* ∂ *is a coderivation then* $\imath_\partial$ *and* π_∂ *are morphisms of graded coalgebras and* D_∂ *is a coderivation.*

Proof. Consider the contraction

$$\left(M\otimes_R M \underset{\pi\otimes\pi}{\overset{\imath\otimes\imath}{\rightleftarrows}} N\otimes_R N, k\right) \quad \text{where} \quad k = h*h = \imath\pi\otimes h + h\otimes \mathrm{Id}_N,$$

and $\delta = \partial\otimes\mathrm{Id}_N + \mathrm{Id}_N\otimes\partial$. In order to prove that $\delta\in\mathcal{N}(N\otimes_R N, k)$ we show that for every integer $n\geq 0$ we have

$$(k\delta)^n(\imath\otimes\imath) = \sum_{i+j=n}(h\partial)^i\imath\otimes(h\partial)^j\imath\,, \qquad (\pi\otimes\pi)(\delta k)^n = \sum_{i+j=n}\pi(\partial h)^i\otimes\pi(\partial h)^j\,.$$

We prove here only the first equality by induction on n; the second is completely similar and left to the reader. Since

$$k\delta = h\partial\otimes\mathrm{Id}_N + h\otimes\partial - \imath\pi\partial\otimes h + \imath\pi\otimes h\partial,$$

according to annihilation properties we have:

$$h\partial\otimes\mathrm{Id}_N\left(\sum_{i+j=n}(h\partial)^i\imath\otimes(h\partial)^j\imath\right) = \sum_{i+j=n}(h\partial)^{i+1}\imath\otimes(h\partial)^j\imath,$$

$$h\otimes\partial\left(\sum_{i+j=n}(h\partial)^i\imath\otimes(h\partial)^j\imath\right) = 0, \quad \imath\pi\partial\otimes h\left(\sum_{i+j=n}(h\partial)^i\imath\otimes(h\partial)^j\imath\right) = 0,$$

$$\imath\pi\otimes h\partial\left(\sum_{i+j=n}(h\partial)^i\imath\otimes(h\partial)^j\imath\right) = \imath\otimes(h\partial)^{n+1}\imath.$$

Therefore

$$(\imath\otimes\imath)_\delta=\sum_{n\geq 0}(k\delta)^n(\imath\otimes\imath)=\sum_{i,j\geq 0}(h\partial)^i\imath\otimes(h\partial)^j\imath=\imath_\partial\otimes\imath_\partial,$$
$$(\pi\otimes\pi)_\delta=\sum_{n\geq 0}(\pi\otimes\pi)(\delta k)^n=f\sum_{i,j\geq 0}\pi(\partial h)^i\otimes\pi(\partial h)^j=\pi_\partial\otimes\pi_\partial\ .$$

Denoting by $\Delta\colon N\to N\otimes_R N$ the coproduct, since ∂ is a coderivation we have $\delta\Delta=\Delta\partial$; since Δ is a morphism of contractions we have by functoriality

$$\Delta\imath_\partial=(\imath\otimes\imath)_\delta\hat{\Delta}=(\imath_\partial\otimes\imath_\partial)\hat{\Delta},\qquad \hat{\Delta}\pi_\partial=(\pi\otimes\pi)_\delta\Delta=(\pi_\partial\otimes\pi_\partial)\Delta,$$

and then $\imath_\partial,\pi_\partial$ are morphisms of coalgebras. Finally D_∂ is a coderivation because it is the composition of the coderivation ∂ and the two morphisms of coalgebras $\imath_\partial$ and π.

A proof of Proposition 3.4 is given in [4] under the unnecessary assumption that $(d+\partial)^2=0$.

PROPOSITION 3.5. *Let N be a differential graded R-module. A perturbation of the differential d_N is a linear map $\partial\in\mathrm{Hom}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{N},\mathrm{N})$ such that $(d_N+\partial)^2=0$.*

THEOREM 3.6. (*Ordinary perturbation lemma*) *Let $\left(M\underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}}N,h\right)$ be a contraction and let $\partial\in\mathcal{N}(N,h)$ be a perturbation of the differential d_N. Then D_∂ is a perturbation of $d_M=\pi d_N\imath$ and*

$$\pi_\partial\colon(N,d_N+\partial)\to(M,d_M+D_\partial),\qquad \imath_\partial\colon(M,d_M+D_\partial)\to(N,d_N+\partial)$$

are morphisms of differential graded R-modules.

PROOF. See [4, 8] and references therein for proofs and history. We prove again this result in Remark 4.5 as a particular case of the relative perturbation lemma. ∎

REMARK 3.7 If $\cup_n\ker(h\partial)^n=N$, and ∂ is a perturbation of d_N, then $\imath_\partial$ is the unique morphism of graded R-modules $M\to N$ whose image is a subcomplex of $(N,d_N+\partial)$ and satisfying the "gauge fixing" condition

$$h\imath_\partial=0,\qquad \pi\imath_\partial=\mathrm{Id}_M\ .$$

In fact $h(d_N+\partial)\imath_\partial=0$ and then

$$\begin{aligned}\imath_\partial=&\imath_\partial+hd_N\imath_\partial+h\partial\imath_\partial=(\imath\pi-d_Nh)\imath_\partial+h\partial\imath_\partial\\=&\imath+(h\partial)\imath_\partial=(\mathrm{Id}_N-h\partial)^{-1}\imath.\end{aligned}$$

Similarly π_∂ is the unique morphism of graded R-modules $M \to N$ whose kernel is a subcomplex of $(N, d_N + \partial)$ and satisfying

$$\pi_\partial h = 0, \qquad \pi_\partial \imath = \mathrm{Id}_M .$$

The coalgebra perturbation lemma cited in the abstract is obtained by putting together Proposition 3.4 and Theorem 3.6.

4 – The relative perturbation lemma

Definition 4.1 Let N be a differential graded R-module and $A \subset N$ a differential graded submodule. A morphism $\partial \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{N}, \mathrm{N})$ is called a *perturbation of d_N over A* if

$$\partial(A) \subset A \quad \text{and} \quad (d_N + \partial)^2(A) = 0.$$

Remark 4.2. The meaning of Definition 4.1 becomes more clear when we impose some extra assumption on ∂. For instance, if N is a differential graded coalgebra and ∂ is a coderivation, then in general does not exist any coderivation δ of N such that $\delta_{|A} = \partial_{|A}$ and $(d_N + \delta)^2 = 0$. An explicit example of this phenomenon will be described in Section 5.

Theorem 4.3. (*Relative perturbation lemma*) *Let* $\left(M \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} N, h \right)$ *be a contraction with $M \subset N$ and $\imath$ the inclusion. Let $A \subset N$ be a differential graded submodule and $\partial \in \mathcal{N}(N, h)$ a perturbation of d_N over A. Assume moreover that:*

(1) $\pi(A) \subset A \cap M$.
(2) $\imath_\partial(A \cap M) \subset A$.

Then

$$D_\partial = \sum_{n \geq 0} \pi\partial(h\partial)^n \imath = \sum_{n\geq 0} \pi(\partial h)^n \partial \imath \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \mathrm{M}),$$

is a perturbation of d_M over $A \cap M$ and

$$\imath_\partial = \sum_{n\geq 0} (h\partial)^n \imath \colon (A \cap M, d_M + D_\partial) \to (A, d_N + \partial)$$

is a morphisms of differential graded R-modules.

Remark 4.4. It is important to point out that we do not require that $h(A) \subset A$ but only the weaker assumption $\imath_\partial(M \cap A) \subset A$.

Proof. We first note that $D_\partial = \pi\partial\imath_\partial$ and then $D_\partial(A \cap M) \subset A \cap M$. In order to simplify the notation we denote $d = d_N$ and $I = Id_N$. Setting $\psi = \partial^2 + d\partial + \partial d \in \mathrm{Hom}^2_{\mathrm{R}}(\mathrm{N}, \mathrm{N})$ we have the formula

$$\sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \partial\imath\pi\partial(h\partial)^m = \sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \psi(h\partial)^m - \sum_{m\geq 0} d\partial(h\partial)^m - \sum_{n\geq 0} (\partial h)^n \partial d. \tag{4.1}$$

In fact, since $\imath\pi = I + hd + dh$, we have

$$\partial\imath\pi\partial = \partial(I + hd + dh)\partial = \partial^2 + \partial hd\partial + \partial dh\partial = \psi - (I - \partial h)d\partial - \partial d(I - h\partial)$$

and therefore

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \partial\imath\pi\partial(h\partial)^m &= \sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \psi(h\partial)^m - \sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n (I - \partial h) d\partial(h\partial)^m \\
&\quad - \sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \partial d(I - h\partial)(h\partial)^m \\
&= \sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \psi(h\partial)^m - \sum_{m\geq 0} d\partial(h\partial)^m - \sum_{n\geq 0} (\partial h)^n \partial d\,.
\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}
(d + \partial)\imath_\partial &= \sum_{m\geq 0} d(h\partial)^m \imath + \sum_{m\geq 0} \partial(h\partial)^m \imath \\
&= d\imath + \sum_{m\geq 0} dh\partial(h\partial)^m \imath + \sum_{m\geq 0} \partial(h\partial)^m \imath \\
&= d\imath + \sum_{m\geq 0} (I + dh)\partial(h\partial)^m \imath = d\imath + \sum_{m\geq 0} (\imath\pi - hd)\partial(h\partial)^m \imath\,, \\
\imath_\partial(d_M + D_\partial) &= \sum_{n\geq 0} (h\partial)^n \imath d_M + \sum_{n,m\geq 0} (h\partial)^n \imath\pi\partial(h\partial)^m \imath \\
&= \sum_{n\geq 0} (h\partial)^n \imath d_M + \sum_{m\geq 0} \imath\pi\partial(h\partial)^m \imath + h \sum_{n,m\geq 0} (\partial h)^n \partial\imath\pi\partial(h\partial)^m \imath \\
&= \sum_{n\geq 0} (h\partial)^n d\imath + \sum_{m\geq 0} \imath\pi\partial(h\partial)^m \imath + \sum_{n\geq 0} h(\partial h)^n \psi\imath_\partial \\
&\quad - \sum_{m\geq 0} hd\partial(h\partial)^m \imath - \sum_{n\geq 0} h(\partial h)^n \partial d\imath \\
&= d\imath + \sum_{m\geq 0} (\imath\pi - hd)\partial(h\partial)^m \imath + \sum_{n\geq 0} h(\partial h)^n \psi\imath_\partial,
\end{aligned}$$

and therefore
$$\imath_\partial(d_M+D_\partial)-(d+\partial)\imath_\partial=\sum_{n\geq 0}h(\partial h)^n\psi\imath_\partial.$$
In particular, for every $x\in M\cap A$ we have $\psi\imath_\partial(x)=0$ and then
$$\imath_\partial(d_M+D_\partial)(x)=(d+\partial)\imath_\partial(x).$$
Now we prove that D_∂ is perturbation of d_M over $M\cap A$, *i.e.* that $(d_M+D_\partial)^2x=0$ for every $x\in M\cap A$. Since $\pi h=0$ we have $\pi\imath_\partial=\pi\imath$ and then $\imath_\partial$ is injective. If $x\in M\cap A$ we have
$$\imath_\partial(d_M+D_\partial)^2x=(d+\partial)\imath_\partial(d_M+D_\partial)x=(d+\partial)^2\imath_\partial x=0.$$
□

REMARK 4.5. In the set-up of Theorem 4.3, if $h(A)\subset A$ then also $\pi_\partial\colon(A,d+\partial)\to(A\cap M,d_M+D_\partial)$ is a morphism of differential graded R-modules. In fact, under this additional assumption we have
$$\pi_\partial(A)=\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n(A)\subset A\cap M,\qquad \sum_{n,m\geq 0}(\partial h)^n\psi(h\partial)^m h(A)=0,$$
and therefore in A the following equalities hold:
$$\begin{aligned}\pi_\partial(d+\partial)&=\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n d+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial=\pi d+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial h d+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\\&=\pi d+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial(I+hd)=\pi d+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial(\imath\pi-dh).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d+D_\partial)\pi_\partial&=\sum_{n\geq 0}\pi d(\partial h)^n+\sum_{n,m\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi(\partial h)^m\\&=\sum_{n\geq 0}\pi d(\partial h)^n+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi+\sum_{n\geq 0,m\geq 1}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi(\partial h)^m\\&=\sum_{n\geq 0}\pi d(\partial h)^n+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi+\sum_{n,m\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi\partial(h\partial)^m h\\&=\sum_{n\geq 0}\pi d(\partial h)^n+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi-\sum_{m\geq 0}\pi d\partial(h\partial)^m h-\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial dh\\&=\left(\sum_{n\geq 0}\pi d(\partial h)^n-\sum_{m\geq 0}\pi d\partial(h\partial)^m h\right)+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial\imath\pi\\&\quad-\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial dh=\pi d+\sum_{n\geq 0}\pi(\partial h)^n\partial(\imath\pi-dh).\end{aligned}$$

REMARK 4.6 It is straightforward to verify that all the previous proofs also work for the weaker notion of contraction where the condition $\pi\imath = Id_M$ is replaced with *$\imath$ is injective and $\imath(M)$ is a direct summand of N as graded R-module.*

5 – Review of reduced symmetric coalgebras and their coderivations

From now on we assume that $R = \mathbb{K}$ is a field of characteristic 0. Given a graded vector space V, the *twist map*

$$\mathtt{tw}\colon V \otimes V \to V \otimes V, \qquad \mathtt{tw}(v \otimes w) = (-1)^{\deg(v)\deg(w)} w \otimes v,$$

extends naturally to an action of the symmetric group Σ_n on the tensor product $\bigotimes^n V$:

$$\sigma_{\mathtt{tw}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \pm\, v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}, \qquad \sigma \in \Sigma_n.$$

We will denote by $\bigodot^n V = (\bigotimes^n V)^{\Sigma_n}$ the subspace of invariant tensors. Notice that if $W \subset V$ is a graded subspace, then $\bigodot^n W = \bigodot^n V \cap \bigotimes^n W$. It is easy to see that the subspace

$$\overline{S}(V) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigodot^n V \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigotimes^n V = \overline{T}(V)$$

is a graded subcoalgebra, called the *reduced symmetric coalgebra* generated by V. Let's denote by $p\colon \overline{T}(V) \to V$ the projection; we will also denote by $p\colon \overline{S}(V) \to V$ the restriction of the projection to symmetric tensors. The following well known properties hold (for proofs see *e.g.* [16]):

(1) Given a morphism of graded coalgebras $F\colon \overline{T}(V) \to \overline{T}(W)$ we have $F(\overline{S}(V)) \subset \overline{S}(W)$.
(2) Given a morphism of graded vector spaces $f\colon \overline{T}(V) \to W$ there exists an unique morphism of graded coalgebras $F\colon \overline{T}(V) \to \overline{T}(W)$ such that $f = pF$.
(3) Given a morphism of graded vector spaces $f\colon \overline{S}(V) \to W$ there exists an unique morphism of graded coalgebras $F\colon \overline{S}(V) \to \overline{S}(W)$ such that $f = pF$.

Similar results hold for coderivations. More precisely for every map $q \in \mathrm{Hom}^k(\overline{\mathrm{T}}(\mathrm{V}), \mathrm{V})$ there exists an unique coderivation $Q\colon \overline{T}(V) \to \overline{T}(V)$ of degree k such that $q = pQ$. The coderivation Q is given by the explicit formula

$$\begin{aligned} &Q(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ (5.1)\quad &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-l} (-1)^{k(\overline{a_1} + \cdots + \overline{a_i})} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes q(a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+l}) \otimes \cdots \otimes a_n\ , \end{aligned}$$

where $\overline{a_i} = \deg(a_i)$. Moreover $Q(\overline{S}(V)) \subset \overline{S}(V)$ and the restriction of Q to $\overline{S}(V)$ depends only on the restriction of q on $\overline{S}(V)$. In particular every coderivation of $\overline{S}(V)$ extends to a coderivation of $\overline{T}(V)$.

Definition 5.1. A coderivation Q of degree $+1$ is called a *codifferential* if $Q^2 = 0$.

Lemma 5.2. *A coderivation Q of degree $+1$ is a codifferential if and only if $pQ^2 = 0$.*

Proof. The space of coderivations of a graded coalgebra is closed under the bracket

$$[Q, R] = QR - (-1)^{\deg(Q)\deg(R)} RQ$$

and therefore if Q is a coderivation of odd degree, then its square $Q^2 = [Q, Q]/2$ is again a coderivation.

Every codifferential on $\overline{T}(V)$ induces by restriction a codifferential on $\overline{S}(V)$. Conversely it is generally false that a codifferential on $\overline{S}(V)$ extends to a codifferential on $\overline{T}(V)$. This is well known to experts; however we will give here an example of this phenomenon for the lack of suitable references.

We restrict our attention to graded vector spaces concentrated in degree -1, more precisely we assume that $V = L[1]$, where L is a vector space and $[1]$ denotes the shifting of the degree, *i.e.* $L[1]^i = L^{i+1}$. Under this assumption every codifferential in $\overline{T}(V)$ (resp.: $\overline{S}(V)$) is determined by a linear map $q\colon \bigotimes^2 V \to V$ (resp.: $q\colon \bigodot^2 V \to V$) of degree $+1$.

Lemma 5.3. *In the above assumption:*

(1) *The map*

$$L \times L \to L, \qquad xy = q(x \otimes y),$$

is an associative product if and only if q induces a codifferential in $\overline{T}(V)$.

(2) *The map*

$$L \times L \to L, \qquad [x, y] = q(x \otimes y - y \otimes x) = xy - yx,$$

is a Lie bracket if and only if q induces a codifferential in $\overline{S}(V)$.

Proof. We have seen that Q is a codifferential in $\overline{T}(V)$ if and only if $pQ^2 = qQ\colon \bigotimes^3 V \to V$ is the trivial map. It is sufficient to observe that

$$qQ(x \otimes y \otimes z) = q(q(x \otimes y) \otimes z) - q(x \otimes q(y \otimes z)) = (xy)z - x(yz).$$

Similarly Q is a codifferential in $\overline{S}(V)$ if and only if for every x_1, x_2, x_3 we have

$$\begin{aligned} 0 =& qQ\left(\sum_{\sigma\in\Sigma_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}\right) \\ =& \sum_{\sigma\in\Sigma_3} (-1)^\sigma ((x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)})) \\ =& [[x_1, x_2], x_3] + [[x_2, x_3], x_1] + [[x_3, x_1], x_2] \end{aligned}$$

□

Therefore every Lie bracket on L not induced by an associative product gives a codifferential on $\overline{S}(L[1])$ which does not extend to a codifferential on $\overline{T}(L[1])$.

Example 5.4. Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic $\neq 2$ and L a vector space of dimension 3 over $\mathbb{K}$ with basis A, B, H. Then does not exist any associative product on L such that

$$AB - BA = H, \qquad HA - AH = 2A, \qquad HB - BH = -2B.$$

We prove this fact by contradiction: assume that there exists an associative product as above, then the pair $(L, [,])$, where $[X, Y] = XY - YX$, is a Lie algebra isomorphic to $sl_2(\mathbb{K})$. Writing

$$H^2 = \gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma H$$

we have

$$0 = [H^2, H] = \gamma_1[A, H] + \gamma_2[B, H]$$

and therefore $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $H^2 = \gamma H$. Possibly acting with the Lie automorphism

$$A \mapsto B, \qquad B \mapsto A, \qquad H \mapsto -H,$$

it is not restrictive to assume $\gamma \neq -1$.

Since $[AH, H] = [A, H]H = -2AH$, writing $AH = xA + yB + zH$ for some $x, y, z \in \mathbb{K}$ we have

$$0 = [AH, H] + 2AH = x[A, H] + y[B, H] + 2xA + 2yB + 2zH = 4yB + 2zH$$

giving $y = z = 0$ and $AH = xA$. Moreover $2A^2 = A[H, A] = [AH, A] = [xA, A] = 0$ and then $A^2 = 0$. Since

$$0 = A(H^2) - (AH)H = \gamma AH - xAH = (\gamma x - x^2)A$$

we have either $x = 0$ or $x = \gamma$. In both cases $x \neq -1$ and then $AH + HA = (2x + 2)A \neq 0$. This gives a contradiction since

$$-AH = A(AB - H) = ABA = (BA + H)A = HA.$$

6 – The L_∞-algebra perturbation lemma

The bar construction gives an equivalence from the category of L_∞-algebras and the category of differential graded reduced symmetric coalgebras (see *e.g.* [2, 3, 12]).

According to Formula 5.1, every coderivation $Q: \overline{T}(V) \to \overline{T}(V)$ of degree $+1$ can be uniquely decomposed as $Q = d + \partial$, where

$$d(\bigotimes^n V) \subset \bigotimes^n V, \qquad \partial(\bigotimes^n V) \subset \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bigotimes^i V, \qquad \forall\, n > 0.$$

and

$$d(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{\overline{a_1}+\cdots+\overline{a_i}} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes d_1(a_{i+1}) \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n$$

where $d_1 = Q_{|V}: V \to V$. If Q is a codifferential on $\overline{T}(V)$ then $d^2(V) = 0$, d is the natural differential on the tensor powers of the complex (V, d_1) and ∂ is a perturbation of d.

If Q is a codifferential on $\overline{S}(V)$ then $d^2(V) = 0$ and therefore d is the natural differential on the symmetric powers of the complex (V, d_1) and ∂ is a perturbation of d over $\overline{S}(V)$.

THEOREM 6.1. *In the above notation, let $Q = d + \partial$ be a coderivation of degree +1 on $\overline{T}(V)$ which is a codifferential on $\overline{S}(V)$. Let W be a differential graded subspace of (V, d) and let $\left(W \rightleftarrows, k\right)$ be a contraction. Taking the tensor power as in Example* 2.6*, we get a coalgebra contraction $\left(\overline{T}(W) \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}}, h\right)$ where $h = Tk$. Setting*

$$D_\partial = \sum_{n\geq 0} \pi\partial(h\partial)^n \imath = \sum_{n\geq 0} \pi(\partial h)^n \partial\imath : \overline{S}(W) \to \overline{S}(W),$$

then $d + D_\partial$ is a codifferential in $\overline{S}(W)$ and

$$\imath_\partial = \sum_{n\geq 0} (h\partial)^n \imath : (\overline{S}(W), d + D_\partial) \to (\overline{S}(V), d + \partial)$$

is a morphisms of differential graded coalgebras.

Proof. Since $h(\bigotimes^n V) \subset \bigotimes^n V$ and $\partial(\bigotimes^n V) \subset \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bigotimes^i V$ we have

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \bigotimes^{i} V \subset \ker(\partial h)^n \cap \ker(h\partial)^n$$

and therefore $\partial \in \mathcal{N}(\overline{T}(V), h)$. According to Proposition 3.4 the maps

$$\imath_\partial \colon \overline{T}(W) \to \overline{T}(V), \qquad D_\partial \colon \overline{T}(W) \to \overline{T}(W)$$

are respectively a morphism of graded coalgebras and a coderivation and then

$$\imath_\partial(\overline{S}(W)) \subset \overline{S}(V), \qquad D_\partial(\overline{S}(W)) \subset \overline{S}(W).$$

The conclusion now follows from Theorem 4.3, where $N = \overline{T}(V)$, $M = \overline{T}(W)$ and $A = \overline{S}(V)$. ∎

Remark 6.2. According to Proposition 3.4 the construction of Theorem 6.1 commutes with composition of contractions.

Remark 6.3. In the notation of Theorem 6.1, if

$$S^n k \colon \bigodot^n V \to \bigodot^n V, \qquad S^n k = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma_{\mathtt{tw}} \circ T^n k \circ \sigma_{\mathtt{tw}}^{-1},$$

is the symmetrization of $T^n k$ and $Sk = \sum S^n k$, then $\left(\overline{S}(W) \underset{\pi}{\overset{\imath}{\rightleftarrows}} \overline{S}(V)\pi, Sk\right)$ is a contraction but in general it is not a coalgebra contraction.

In the set-up of Theorem 6.1 the map $\pi_\partial \colon \overline{T}(V) \to \overline{T}(W)$ is a morphism of graded coalgebras and then induces a morphism of graded coalgebras $\pi_\partial \colon \overline{S}(V) \to \overline{S}(W)$ such that $\pi_\partial \imath_\partial$ is the identity on $\overline{S}(W)$. Unfortunately our proof does not imply that π_∂ is a morphism of complexes (unless $(d+\partial)^2 = 0$ in $\overline{T}(V)$ or $D_\partial = 0$). However it follows from the homotopy classification of L_∞-algebras [12] that a morphism of differential graded coalgebras $\Pi \colon \overline{S}(V) \to \overline{S}(W)$ such that $\Pi \imath_\partial = Id$ always exists.

We have proved that the map $\imath_\partial \colon \overline{T}(W) \to \overline{T}(V)$ satisfies the equation $\imath_\partial = \imath + (h\partial)\imath_\partial$ and then $\imath_\partial \colon \overline{S}(W) \to \overline{S}(V)$ is the unique morphism of symmetric graded coalgebras satisfying the recursive formula

(6.1) $\quad p\imath_\partial = p\imath + kp\partial\imath_\partial \qquad$ (where $p \colon \overline{S}(V) \to V$ is the projection).

It is possible to prove that the validity of the Equation 6.1 gives a combinatorial description of $\imath_\partial$ as sum over rooted trees [2, 3] and assures that $\imath_\partial \colon (\overline{S}(W), d + \pi\partial\imath_\partial) \to (\overline{S}(V), d + \partial)$ is a morphism of differential graded coalgebras (see *e.g.* the arXiv version of [2]).

REFERENCES

[1] A. Berglund: *Homological perturbation theory for algebras over operads*, preprint, `arXiv:0909.3485`

[2] S. Eilenberg – S. Mac Lane: *On the groups* $\mathrm{H}(\pi, \mathrm{n})$*, I*, Ann. of Math. **58** (1953), 55–106.

[3] D. Fiorenza – M. Manetti: L_∞ *structures on mapping cones*, Algebra Number Theory **1** (2007) 301–330, `arXiv:math.QA/0601312.`

[4] K. Fukaya: *Deformation theory, homological algebra and mirror symmetry*, Geometry and physics of branes (Como, 2001), Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., IOP Bristol (2003) 121-209. Electronic version available at `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/%7Efukaya/fukaya.html`.

[5] J. Huebschmann – T. Kadeishvili: *Small models for chain algebras*, Math. Z. **207** (1991) 245–280.

[6] J. Huebschmann – J. Stasheff: *Formal solution of the master equation via HPT and deformation theory*, Forum Math. **14** (2002) 847–868, `arXiv:math.AG/9906036v2`.

[7] J. Huebschmann: *The Lie algebra perturbation lemma*, Festschrift in honor of M. Gerstenhaber's 80-th and Jim Stasheff's 70-th birthday, Progress in Math. (to appear), `arXiv:0708.3977`.

[8] J. Huebschmann: *The sh-Lie algebra perturbation lemma*, `arXiv:0710.2070`.

[9] J. Huebschmann: *Origins and breadth of the theory of higher homotopies*, Festschrift in honor of M. Gerstenhaber's 80-th and Jim Stasheff's 70-th birthday, Progress in Math. (to appear), `arXiv:0710.2645`.

[10] J. Huebschmann: *On the construction of* A_∞*-structures*, `arXiv:0809.4791`.

[11] T. Kadeishvili: *On the homology theory of fibre spaces, (Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk. **35:3** (1980), english version `arXiv:math/0504437`.

[12] T. V. Kadeishvili: *The algebraic structure in the cohomology of* $A(\infty)$*-algebras*, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR **108** (1982), 249–252.

[13] M. Kontsevich: *Deformation quantization of Poisson manifolds, I.*, Letters in Mathematical Physics **66** (2003) 157–216, `arXiv:q-alg/9709040`.

[14] M. Kontsevich – Y. Soibelman: *Deformations of algebras over operads and Deligne's conjecture*, G. Dito and D. Sternheimer (eds) *Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon 1999)*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000) 255–307, `arXiv:math.QA/0001151`.

[15] M. Kontsevich – Y. Soibelman: *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, K. Fukaya, (ed.) et al., Symplectic geometry and mirror symmetry. Proceedings of the 4th KIAS annual international conference, Seoul, South Korea, August 14-18, 2000. Singapore: World Scientific. (2001) 203–263, `arXiv:math.SG/0011041`.

[16] S. Mac Lane: *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[17] M. Manetti: *Lectures on deformations on complex manifolds*, Rend. Mat. Appl. (7) **24** (2004) 1–183, `arXiv:math.AG/0507286`.

[18] M. Markl: *Ideal perturbation lemma*, Comm. Algebra **29:11** (2001), 5209–5232, `arXiv:math.AT/0002130v2`.

[19] M. Markl: *Transferring A_∞ (strongly homotopy associative) structures*, `arXiv: math.AT/0401007v3` (2009).

[20] S.A. Merkulov: *Strong homotopy algebras of a Kähler manifold*, Intern. Math. Res. Notices (1999), 153–164, `arXiv: math.AG/9809172`.

Lavoro pervenuto alla redazione il ???
ed accettato per la pubblicazione il ???.
Bozze licenziate il 6 luglio 2010

Indirizzo dell'Autore:

M. Manetti – Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo" – Sapienza Università di Roma – P.le Aldo Moro 5, I-00185, Roma, Italy
E-mail manetti@mat.uniroma1.it