Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 36, Roma (2015), 197 – 206

SUR LES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOMOGENES A SOUS-GROUPE DISCRET

HASSIMIOU DIALLO

Abstract: *Let G^Γ be the group generated by left translation of a Lie group G and right translation of elements of a discrete subgroup Γ. We establish here that on a manifold M, there is a correspondence one to one between $\frac{G}{\Gamma}$-homogenous transversally foliations and foliations given by a $(G^\Gamma\ ,G)$-transverse structure and the two corresponding foliations have the same C^∞-transverse structure. Moreover the foliation given by the $(G^\Gamma\ , G)$-transverse structure is a Lie foliation if and only if its Γ-holonomy group is trivial.*

Notation 1. *Dans tout ce qui suit G est un groupe de Lie connexe d'élémént neutre e, $C(G)$ le centre de G , $Diff(G)$ le groupe des difféomorphismes de G, $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$ le pseudogroupe obtenu par localisation des éléments de G^Γ. Enfin on se met dans le cadre où tous les objets considérés sont C^∞.*

1 – Introduction

On rappelle qu'étant donné deux feuilletages $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ d'une même variété , on dit que $\mathcal{F}$ est une extension de $\mathcal{E}$ (et on note $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$) [2] si toute feuille de $\mathcal{F}$ est une réunion de feuilles de $\mathcal{E}$. Par exemple si on se donne H un sous groupe fermé d'un groupe de Lie G,alors tout G-feuilletage de Lie[4] d'une variété admet canoniquement une extension $\frac{G}{H}$-transversalement homogène. On dira de cette extension qu'elle dérive du G-feuilletage de Lie . Le problème est de savoir si un feuilletage transversalement homogène dérive nécessairement d'un feuilletage de Lie. C'est un problème difficile, car même dans le cas où le feuilletage transversalement homogène est de Lie , on n'a pas, en général, de réponse.

Key Words and Phrases: *Feuilletage de Lie – $(G\ ,T)$-structure transverse – Feuilletage transversalement homogène – Extension de feuilletage*
A.M.S. Classification: 53C12, 53R30, 53C40.

Nous allons résoudre le problème dans le cas où H est un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie G.

Notons $G^{\Gamma} = \langle L(G) \cup R(\Gamma) \rangle$ le sous-groupe de $Diff(G)$ engendré par les translations à gauche de G et à droite des éléments de Γ. Le fait que dans un groupe les translations à gauche commutent avec les translations à droite nous donne dans G^{Γ} la loi de composition suivante:

$$L_g \circ R_\gamma \circ L_{g'} \circ R_{\gamma'} = L_{gg'} \circ R_{\gamma'\gamma}.$$

2 – Détermination des feuilletages admettant pour extension discrète un feuilletage transversalement homogène

On va commencer d'abord par donner quelques rappels portant les feuiiletages de Lie et les feuilletages transversalement homogènes qui sont tous deux des cas particuliers d'un type de feuilletage admettant une (G, T)-structure transverse.

2.1 – Feuilletage admettant une (G, T)-structure transverse

Définition 2.1. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n sur une variété connexe M de dimension $m + n$ est la donnée:

- d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M,
- d'une variété Tde dimension n dite variété transverse
- d'une famille de submersions $f_i : U_i \to T$, tels que pour chaque $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ il existe dans le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de T un $g_{ji} : f_i(U_i \cap U_j) \subset T \to f_j(U_i \cap U_j) \subset T$ satisfaisant à

$$f_j(x) = (g_{ji} \circ f_j)(x) \text{ pour tout } x \in U_i \cap U_j.$$

On dira que $\{U_i, f_i, T, g_{ji}\}_{i,j\in I}$ est un cocycle feuilleté définissant $\mathcal{F}$.

Lorsque T est un groupe de Lie G et les g_{ji} des restrictions de translations à gauche, on parle de G-feuilletage de Lie.

Lorsque T est une variété homogène $\frac{G}{H}$ et les g_{ji} des restrictions de l'action à gauche de G sur $\frac{G}{H}$ on parle de $\frac{G}{H}$-feuilletage transversalement homogène.

Plus généralement si G est un sous-groupe de $Diff^{\infty}(T)$ (le groupe des difféomorphismes de T), opérant analytiquement sur T(G opère analytiquement sur T signifie que deux difféomorphismes de G qui coincident sur un ouvert non vide sont égaux) et si les g_{ji} sont des restrictions d'éléments de G, on dira que $\mathcal{F}$ admet une (G, T)-structure transverse ou est une (G, T)-structure transverse.

Par exemple un G-feuilletage de Lie est un (G, G)-structure transverse.et un $\frac{G}{H}$-feuilletage transversalement homogène un $(G, \frac{G}{H})$-structure transverse

Pour un feuilletage admettant une (G, T)-structure transverse, on introduit la notion de groupe d'holonomie comme suit:

Etant donné un lacetγ dans M , soit (U_i) recouvrement de γ par $(k+1)$ ouverts de M,tel que pour tout $i \leq k-1$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et $U_{k+1} \cap U_0 \neq \emptyset$. Comme G opère analytiquement sur T on peut toujours noter $g_{i,i+1}$ le difféomorphisme de G dont il est la restriction. On pose alors

$$\Lambda(\gamma) = g_{01} \circ g_{12} \circ ... \circ g_{k-1k};$$

on vérifie en utilisant encore le fait que G opère analytiquement sur T que $\Lambda(\gamma)$ ne dépend pas du recouvrement choisi et qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Par passage au quotient, on obtient ainsi une réprésentation

$$\overline{\Lambda} = \rho : \pi_1(M) \to G$$

appelée holonomie de la (G,T)-structure. Son image est le groupe de'holonomie de la (G,T)-structure (ou si on préfère du feuilletage $\mathcal{F}$) [1].

Si on note $\widetilde{M}$ le revêtement universel d'une variété M supportant un feuilletage $\mathcal{F}$ admettant une (G,T)-structure transverse, ρ la réprésentation d'holonomie associée, $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé de $\mathcal{F}$ dans $\widetilde{M}$, on démontre dans ces conditions dans [7]

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage admettant une (G,T)-structure transverse sur une variété M. Alors il existe une submersion D de $\widetilde{M}$ sur un ouvert de T, telle que :*

i) *les composantes connexes des fibres de D sont les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$;*
ii) *D est équivariante par rapport à ρ, i.e. pour tout $s \in \pi_1(M)$ et pour tout $\widetilde{x}) \in \widetilde{M}$ on a :$D(s.\widetilde{x}) = \rho(s) \circ D(\widetilde{x})$*

Cette application D est appelée souvent application developpante (de la (G,T)-structure considérée).

Remarque 2.3. Réciproquement , supposons que l'on se donne une réprésentation ρ de $\pi_1(M)$ dans G et une submersion D de $\widetilde{M}$ sur un ouvert de T, équivariante par rapport à ρ. Alors le feuilletage simple défini par la submersion D passe au quotient en un feuilletage admettant une (G,T)-structure transverse sur M.

Pour une préentation plus précise et des résultats plus détaillés ,dans le cas particuliers des feuilletages de Lie et des feuilletages transversalement homogènes , voir [6]

2.2 – Γ-groupe d'holonomie d'un feuilletage admettant une (G^Γ, G)- structure transverse

Proposition 2.4. *Pour un sous-groupe discret H d'un groupe topologique G, les assertions suivantes sont équivalentes,*

1. *H est normal dans G;*
2. *H est contenu dans le centre de G.*

Pour le voir, il suffit de considérer l'application de $\Gamma \times G \to \Gamma$ qui à$(\gamma, g) \to g\gamma g^{-1}$ Comme Γ est discret, par un argument classique de connexité et de continuité, on établit que cette application est constante et égale à γ. La réciproque étant évidente.

Ceci permet de poser les définitions suivantes.

Définition 2.5.

1. Deux réprésentations Φ_1 et Φ_2 de $\pi_1(M)$ dans un groupe L sont dites équivalentes si et seulement si il existe une réprésentation ζ de $\pi_1(M)$ dans $C(L)$ telle que $\Phi_2 = \zeta\Phi_1$.
2. Soit ψ une réprésentation de $\pi(M)$ dans G^Γ. ψ induit des réprésentations ψ_1, ψ_2 respectivement de $\pi_1(M)$ dans G et $\pi_1(M)$ dans Γ de sorte que $\psi = L_{\psi_1} \circ R_{\psi_2}$. Cette décomposition n'est pas unique, puisque pour toute réprésentation ζde $\pi_1(M)$ dans $\Gamma \cap C(G)$), on a $\psi = L_{\psi_1} \circ R_{\psi_2} = \psi = L_{\psi_1\zeta} \circ R_{\zeta^{-1}\psi_2}$. $\Gamma(\psi) = \psi(\pi_1(M))$ est un sous-groupe de Γ, et $\Gamma(\psi) \cap C(G)$ =$\Gamma(\psi) \cap C(\Gamma)$est un sous-groupe normal de $\Gamma(\psi)$, et c'est le groupe $\frac{\Gamma(\psi)}{\Gamma(\psi)\cap C(G)}$ noté $\mathcal{R}Hol(\psi)$ qu'on appellera le Γ-groupe d'holonomie de la réprésentation ψ.Il mesure l'obstruction à ce que ψ soit à une équivalence près une réprésentation de $\pi(M)$ dans G.
3. Si la réprésentation ψ est l'homomorphisme d'holonomie d'un feuilletage $\mathcal{F}^\Gamma$ défini par une (G^Γ, G)- structure transverse ,$\mathcal{R}Hol(\psi)$ sera noté $\mathcal{R}Hol(\mathcal{F}^\Gamma))$ et appelé le Γ-groupe d'holonomie du feuilletage.

2.3 – Détermination des feuilletages admettant pour extension discrète un feuilletage transversalement homogène

L'application

$$\begin{array}{ccc} G^\Gamma \times G & \longrightarrow & G \\ (v = L_g \circ R_\gamma, u) & \longmapsto & v \cdot u \quad = (L_g \circ R_\gamma)(u) = gu\gamma \end{array}$$

définit une action de G^Γ sur G , et mieux, on a:

Proposition 2.6. *G^Γ opère analytiquement sur G.*

Proof. Soit $L_g \circ R_\gamma \in G^\Gamma$. Et soit U un ouvert non vide de G.

$L_g \circ R_{\gamma\ |U} = 1_{G|U}$ implique que $\gamma = g^{-1}$ et $H_g = \{u \in G/gug^{-1} = u\}$ est un sous-groupe de Lie de G .En effet si $g\gamma \neq e$,alors $L_g \circ R_\gamma(e) \neq e = 1_G(e)$.Par continuité, il existe un voisinage ouvert V de l'élément neutre(on peut le prendre même symétrique si l'on veut) tel que pour tout $v \in V$ on ait $L_g \circ R_\gamma(v) \neq v$. Maintenant soit $u_0 \in U$, $(u_0V) \cap U$ est un voisinage ouvert de u_0. Soit $z = u_0 v \in (u_0V) \cap U$, on a alors

$$u_0 v = z = L_g \circ R_\gamma(z) = gz\gamma = gu_0v\gamma = gu_0\gamma\gamma^{-1}v\gamma = (gu_0\gamma)(\gamma^{-1}v\gamma) = u_0\gamma^{-1}v\gamma;$$

ce qui implique que $v = \gamma^{-1} v \gamma$ pour tout $v \in V$; en d'autres termes on a $Ad_{\gamma|V} = 1_{G|V}$. Par ailleurs $H_\gamma = \{u \in G/\gamma u \gamma^{-1} = u\}$ est visiblement un sous -groupe fermé, donc un sous-groupe de Lie de G. Ensuite puisque par hypothèse H_γ contient l'ouvert (non vide) U de G, alors pour des raisons de dimension et d'homogénéité dans un groupe de Lie, on a nécessairement $H_\gamma = G$. Par ailleurs puisque pour ce $z \in (u_0 V) \cap U$ considéré plus haut on a $gz\gamma = z = \gamma^{-1} z \gamma$; on y tire que $g = \gamma^{-1}$ et on a une contradiction avec $g\gamma \neq e$.On a montré ainsi $L_g \circ R_{\gamma\ |U} = 1_{G|U}$ implique que $\gamma = g^{-1}$et $L_g \circ R_\gamma = 1_G$. Et la réciproque est évidente . Si on note que la condition $L_g \circ R_\gamma = 1_G$ contient la condition $g = \gamma^{-1}$, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout ouvert non vide U de G, on a

$$L_g \circ R_{\gamma|U} = 1_{G|U} \Longleftrightarrow L_g \circ R_\gamma = 1_G.$$

Considérons maintenant un ouvert non vide quelconque U et des éléments quelconques $g, g' \in G, \gamma, \gamma' \in \Gamma$, on a ; $L_{g'} \circ R_{\gamma'|U} = L_g \circ R_{\gamma|U} \Longrightarrow L_{g^{-1}g'} \circ R_{\gamma'\gamma^{-1}|U} = 1_{G|U} \Longrightarrow L_{g^{-1}g'} \circ R_{\gamma'\gamma^{-1}} = 1_G \Longrightarrow L_{g'} \circ R_{\gamma'} = L_g \circ R_\gamma$. Il en résulte pour tout ouvert U, $L_{g'} \circ R_{\gamma'|U} = L_g \circ R_{\gamma|U} \Longrightarrow L_{g'} \circ R_{\gamma'} = L_g \circ R_\gamma$ et c'est ce qui justifie que G^Γ opère analytiquement sur G. □

Cela permet alors d'établir le résultat suivant:

Proposition 2.7. *A tout $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène d'un sous-groupe discret d'une variété M , il correspond un feuilletage défini par une (G^Γ, G)-structure transverse et les deux feuilletages transversalement C^∞ sous-jacents sont identiques.*

En plus le feuilltage à (G^Γ, G)- structure transverse est un G-feuilletage de Lie si et seulement si son Γ-groupe d'holonomie est trivial.

Proof. Notons $\mathcal{F}$ ce $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène . Soit (D, ρ) son développement sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M . Puisque $\widetilde{M}$ est connexe et simplement connexe, soit D^Γ un relèvement de D sur G revêtement de $\frac{G}{\Gamma}$ qui prend la valeur e pour un certain $\widetilde{x}_0$: On a pour tous $s \in \pi_1(M)$ et $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$

$$\pi(D^\Gamma(s\widetilde{x})) = (\pi \circ D^\Gamma)(s\widetilde{x}) = D(s\widetilde{x}) = \rho(s)D(\widetilde{x}) = \rho(s)\pi(D^\Gamma(\widetilde{x})) = \pi(\rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})).$$

Comme le revêtement $G \longrightarrow \frac{G}{\Gamma}$ est ici vu comme un fibré principal pour l'action à droite de Γ sur G , la relation précédente montre que pour $s \in \pi_1(M)$ et $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, $D^\Gamma(s\widetilde{x})$ et $\rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})$ appartiennent à la même fibre dans G,ce qui assure donc l'existence et l'unicité d'un élément $\delta(s, \widetilde{x})$ dans Γ tel que $D^\Gamma(s\widetilde{x}) = \rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})$ $\delta(s, \widetilde{x})$. L'application δ de $\pi_1(M) \times \widetilde{M} \to \Gamma$ ainsi définie est visiblement continue . Comme $\pi_1(M)$ et Γ sont de topologies discrètes ,par continuité et connexité , la restriction de δ sur chaque composante connexe de $\pi_1(M) \times \widetilde{M}$ est constante, de sorte que finalement δ ne dépend que de s . On peut écrire: pour tous $s \in \pi_1(M)$ et $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$,

$$D^\Gamma(s\widetilde{x}) = \rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})\delta(s) = (L_{\rho(s)} \circ R_{\delta(s)})(D^\Gamma(\widetilde{x})).$$

On constate que δ est un anti-morphisme(i.e $\delta(ss') = \delta(s')\delta(s)$).Soit $\gamma = \delta^{-1}$ le morphisme de groupe correspondant. On pose $\sigma(s) = L_{\rho(s)} \circ R_{\delta(s)} = L_{\rho(s)} \circ R_{\gamma^{-1}(s)}$;on vérifie sans peine que σ est un homomorphisme de groupes de $\pi_1(M)$ dans G^Γ. Ainsi on a

$$D^\Gamma(s\widetilde{x}) = \rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})\delta(s) = (L_{\rho(s)} \circ R_{\delta(s)})(D^\Gamma(\widetilde{x})) = \sigma(s)(D^\Gamma(\widetilde{x})) = (\sigma(s) \circ D^\Gamma)(\widetilde{x})$$

et la relation $D^\Gamma(s\widetilde{x}) = \sigma(s)(D^\Gamma(\widetilde{x}))$ établit la σ-équivariance de D^Γ.Tout ceci montre bien que le feuilletage $\mathcal{F}$ dérive d'une (G^Γ, G)- structure transverse comme l'indiquent les diagrammes suivants:

$$\begin{array}{cccc} & \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G & \\ s & \downarrow & & \downarrow & \sigma(s) \\ & \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G & \\ Id_M & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & \widetilde{M} & \xrightarrow{D} & \frac{G}{\Gamma} & \\ p & \downarrow & & & \\ & M & & & \end{array}$$

Ensuite, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G & \xrightarrow{\pi} & \frac{G}{\Gamma} \\ \downarrow & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

et l'égalité $D = \pi \circ D^\Gamma$ montrent que le feuilletage $\mathcal{F}$ est une extension [2] du feuilletage $\mathcal{F}^\Gamma$ i.e.$\mathcal{F}^\Gamma \subset \mathcal{F}$. Montrons maintenant que$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\Gamma$ i.e. que toute feuille de $\mathcal{F}$ contient une feuille de $\mathcal{F}^\Gamma$. Soit F une feuille de $\mathcal{F}$, F^Γ une feuille de $\mathcal{F}^\Gamma$ contenue dans F et L une feuille de $p^{-1}(F)$, contenant L^Γ une feuille de $p^{-1}(F^\Gamma)$. Alors $D^\Gamma(L)$ est une partie connexe de G et $D(L) = (\pi \circ D^\Gamma)(L)$ est un singleton dans $\frac{G}{\Gamma}$, donc $D^\Gamma(L)$ est contenue dans une fibre de π. Or cette fibre est discrète et $D^\Gamma(L)$ connexe non vide, par conséquent $D^\Gamma(L)$ est réduit à un point; il en résulte que $L \subseteq L^\Gamma$ et $F \subseteq F^\Gamma$.Au total,$L = L^\Gamma$, donc $F = p(L) = p(L^\Gamma) = F^\Gamma$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\Gamma$. Ensuite comme π est un difféomorphisme local, il est clair que deux feuilletages correspondants proviennent du même feuilletage transversalement C^∞de M.

Pour la suite notons que le Γ-groupe d'holonomie correpondant est $\mathcal{R}Hol(\mathcal{F}^\Gamma) = \frac{\gamma(\pi_1(M))}{\gamma(\pi_1(M))\cap C(G)}$ .Si $\mathcal{F}^\Gamma$ est un G-feuilletage de Lie, alors il existe un homomorphisme de groupes $k : \pi_1(M) \to G$,tel que $L_{\rho(s)} \circ R_{\gamma^{-1}(s)} = \sigma(s) = L_{k(s)}$. Ce qui implique que pour tout $s \in \pi_1(M)$ et pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, on a

$$\rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})\gamma^{-1}(s) = (\sigma(s) \circ D^\Gamma)(s\widetilde{x}) = k(s)D^\Gamma(\widetilde{x}).$$

En particulier avec $D^\Gamma(\widetilde{x}_0) = e$, on tire que $k(s) = \rho(s)\gamma^{-1}(s)$. Ainsi, de $\rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})\gamma^{-1}(s) = k(s)D^\Gamma(\widetilde{x}) = \rho(s)\gamma^{-1}(s)D^\Gamma(\widetilde{x})$, il vient que $\rho(s)D^\Gamma(\widetilde{x})\gamma^{-1}(s) = \rho(s)\gamma^{-1}(s)D^\Gamma(\widetilde{x})$ et donc $D^\Gamma(\widetilde{x})\gamma^{-1}(s) = \gamma^{-1}(s)D^\Gamma(\widetilde{x})$ ceci pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$; cela signifie comme D^Γ en tant que submersion est une application ouverte, que $Ad_{\gamma^{-1}(s)}$ coincide avec l'identité sur l'ouvert $V = D^\Gamma(G)$. Il vient alors, par analycité, que pour tout $s \in \pi_1(M)$, $Ad_{\gamma(s)} = 1_G$; ce qui signifie $\gamma(\pi_1(M)) = \mathcal{RH}ol(\mathcal{F}^\Gamma) \subset C(G)$, i.e. la trivialité du Γ-groupe d'holonomie. Et évidemment la trivialité du Γ-groupe d'holonomie implique que le feuilletage $\mathcal{F}^\Gamma$ est transversalement de Lie (ayant pour développement $(D^\Gamma, \rho\gamma^{-1})$). □

Les fonctions de transition définissant le feuilletage $\mathcal{F}^\Gamma$ étant obtenues par localisation des difféomorphismes de G^Γ, ce feuilletage est tout simplement un $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$-feuilletage de M; il est parfaitement défini par la donnée de $(\widetilde{M}, D^\Gamma, \sigma)$. Ce triplet est un développement du feuilletage sur $\widetilde{M}$. Dans ces conditions , on sait qu'on a une unicité du développement dans le sens suivant [6].

Proposition 2.8. *Deux tels développements* $(\widetilde{M}, D_i^\Gamma, \sigma_i)$ *définissent le même* $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$*-feuilletage si et seulement si il existe* $\omega \in G^\Gamma$ *tel que* $D_2^\Gamma = \omega \circ D_1^\Gamma$, $\sigma_2 = \omega \circ \sigma_1 \circ \omega^{-1}$.

Nous allons juste voir comment apparait naturellement l'élément ω annoncé , le reste étant soit connu d'avance, soit facile à vérifier. Ainsi, si deux développements $(\widetilde{M}, D_i^\Gamma, \sigma_i)$ définissent le même $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$-feuilletage de M, alors ils induisent deux développements $(\widetilde{M}, \pi \circ D_i^\Gamma, \pi \circ \sigma_i)$ définissant le même $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène de M.Dans ces conditions, puisqu'un $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène peut être regardé comme un feuilletage à $(G, \frac{G}{\Gamma})$-structure transverse, il existe donc un élément unique $g \in G$ tel que $\pi \circ D_2^\Gamma = g \cdot (\pi \circ D_1^\Gamma)$ et $\rho_2 = g\rho_1 g^{-1}$. Ainsi, pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, on a $\pi(D_2^\Gamma(\widetilde{x})) = \pi(gD_1^\Gamma(\widetilde{x}))$. Ce qui assure comme précédemment l'existence d'une fonction δ de $\widetilde{M}$ dans Γ telle que $D_2^\Gamma(\widetilde{x}) = gD_1^\Gamma(\widetilde{x})\delta(\widetilde{x})$. Là encore pour des raisons de continuité et de connexité, la fonction δ est constante; d'où $D_2^\Gamma = \omega \circ D_1^\Gamma$, avec $\omega = L_g \circ R_\delta$.Ensuite, on a,

$$\begin{aligned}(\sigma_2(s) \circ \omega)(D_1^\Gamma(\widetilde{x})) &= \sigma_2(s)(D_2^\Gamma(\widetilde{x})) = D_2^\Gamma(s\widetilde{x}) = \\ &= \omega \circ D_1^\Gamma(s\widetilde{x}) = \omega \circ D_1^\Gamma(s\widetilde{x}) = (\omega \circ \sigma_1(s))(D_1^\Gamma(\widetilde{x})).\end{aligned}$$

De l'égalité des termes extrèmes, on tire que $\sigma_2(s) \circ \omega$ et $\omega \circ \sigma_1(s)$ sont deux difféomorphismes de G^Γ qui coïncident sur l'ouvert $V = D^\Gamma(G)$; il en résulte par analycité que $\sigma_2(s) \circ \omega = \omega \circ \sigma_1(s)$, ceci pour tout $s \in \pi_1(M)$ et c'est ce qui conduit enfin à $\sigma_2 = \omega \circ \sigma_1 \circ \omega^{-1}$.

Il résulte directement de cette proposition:

COROLLAIRE 2.9. *Tout $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène d'un sous-groupe distingué Γ est de Lie et dérive d'un G-feuilletage de Lie.*

PROOF. Avec les notations précédentes, le $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène est un $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage de Lie de developpement $(\widetilde{M}, D, \pi \circ \rho)$. Pour le feuilletage $\mathcal{F}^\Gamma$, il est clair que $\Gamma \subset C(G)$ implique la trivialité du Γ-groupe d'holonomie et on conclut avec la proposition. □

Aussi, puisque pour une variété compacte et simplement connexe, tout Γ-groupe d'holonomie est trivial, le résultat de Fédida [4]sur l'existence de G-feuilletages de Lie sur les sphères et ce qui précède permettent de dire également:

REMARQUE 2.10. En dehors des feuilletages par points de $\mathbb{S}^1$et $\mathbb{S}^3$, les sphères ne supportent pas de $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène à sous-groupe discret.

On notera par ailleurs que la donnée d'un feuilletage d'une variété défini par une (G^Γ, G)-structure transverse permet d'associer canoniquement, à travers le revêtement π, un $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage transversalement homogène de cette variété.

Ceci dit, au total, on aura établi le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *Etant donné une variété M, un groupe de Lie G, un sous-groupe discret Γ de G,*

Il ya une correspondance biunivoque entre les $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletages transversalement homogènes et les $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$-feuilletages de M .Et les C^∞-feuilletages sous-jacents de deux feuilletages correspondants coïncident .

En plus un $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$-feuilletage est un G-feuilletage de Lie si et seulement si son Γ-groupe d'holonomie est trivial.

REMARQUE 2.11.

1. Les feuilles correspondantes de deux feuilletages correspondants sont identiques et ont même holonomie.
2. Lorsqu'un $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage d'une variété M dérive d'un G-feuilletage de Lie, ses feuilles sont sans holonomie. Ainsi l'existence d'une feuille du $\frac{G}{\Gamma}$-feuilletage admettant une holonomie est une obstruction à l'existence d'un G-feuilletage de Lie sur cette variété.

Acknowledgements

Mes remerciements à Aziz El Kacimi pour tous les échanges qu'on a eus ensemble.

REFERENCES

[1] Y. Carrière: *Flots riemanniens*, In: "Structures transverses des feuilletages", Astérisque, **116** (1984), 31–5.

[2] C. Dadi – H. Diallo: *Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte*, Afrika Mathematika, **18** (2007), 34–45.

[3] H. Diallo: *Sur les drapeaux de Lie*, Afrika Mathematika, **13** (2002), 75–86.

[4] E. Fédida: *Sur l'existence des Feuilletages de Lie*, CRAS de Paris, **278** (1974), 835–837.

[5] E. Ghys: *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Anna. Inst. Fourier, Grenoble, **34**, (1984), 203–223.

[6] C. Godbillon: *Feuilletage:Etude géométrique I*, Publication IRMA, Strasbourg, 1985.

[7] W. Thurston: *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, chapitre IV, Princeton University.

Lavoro pervenuto alla redazione il 10 marzo 2015
ed accettato per la pubblicazione il 19 giugno 2015

Indirizzo dell'Autore:
Hassimiou Diallo – Laboratoire de Mathématiques Fondamentales – Ecole Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire
E-mail: diallomh@yahoo.fr